

Werkcollege Opgaven Klassieke Mechanica 2
Voortgezette Mechanica
NS-350B

GA Blab M van Leeuwen

2012–2013

Voorwoord

De opgaven in deze bundel sluiten aan bij het college *Mechanica 2 / Voortgezette Mechanica* (NS 350B) en het boek “Classical Mechanics” van John Taylor. De opgaven komen uit het werkcollegebundel van Prof. dr. A.F.M Arts, het boek van John Taylor, en de boeken “Classical Mechanics” van David Morn, “Analytical Mechanics” van Fowles&Cassiday, en “Classical Mechancis” van Goldstein. Aan het eind van deze opgavenbundel vind je ook oude tentamen opgaven.

Meld fouten of onduidelijkheden in de redactie van vraagstukken bij mij. Bestudeer voordat je aan een hoofdstuk begint de theorie, dit voorkomt veel frustratie bij het oplossen van de vraagstukken bij studenten en werkcollegebegeleiders!

Gerhard A. Blab, g.a.blab@uu.nl

Inhoudsopgave

Voorwoord	i
1 Kinematica, Wetten van Newton	1
1.1 Vectoren	1
1.2 Snelheid, versnelling, baanvergelijking	2
1.2.1 Vliegende insecten	2
1.2.2 Schutter op Roterende Schijf	2
1.2.3 Roterende Buis	2
1.3 Variabele Massa	3
1.3.1 Karretje in de Regen	3
1.3.2 Raket met Gasuitstoot	3
1.3.3 Vallende Waterdruppel	3
1.3.4 Sneeuwscheppende Slee	4
1.4 Krachten die een Functie zijn van de Snelheid	4
1.4.1 Kogel met Luchtwrijving	4
2 Arbeid en Energie	5
2.1 Opspattende Modder	5
2.2 Lijnintegralen	5
2.3 Potentiaal en Veldsterkte	6
2.4 Kracht en Potentiaal	6
3 Trillingen	7
3.1 Trillende Zuiger	7
3.2 Trilling in één Dimensie	7
3.3 Resonantie	7
3.4 Trilling in twee Dimensies	8
3.4.1 Trilling in twee Dimensies 1	8
3.4.2 Trilling in twee Dimensies 2	8
3.5 Kritiek Gedempte Oscillator	8
3.5.1 Kritiek Gedempte Oscillator - Deel 1	8
3.5.2 Kritiek Gedempte Oscillator - Deel 2	9
4 Euler-Lagrange Vergelijkingen	10
4.1 Geodeten	10
4.2 Brachistochroon	10
4.3 Zeepvlies	11

5	Vergelijkingen van Lagrange	12
5.1	Lagrangevergelijkingen in één Dimensie	12
5.2	Hellende Vlak	12
5.3	Trillende Veer met Massa	13
5.4	Slinger met Roterend Ophangpunt	13
5.5	Blok aan Katrol	13
5.6	De Glijdende Slinger	14
5.7	Beweging in een Parabolische Kom	14
6	Kleine Trillingen	16
6.1	Dubbele Slinger	16
6.2	Lineaire Beweging van een CO ₂ Molecuul	16
6.3	Slinger met Vrije Ophanging	17
6.4	Trillende Halter	17
7	Centrale Krachtvelden	19
7.1	Effectieve Potentiaal	19
7.2	Planeetbaan	19
7.3	Meteorietbaan	20
7.4	Komeetbaan	20
7.5	Botsing Tussen Satellieten	21
7.6	r^n Potentiaal	21
7.7	Baan in een $1/r^5$ -Krachtveld	21
8	Niet-Interiaalstelsels	22
8.1	Slee op Helling	22
8.2	Roterende Buis	22
8.3	Roterende Kom	23
8.4	Ruimtereis	23
8.5	De Slinger van Foucault	23
9	Rotaties om een Vaste As	25
9.1	Plank op Rollers	25
9.2	Roterende Schijf	25
9.3	Roterende Schijven	26
9.4	Kracht op een Scharnier	26
9.5	Rollende Schijf op een Cilinderoppervlak	26
10	Rotaties in Drie Dimensies	28
10.1	Traagheidstensor	28
10.2	Precessie van een Rollende Munt	28
10.3	Nutatie van een Snelroterende Symmetrische Tol	29
11	Viervectoren	30
11.1	Lorentztransformatie	30
11.2	De 4-componentennotatie	30
11.3	Invariante Massa	32

A Tentamenopgaven	33
A.1 Schijf op een bol	33
A.2 Lagrange-punten	33
A.3 Tuimelend Blok	34
A.4 Veer op een helling	35
A.5 Slinger van Atwood	36
A.6 Haltervormige Satelliet	36
A.7 Dubbele slinger	37

Hoofdstuk 1

Kinematica, Wetten van Newton

1.1 Vectoren

- a) Bewijs dat twee vectoren \vec{a} end \vec{b} loodrecht op elkaar staan indien er een vector \vec{c} is waarvoor geldt:

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 \quad \text{en} \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

- b) Toon aan dat \vec{a} end \vec{b} loodrecht op elkaar staan als $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$. Bewijs ook het omgekeerde van deze stelling.

- c) Welk verband bestaat er tussen de vectoren \vec{b} en \vec{c} als gegeven is $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$?

- d) Bewijs de vectorgelijkheid:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

Tip: Kies de x -as langs \vec{c} en de y -as zodanig dat \vec{b} in het xy -vlak ligt. Schrijf dan de vergelijking uit in componenten.

- e) Gegeven de twee vectoren $\vec{a} = (3, 7, -8)$ en $\vec{b} = (2, -9, 10)$, bereken:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$,

2) $\vec{a} \times \vec{b}$,

3) de hoek tussen \vec{a} en \vec{b} ,

4) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{a})$,

5) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a})$, en

6) vind een eenheidsvector die loodrecht op \vec{a} en \vec{b} staat.

1.2 Snelheid, versnelling, baanvergelijking

1.2.1 Vliegende insecten

a) De positie \vec{r} van een vlieg als functie van plaats en tijd is:

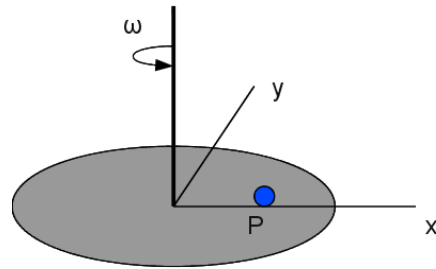
$$\vec{r} = 2 \sin(\omega t) \hat{x} + 2 \cos(\omega t) \hat{y} + t^2 \hat{z}$$

- 1) Wat is de vorm van de baan?
- 2) Bereken de absolute waarden van \dot{r} en \ddot{r} voor $\omega = 2 \text{ s}^{-1}$.

b) Een bij vliegt langs een spiraalvormig pad gegeven door de vlakke poolcoördinaten $r = b \exp(kt)$ en $\theta = c \cdot t$, met b, k , en c positieve constanten. Toon aan dat tijdens het vliegen de hoek tussen de snelheidsvector en de versnellingsvector constant is.

1.2.2 Schutter op Roterende Schijf

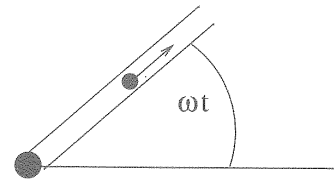
Om een beter inzicht te krijgen in de versnellingen die optreden in een draaiend coördinatenstelsel beschouwen we de volgende situatie (zie figuur). Op een horizontale schijf, die met een constante hoeksnelheid ω om een verticale as door O draait, zit een schutter in P ($OP = r_0$). Op het tijdstip $t = 0$ schiet de schutter in de richting van de positieve x -as. Zijn kogel heeft een beginsnelheid v ten opzichte van de schijf.



- a) Bereken waar de kogel zich op tijd t bevindt in het ‘laboratorium’ (x, y) -stelsel en in het draaiende (ξ, η) -stelsel. Teken de banen van de kogel in beide stelsels. Hoe groot is de versnelling in het (x, y) -stelsel?
- b) Bereken de versnellingen in de η - en de ξ -richtingen door de gevonden uitdrukking voor de coördinaten tweemaal te differentieren. Bereken de versnelling op het tijdstip $t = 0$.
- c) Teken de grootte en richting van de versnelling in het (ξ, η) -stelsel op $t = 0$.
- d) Bereken de absolute grootte van de versnelling als functie van de tijd in het geval $r_0 = 0$.

1.2.3 Roterende Buis

Een puntmassa kan bewegen in een buis, die met een constante hoeksnelheid ω draait om een verticale as door O , loodrecht op het vlak van tekening (zie figuur). Op het tijdstip $t = 0$ ligt de buis langs de positieve x -as en is het massapunt in O . Terwijl de buis draait, beweegt de massa met constante snelheid v_0 in de buis (let op: dit is niet triviaal). Verwaarloos de zwaartekracht.



- a) Hoe luidt de baanvergelijking (r als functie van θ)?
- b) Bereken de azimutale (a_θ) en radiële (a_r) versnelling als functie van de tijd.

- c) Daar de puntmasse een versnelling ongelijk aan nul heeft moet er een kracht op de massa werken die ontbonden kan worden evenwijdig en loodrecht op de buisrichting. Bereken de beide componenten van deze kracht (F_r en F_θ).
- d) Welke bewegingsvergelijkingen beschrijven de baan van de puntmasse als er *geen* radiëel gerichte krachten op het deeltje werken?
- e) Vind $r(t)$ met de randvoorwaarden: $r(0) = 0, v(0) = v_0$.

1.3 Variabele Massa

1.3.1 Karretje in de Regen

Een open wagentje, waarvan de massa m_0 is, rijdt met een snelheid v_0 over rechte horizontale rails. De weerstand van de lucht, de wrijving en de massa van de wielen zijn verwaarloosbaar klein. Het begint plotseling te regenen, waardoor per tijdseenheid een hoeveelheid water met massa μ in het wagentje valt. De regen valt loodrecht naar beneden.

- a) Bereken de snelheid v van het wagentje als functie van de tijd t na het begin van de regen in de volgende gevallen:
- 1) Het regenwater blijft in het wagentje staan.
 - 2) Het regenwater vloeit door een verticale afvoerpijp in de bodem van het wagentje zodanig weg dat er per tijdseenheid evenveel water uit het wagentje wegstroomt als er in regent.
- b) In welke van de twee gevallen legt het wagentje de grootste afstand af totdat het stilstaat? Verklaar dit zonder gebruik te maken van de formules.

1.3.2 Raket met Gasuitstoot

Een raket wordt vanaf een punt op aarde gelanceerd. Het ejectietempo — dat is het per seconde aan massa uitgestoten verbrandingsgas — is constant en gelijk aan km_0 waarbij m_0 de massa van de raket inclusief brandstof is bij de start en k een constante.

- a) Als gegeven is dat de raket zijn brandstof volledig verbruikt in 30 s en dat de massa van de raket na dit verbruik $1/16$ is van de beginmassa m_0 , bereken dan de waarde van k .
- b) Bereken de versnelling van de raket als functie van de tijd als gegeven is dat de snelheid van het uitgestoten gas ten opzichte van de raket gelijk is aan $v_r = 3 \cdot 10^3$ m/s. Teken deze functie in een grafiek. Neem $g = 10$ m/s².

1.3.3 Vallende Waterdruppel

Aan een stofdeeltje als condensatiekern wordt een waterdruppel gevormd in lucht die oververzadigd is met waterdamp. De massatoename per tijdseenheid van de druppel is evenredig met het oppervlak. bereken de snelheid van deze druppel als functie van de tijd onder verwaarlozing van de luchtweerstand. Neem als beginvoorwaarden dat op het tijdstip $t = 0$ de straal van het bolletje r_0 en de snelheid v_0 . Tot welke waarde nadert de snelheid asymptotisch?

1.3.4 Sneeuwscheppende Slee

Een slee glijd langs een met sneeuw bedekte helling (hellingshoek 30°) zonder wrijving naar beneden. Tijdens deze afdaling schept de slee k kg sneeuw per meter afgelegde weg op. Neem aan dat op $t = 0$ geldt $v = 0$ en $x = 0$. De versnelling van de zwaartekracht is g .

1. Stel de bewegingsvergelijking voor de slee op.
2. Laat zien dat een oplossing waarin de snelheid lineair toeneemt met de tijd voldoet aan de bewegingsvergelijking en de randvoorwaarden. Neem hierbij aan dat de beginmassa van de slee te verwaarlozen is. Wat is de versnelling van de slee?

1.4 Krachten die een Functie zijn van de Snelheid

1.4.1 Kogel met Luchtwrijving

Met een geweer wordt een kogel met massa m verticaal omhoog geschoten. Neem aan dat de wrijvingskracht op de kogel kwadratisch afhangt van de snelheid van de kogel, $F_w = cv^2$. De valversnelling g is constant.

- a) Toon aan dat de snelheid verandert met de hoogte x volgens,

$$\begin{aligned} v_o^2 &= Ae^{-2kx} - \frac{g}{k} && \text{voor de opgaande beweging,} \\ v_n^2 &= \frac{g}{k} - Be^{2kx} && \text{voor de neergaande beweging,} \end{aligned}$$

waarin A en B integratieconstanten zijn, $k = c/m$ en x positief is.

- b) Leid een uitdrukking af voor de snelheid waarmee de kogel de grond bereikt. Druk het resultaat uit in de beginsnelheid v_0 en de snelheid $v_t = \sqrt{g/k}$. Wat is de fysische betekenis van v_t ?
- c) Bereken de stijgtijd en de valtijd van de kogel.

Hoofdstuk 2

Arbeid en Energie

2.1 Opspattende Modder

Er wordt een merkteken P gezet op de omtrek van een wiel met straal R . Op het tijdstip $t = 0$ raakt het merkteken de grond. Dit wiel rolt met een constante hoeksnelheid ω over een horizontale weg zonder te slippen. Het punt P draait in de tijd t om het middelpunt M van het wiel over een hoek $\theta = \omega t = v_0 t / R$.

1. Bereken de cartesische coördinaten van P als functie van t en teken de baan.
2. Bereken eveneens de componenten van de snelheid en de versnelling van P . Welke richting heeft de versnelling?
3. Tijdens de beweging van het wiel wordt een kluit modder van het wiel afgeslingerd. Als y de verticale coördinaat is van de rand van het wiel vanwaar de kluit wordt opgeworpen, toon dan aan dat de hoogte h die de kluit kan bereiken $y + \dot{y}^2 / 2g$ is en dat deze maximaal is als de kluit wordt afgeworpen van een punt van de omtrek van het wiel dat g/ω^2 hoger ligt dan het middelpunt.

2.2 Lijnintegralen

Op een deeltje werkt een kracht $\vec{F} = (y^2 - x^2)\hat{x} + 3xy\hat{y}$. Bereken de arbeid die de kracht verricht als het deeltje van $(0, 0)$ naar $(2, 4)$ beweegt langs elk van de volgende wegen:

- a) Langs de x -as van $(0, 0)$ naar $(2, 0)$, dan verder parallel de y -as naar $(2, 4)$.
- b) Langs de y -as van $(0, 0)$ naar $(0, 4)$, dan verder parallel de x -as naar $(2, 4)$.
- c) Langs de rechte lijn door beide punten.
- d) Langs de parabool $y = x^2$.

Is de kracht conservatief?

2.3 Potentiaal en Veldsterkte

Een tweedimensionaal conservatief krachtveld wordt gegeven door de potentiaalfunctie $V(x, y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2$. Hierbij zijn x en y de coördinaten van een punt in een rechthoekig assenstelsel. De potentiaal V is de potentile energie per eenheid van massa.

- Bereken de componenten van de veldsterkte (versnelling).
- Bepaal de verzameling van de punten waar de veldsterkte gericht is langs de verbindinglijn van dat punt met de oorsprong; anders geformuleerd, de punten waar het veld zich manifesteert als een centraal krachtveld.
- In welk(e) punt(en) van het vlak is een deeltje in evenwicht? Onderzoek de aard van dit evenwicht.
- Onderzoek de equipotentiaallijn voor de waarde $V(x, y) = 20$.

2.4 Kracht en Potentiaal

Een puntmassa P met massa m beweegt in een vlak onder invloed van een kracht $\vec{F}(x, y)$. De componenten van het bijbehorende veld zijn in een rechthoekig coördinatenstelsel gegeven door:

$$F_x/m = Ax + By \quad \text{en} \quad F_y/m = Bx + Ay$$

waarin A en B constanten zijn en $A \neq B$.

- Bewijs dat dit veld conservatief is.
- Welk verband bestaat er tussen de potentiaal $\Phi(x, y)$ en dit veld? Bepaal $\Phi(x, y)$.
- Bepaal de verzameling van de punten van het vlak waar het veld de richting heeft van de verbindinglijn met de oorsprong.
- Indien $A = 10 \text{ s}^{-2}$ en $B = -6 \text{ s}^{-2}$ in welk(e) punt(en) van het vlak is P dan in evenwicht. Onderzoek de aard van dit evenwicht.

Hoofdstuk 3

Trillingen

3.1 Trillende Zuiger

Een lichaam is op een zuiger geplaatst die een harmonische beweging uitvoert in verticale richting. De amplitude van de beweging is 0.05 m.

- In welke positie van de zuiger zal het lichaam het eerst contact verliezen met de zuiger als de frequentie geleidelijk wordt opgevoerd?
- Bereken de grootste frequentie waarbij het blok nog net in gedurig contact met de zuiger is.

3.2 Trilling in één Dimensie

Een deeltje met massa m beweegt 1-dimensionaal in een krachtveld met potentiële energie $U(x) = Ax^2 + Bx + C$. Hierbij zijn A , B en C positieve constanten.

- Bewijs dat het deeltje een harmonische beweging uitvoert en bereken de positie van het evenwichtspunt.
- Bepaal de hoekfrequentie ω , uitgedrukt in A en m .
- Bepaal $x(t)$ uitgedrukt in A , B , C en m met als randcondities $x(t = 0) = -C/B$ en $\dot{x}(t = 0) = 0$.

3.3 Resonantie

Een deeltje met massa m bevindt zich in een potentiaalveld met potentiële energie $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$, ($k > 0$). Bovendien werkt op dit deeltje een kracht $F(t) = F_0 \cos \omega t$ gericht langs de x -as. Er geldt $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

- Bereken de plaats van het deeltje $x(t)$ als functie van de tijd.
- Bereken de limietovergang van de gevonden functie $x(t)$ voor het geval van resonantie ($\omega \rightarrow \omega_0$).

3.4 Trilling in twee Dimensies

3.4.1 Trilling in twee Dimensies 1

Een deeltje met massa 3 kg beweegt in een plat vlak in een tweedimensionaal krachtveld met een potentiele energie die gegeven is door $U(x, y) = Ax^2 + By^2$, waarin $A = 3 \text{ J m}^{-2}$ en $B = 12 \text{ J m}^{-2}$.

- Maak een schets van U als functie van x voor $y = 0$, en voor y voor $x = 0$. Teken de equipotentiaallijnen voor $U = 12 \text{ J}$ en $U = 48 \text{ J}$.
- Bepaal de evenwichtspositie in dit krachtveld en ga n of dit evenwicht stabiel of labiel is.
- toon aan dat om deze evenwichtspositie harmonische trillingen kunnen worden uitgevoerd en bereken de frequenties van deze trillingen in de x -richtingen en in de y -richtingen. .
- Breken en teken de baan die het deeltje krijgt als het op het tijdstip $t = 0$ met een snelheid $v_0 = 2 \text{ m s}^{-1}$ vanuit de oorsprong wordt weggeschoten in de richting van de bissectrix van het eerste kwadrant ($x = y \wedge x, y > 0$).

3.4.2 Trilling in twee Dimensies 2

Een puntmassa m beweegt zonder wrijving in het (x, y) -vlak. Op m werkt uitsluitend een conservatieve kracht, gegeven door de potentiaalfunctie $V = \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{2}by^2$, waarin $a > 0$ en $b > 0$.

- Schets de equipotentiaallijnen in het (x, y) -vlak.
- Bepaal de richting en grootte van bovengenoemde kracht als functie van de plaatscoördinaten.
- Beschrijf de beweging die m uitvoert als het op het tijdstip $t = 0$ zonder beginsnelheid wordt losgelaten in een punt op de x -as buiten de oorsprong.
- Bereken de algemene beweging die m uitvoert als op tijd $t = 0$ de puntmassa een willekeurige plaats en snelheid heeft.
- Aan welke betrekking(en) moeten a en b voldoen, opdat de algemene beweging periodiek is?

3.5 Kritiek Gedempte Oscillator

3.5.1 Kritiek Gedempte Oscillator - Deel 1

We gaan uit van een kritiek gedempte harmonische oscillator waarop geen uitwendige kracht werkt.

- Geef de bewegingsvergelijking.
- Bepaal een oplossing van deze bewegingsvergelijking aan de hand van een probeeroplossing $x(t) = e^{\lambda t}$.
- Kan deze oplossing voldoen aan willekeurige randvoorwaarden $x(0) = x_0$ en $\dot{x}(0) = v_0$?
- Construeer door de techniek van variatie van de constante de algemene oplossing van deze bewegingsvergelijking.
- Hoe groot moet de beginsnelheid zijn op $t = 0$ voldoen opdat deze oscillator éénmaal het evenwichtspunt $x = 0$ passeert voor $0 < t < \infty$?

3.5.2 Kritiek Gedempte Oscillator - Deel 2

Op de oscillator van het vorige vraagstuk (3.6) werkt een uitwendige periodieke kracht $F(t) = F_0 \cos \omega t$.

- a) Bepaal de stationaire oplossing. (Hint: vervang $\cos \omega t$ door $e^{i\omega t}$.)
- b) Bij welke hoekfrequentie ω is het gemiddelde door de uitwendige kracht $F(t)$ aan de oscillator toegevoegde vermogen maximaal?

Hoofdstuk 4

Euler-Lagrange Vergelijkingen

4.1 Geodeten

Het pad dat de kortste afstand tussen twee punten op en gekromd oppervlak geeft wordt een geodeet genoemd. Om de vergelijking voor de geodeet te vinden moeten we eerst een integraal opstellen voor de lengte van een pad op het gekromde oppervlak.

- a) Laat zien dat de lengte van een pad $\phi = \phi(\theta)$ tussen twee punten op een bol met straal R gegeven wordt door,

$$L = R \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1 + \sin^2(\theta)\phi'(\theta)^2} d\theta.$$

Hierin worden het begin- en eindpunt gegeven door de bolcoördinaten (θ_1, ϕ_1) en (θ_2, ϕ_2) .

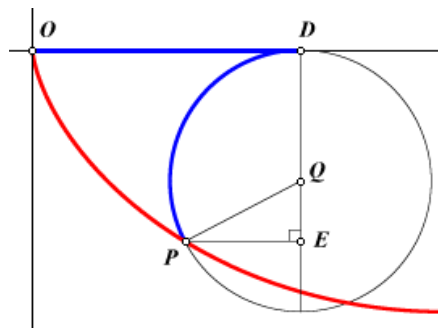
- b) Gebruik de Euler-Lagrange vergelijkingen om aan te tonen dat de geodeet een deel is van een grote cirkel (cirkel om het middelpunt) op de bol. *Hint:* Je bent vrij in het kiezen van de z-as, kies deze b.v. door het beginpunt.
- c) Vind de geodeet op een kegel met als vergelijking in cilindrische coördinaten $z = \lambda\rho$. Gebruik voor de geodeet de vergelijking $\phi = \phi(\rho)$. Controleer het resultaat voor $\lambda \rightarrow 0$.

4.2 Brachistochroon

In het boek (example 6.2, p. 222) en op het college is afgeleid dat een glijbaan in de vorm van een cycloïde de kortste tijd oplevert voor het vallen van een deeltje tussen twee gegeven posities in een constant zwaartekrachtsveld. Als we uitgaan van de beginpositie $P_b = p(0) = (0, 0)$ en de eindpositie $P_e = p(\pi) = (a\pi, 2a)$, dan wordt de cycloïde in parametervorm gegeven door

$$p(\theta) = \begin{pmatrix} a(\theta - \sin \theta) \\ a(1 - \cos \theta) \end{pmatrix}.$$

- a) Leid af dat de valtijd τ gelijk is aan $\pi\sqrt{a/g}$



Figuur 4.1: Cycloid

source: whistleralley.com

- b) Als startpunt kiezen we nu een punt $P_o = p(\theta_o)$ lager op de baan. Het deeltje wordt vanaf dit punt met snelheid nul losgelaten. Toon aan dat de tijd om het punt P_e te bereiken gegeven wordt door

$$\tau_P = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{\theta_o}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta_o - \cos \theta}} d\theta,$$

en bewijs dat deze integraal gelijk is aan $\pi\sqrt{a/g}$, onafhankelijk van de positie P_o . De integraal kan vrij gemakkelijk opgelost worden door over te gaan op de halve hoek via $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1$ en gebruik te maken van een standaardintegraal van de arcsinus.

4.3 Zeepvlies

We kunnen op de volgende manier een omwentelingslichaam maken: kies in het (x, y) -vlak twee vaste punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) en verbind deze met de curve $y = y(x)$. De curve wordt vervolgens geroteerd om de x -as waardoor er een oppervlak ontstaat. Lat zien dat de curve die een minimaal oppervlak genereert gegeven wordt door

$$y(x) = y_0 \cosh \left(\frac{x - x_0}{y_0} \right)$$

met x_0 en y_0 constanten. Het beschreven oppervlak ontstaat als een zeepvlies wordt getrokken tussen twee coaxiale ringen met stralen y_1 en y_2 .

Hoofdstuk 5

Vergelijkingen van Lagrange

5.1 Lagrangevergelijkingen in één Dimensie

Probleem: Werkcollegebundel 5.1

Lagrangevergelijkingen in één dimensie

a) Geef de Lagrangevergelijkingen en de gegeneraliseerde impulsen voor de volgende Lagrangianen:

1) $\mathcal{L} = \dot{q}^2 + \alpha q^2$

2) $\mathcal{L} = \dot{q}^2 + \frac{\alpha q^2}{t^2}$

3) $\mathcal{L} = f(q)\dot{q}$

b) Wat verandert als \mathcal{L} met een constante wordt vermenigvuldigd?

c) Wat verandert als bij \mathcal{L} een constante wordt opgeteld?

d) Los de bewegingsvergelijkingen op. Verklaar waarom de oplossingen kwalitatief verschillend zijn voor verschillende teken van α .

5.2 Hellende Vlak

Een puntdeeltje met massa m kan wrijvingsloos over een hellend vlak bewegen. De hellingshoek θ van het vlak neem constant toe in de tijd volgens $\theta(t) = \omega t$. De versnelling g is constant. We beschouwen alleen situaties waarbij $0 \leq \theta \leq \pi/2$ en het deeltje zich in een tweedimensionaal vlak beweegt (dus de positie is bepaald door de afstand r van het draaipunt).

a) Bepaal het aantal vrijheidsgraden voor het deeltje

b) Bepaal de kinetische en potentiële energie van het deeltje uitgedrukt in m , g , ω , r , en \dot{r} .

c) Bepaal de Lagrangiaan en geef de bewegingsvergelijking voor het deeltje.

d) Neem als beginvoorwaarden $r(t=0) = r_0$ en $\dot{r}(t=0) = 0$ en leid af dat geldt

$$r(t) = r_0 \cosh(\omega t) - \frac{g}{2\omega^2} \sinh(\omega t) + \frac{g}{2\omega^2} \sin(\omega t)$$

5.3 Trillende Veer met Massa

Probleem: Werkcollegebundel 5.3

Trillende veer met massa

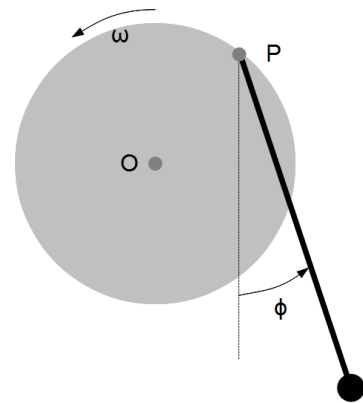
Een puntmassa m hangt verticaal aan een veer in rust. In deze toestand heeft de veer een lengte l , veerconstante k en een massa M ; deze massa is uniform over de veer verdeeld. Op een bepaald moment krijgt m een verticale uitwijking $u \ll l$ en gaat verticaal oscilleren. Er is geen wrijving en de valversnelling is g . Het nulpunt van de potentiële energie van de zwaartekracht kiezen we in het ophangpunt.

- Laat zien dat, met verwaarlozing van u t.o.v. l , de potentiële energie t.g.v. de zwaartekracht gegeven wordt door $V_{\text{grav}} = -gl(m + M/2)$.
- Leid af dat de kinetische energie van de veer gegeven wordt door $T_{\text{veer}} = \frac{1}{6}M\dot{u}^2$. (Hint: de snelheid van een massa-element van de veer is evenredig met de afstand tot het ophangpunt!)
- Bereken de hoekfrequentie van de oscillatie en vergelijk deze met die van een massaloze veer.

5.4 Slinger met Roterend Ophangpunt

Het ophangpunt P van een mathematische slinger (massa m , lengte l) is bevestigd aan een ring (straal R , middelpunt O) die met een constante hoeksnelheid ω ronddraait. De ring mag massaloos verondersteld worden. Kies als beginpositie het punt waar P rechts op dezelfde hoogte ligt als O . Kies dit punt ook als nulpunt van de potentiële energie. Bereken de Lagrangiaan en geef vervolgens de bewegingsvergelijking voor de hoek ϕ .

Hint: bereken eerst de positie, b.v. ten opzichte van O , van de massa op een tijdstip t en differentieer dit om de snelheid te vinden..



5.5 Blok aan Katrol

Probleem: Werkcollegebundel 5.5

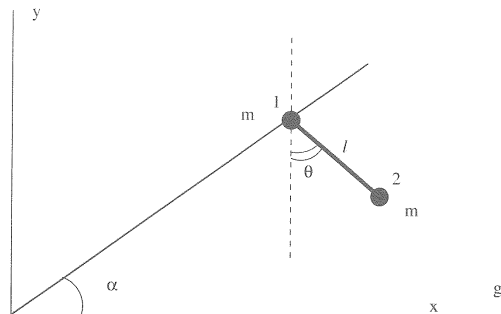
Blok aan katrol

Een massa m hangt aan een (massaloos) touw dat enkele malen om een massieve schijf (straal R) gedraaid is. De schijf kan vrij draaien om een horizontale as door het middelpunt, loodrecht op de schijf. Door de zwaartekracht rolt het touw van de schijf. Noem de afgelegde afstand van de massa x en de draaiing van de schijf de hoek ϕ .

- Geef de constraintvergelijking $f(x, \phi)$ tussen de variabelen x en ϕ .
- Geef de bewegingsvergelijkingen voor de positie van de massa en de draaiing van de schijf, gebruikmakend van een Lagrange multiplier λ .
- Laat zien via de bewegingswetten van Newton dat $\lambda \frac{\partial f}{\partial x}$ gelijk is aan de spankracht in het koord.

5.6 De Glijdende Slinger

Een massaloze staaf met lengte l verbindt twee kogels, die beide massa m hebben. Kogel 1 is wrijvingsloos verbonden met een rail, die een hoek α maakt met de x -as. Kogel 2 kan slingeren in het vlak van tekening. De coördinaten van kogel 2, (x_2, y_2) , kunnen uitgedrukt worden in die van kogel 1, (x_1, y_1) , en de hoek θ die de staaf maakt met de y -as, als



$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 + l \sin \theta \\y_2 &= y_1 - l \cos \theta\end{aligned}$$

Het systeem glijdt langs de rail naar beneden onder invloed van de zwaartekrachtsversnelling g . We gaan de beweging beschrijven door een Lagrangiaan, met gegeneraliseerde coördinaten x_1, y_1 , en θ ; verder voegen we een constraint $f(x_1, y_1)$ toe (en functie van x_1 en y_1), die ervoor zorgt dat de positie van kogel 1 zich op de rail bevindt.

a) Laat zien dat de kinetische energie T gegeven is door

$$T = m\dot{x}_1^2 + m\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + ml\dot{x}_1\dot{\theta} \cos \theta + ml\dot{y}_1\dot{\theta} \sin \theta$$

Geef ook de potentiële (zwaartekrachts) energie $U(x_1, y_1, \theta)$ en $f(x_1, y_1)$.

b) Stel de bijbehorende Euler-Lagrange vergelijkingen van de eerste soort op.

c) Bepaal de stand van de slinger waarvoor θ constant blijft gedurende de beweging.

d) Gebruik de bewegingsvergelijkingen voor x_1, y_1 en de constraint $f(x_1, y_1) = 0$ om te laten zien dat, voor deze stand van de slinger, de reactiekracht die de rail op kogel 1 uitoefent gegeven wordt door

$$\begin{aligned}F_x &= -\frac{2mg \tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} \\F_y &= \frac{2mg}{\tan^2 \alpha + 1}\end{aligned}$$

Verifieer dat deze inderdaad loodrecht op de rail staat.

e) Geef de kracht in de limieten $\alpha = 0$ en $\alpha = \pi/2$. Komt dit overeen met uw verwachting?

5.7 Beweging in een Parabolische Kom

Een puntmassa met massa m beweegt wrijvingsloos over het oppervlak van de paraboloid $z = \frac{1}{2}(\alpha x^2 + \beta y^2)$ onder invloed van een homogeen zwaartekrachtsveld met versnelling g .

a) Geef de Lagrangiaan voor dit systeem

b) Geef de constraintvergelijking

- c) Geef de bewegingsvergelijkingen voor de positie van de massa, gebruikmakend van een Lagrange multiplier λ .
- d) Laat zien dat de normaalkracht van het systeem op de massa van de vorm

$$\vec{N} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha x \\ \beta y \\ -1 \end{pmatrix}$$

is, waarbij λ gegeven wordt door $\lambda = -m (g + \alpha (\dot{x}^2 + x\ddot{x}) + \beta (\dot{y}^2 + y\ddot{y}))$.

Hoofdstuk 6

Kleine Trillingen

6.1 Dubbele Slinger

We beschouwen een dubbele mathematische slinger. De eerste slinger met lengte ℓ en puntmassa m is opgehangen aan een punt O . De tweede identieke slinger is bevestigd aan de puntmassa van de eerste slinger. Het geheel beweegt in een plat vlak onder invloed van de zwaartekracht met versnelling g . Kies de oorsprong in O en de positieve y -richting omlaag. Nee verder als gegeneraliseerde coördinaten de hoeken ϕ_1 en ϕ_2 die de slingers maken met de verticale richting.

a) Leid af dat de Lagrangiaan gegeven wordt door:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\ell^2 \left(2\dot{\phi}_1^2 + 2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + \dot{\phi}_2^2 \right) + mgl(2 \cos \phi_1 + \cos \phi_2).$$

b) Geef de bewegingsvergelijkingen voor de hoeken ϕ_1 en ϕ_2 .

c) Vereenvoudig de vergelijkingen voor het geval dat de hoeken klein zijn. Het resultaat is in matrixvorm

$$\begin{pmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \end{pmatrix} = -\frac{g}{\ell} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}.$$

d) Bereken de eigenfrequenties en de eigentrillingen (normal modes).

6.2 Lineaire Beweging van een CO₂ Molecuul

We beschouwen de beweging in een lineair model van het CO₂ molecuul met de structuur O=C=O. De twee einddeeltjes (O) hebben een massa m en zijn met het centrale deeltje (C), massa M , verbonden door veren met veerconstante k . De verplaatsingen van de drie deeltjes worden gegeven door de coördinaten x_1 , x_2 en x_3 .

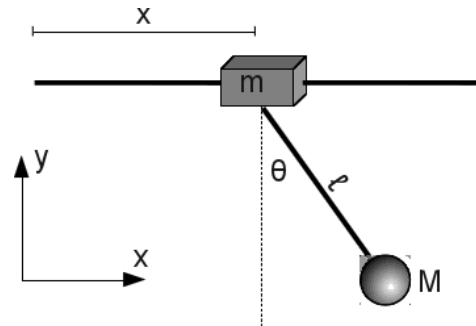
a) Probeer zonder enige berekening uit te voeren te bepalen hoe de eigentrillingen (normal modes) van dit systeem er uit zullen zien. Gebruik hierbij dat er op het systeem geen uitwendige krachten werken.

b) Bepaal de Lagrangiaan en hieruit de bewegingsvergelijkingen.

- c) Neem aan dat er oplossingen bestaan van de vorm $x_i = a_i \cos(\omega t)$ en bepaal de normal modes en de bijbehorende frequenties ($\omega_1 = 0$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\omega_3 = \sqrt{k/m + 2k/M}$).

6.3 Slinger met Vrije Ophanging

Een massa m kan wrijvingsloos bewegen langs een horizontale rail. Aan de massa is een mathematische slinger bevestigd met massa M en lengte ℓ . De versnelling van de zwaartekracht is g .



- a) Hoeveel vrijheidsgraden heeft het systeem?
- b) Kies generaliseerde coördinaten x voor de uitwijking van de massa m en θ voor de slingerhoek en bepaal de Lagrangiaan.
- c) Geef de bewegingsvergelijkingen voor x en θ .
- d) Laat zien dat de oplossingen zijn $x(t) = -\frac{M\ell\theta}{m+M} + At + B$ en $\theta(t) = C \cos(\omega t + \phi)$, met A , B , C en ϕ integratieconstanten.
- e) Wat is de waarde van ω in de limieten $M \gg m$ en $M \ll m$?

6.4 Trillende Halter

Twee deeltjes met massa m bewegen in het xy -vlak. Deeltje A is onderhevig aan een harmonisch potentiaal rond het punt $(-a, 0)$:

$$V(x_A, y_A) = \frac{k}{2} (y_A^2 + (x_A + a)^2).$$

(Denk aan een veer met veerconstante k en verwaarloosbare rustlengte, die tussen het punt en het deeltje gespannen zit.) Deeltje B ondervindt een dergelijke kracht, maar nu rond $(+a, 0)$. De Lagrangiaan is dus

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m (\dot{x}_A^2 + \dot{x}_B^2 + \dot{y}_A^2 + \dot{y}_B^2) - \frac{k}{2} (y_A^2 + y_B^2 + (x_A + a)^2 + (x_B - a)^2).$$

- a) Wat zijn de eigenfrequenties en de eigentrillingen van dit systeem?
- b) Schrijf de Lagrangiaan uit in termen van zwartepunts- en relatieve coördinaten:

$$X = \frac{1}{2}(x_A + x_B) \quad Y = \frac{1}{2}(y_A + y_B) \quad x = -\frac{1}{2}(x_A - x_B) \quad y = -\frac{1}{2}(y_A - y_B)$$

Voert het zwartepunt een harmonische beweging uit?

We verbinden nu de punten A en B door een starre staaf met lengte ℓ . De massa van de staaf is verwaarloosbaar.

- c) We gebruiken de beperkende voorwaarde om een variabele te elimineren: we parametriseren de relatieve coördinaten als $x = \ell \cos \phi$ en $y = \ell \sin \phi$. Bepaal de Lagrangiaan en de Lagrangevergelijkingen in termen van de nieuwe coördinaten X , Y en ϕ .
- d) Wat is de stationaire oplossing? Wat worden de Lagrangiaan en de Lagrangevergelijkingen in de benadering van kleine trillingen rond deze stationaire oplossing?
- e) Bepaal de eigenfrequenties en schets de eigentrillingen rond de stationaire oplossing. Hoeveel onafhankelijke eigentrillingen zijn er? Wat gebeurt er als $\ell = 2a$?

Hoofdstuk 7

Centrale Krachtvelden

7.1 Effectieve Potentiala

Een deeltje met massa m beweegt in een centraal krachtveld met de potentiële energie $U_p(r) = -\alpha/r - \gamma/r^3$; α en γ zijn positieve constanten.

- a) Geef de uitdrukking voor de effectieve potentiële energie $U_{\text{eff}}(r)$.
- b) Onder welke conditie heeft $U_{\text{eff}}(r)$ tenminste één nulpunt?
- c) Onder welke conditie heeft de effectieve kracht tenminste één nulpunt?
- d) Beschrijf het gedrag van het deeltje in de volgende situaties:
 - d1) Het deeltje nadert vanaf $r = \infty$ met een totale energie E waarvoor geldt $E > U_{\text{eff}}^{\text{max}}$. ($U_{\text{eff}}^{\text{max}}$ is de maximale waarde van $U_{\text{eff}}(r)$)
 - d2) Het deeltje nadert vanaf $r = \infty$ met een totale energie E waarvoor geldt $0 < E < U_{\text{eff}}^{\text{max}}$
 - d3) Het deeltje heeft een totale energie $E = U_{\text{eff}}^{\text{max}}$ en bevindt zich op een constante afstand r van het aantrekkende centrum,

$$r = \frac{L^2}{2\alpha m} - \sqrt{\frac{L^4}{4\alpha^2 m^2} - \frac{3\gamma}{\alpha}},$$

waarin L het impulsmoment is. Is deze cirkelbaan stabiel?

- e) Bereken de straal van de cirkelbaan als gegeven is dat het deeltje een stabiele cirkelbeweging uitvoert.
- f) Schets de baan als het deeltje het aantrekkende centrum nadert vanuit het oneindige met een energie die net iets groter is dan $U_{\text{eff}}^{\text{max}}$.

7.2 Planeetbaan

Beschouw een planeet (massa m) die om de zon beweegt in een ellipsbaan met excentriciteit ϵ en halve lange as a . De zon heeft een massa $M \gg m$ en de gravitatieconstante is G . De snelheid van de planeet noemen wij v_p in het perihelium en v_a in het aphelium. In een punt Q van de baan, gelegen op afstand a van de zon, heeft de planeet een snelheid die we v_q noemen.

a) Druk de perihelium- en de apheliumafstand tot de zon uit in a en ϵ en laat zien dat geldt:

$$v_a = \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} v_p.$$

b) Druk de halve korte as van de ellips uit in a en ϵ en laat zien dat geldt:

$$v_q = \sqrt{\frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}} v_p.$$

c) Bepaal v_{\perp} , uitgedrukt in G , M , a en ϵ , m.b.v. een energiebeschouwing.

d) Ga na dat $v_q = \sqrt{v_p v_a}$ en dat v_q niet van ϵ afhangt.

7.3 Meteorietbaan

Een meteoriet met massa m_1 beschrijft een kromlijnige baan in het gravitatieveld van de zon, nadat hei vanuit een zeer grote afstand (lees: oneindig ver) gestart is met een snelheid nul.

a) Wat is de vorm van de baan van de meteoriet? Licht het antwoord toe.

Op een zeker tijdstip is de afstand van de meteoriet tot het middelpunt van de zon minimaal. Noem deze afstand R . Op dat ogenblik botsen de meteoriet en een planeet (met massa m_2). Op het moment van de botsing hebben de snelheden van beide lichamen dezelfde richting. Vóór de botsing beschreef de planeet een cirkelbaan om de zon met straal R . De botsing is volkomen inelastisch.

a) Welke behoudswet(ten) geldt(t/en) bij deze botsing? Motiveer uw antwoord!

b) Bewijs dat vlak voor de botsing de snelheid v_1 van de meteoriet $\sqrt{2}$ maal zo groot is als de snelheid v_2 van de planeet.

c) Druk de snelheid V van de planeet, waarin de meteoriet is doorgedrongen onmiddellijk na de botsing, uit in m_1 , m_2 , R , G en M . G is de gravitatieconstante in de wet van Newton. M is de massa van de zon.

d) Druk de halve lange as a van de ellipsvormige baan van de combinatie planeet meteoriet uit in R , m_1 , m_2 . Toon aan dat als $m_1 \ll m_2$:

$$a \approx R \left(1 + 2 \frac{m_1}{m_2} (\sqrt{2} - 1) \right).$$

7.4 Komeetbaan

De aarde beschrijft om de zon een baan, die als cirkelvormig kan worden beschouwd. De straal van deze baan is R , de omtreksnelheid van de aarde is v_o . Een komeet, die een baan om de zon beschrijft die in hetzelfde vlak ligt als de baan van de aarde, heeft in het perihelium van zijn baan de snelheid $2v_o$. De afstand van dit perihelium tot de zon is $\frac{1}{2}R$. Nadat de komeet het perihelium is gepasseerd snijdt zijn baan de aardbaan in het punt P.

- a) Bereken de snelheid van de komeet in het punt P .
- b) Bereken de excentriciteit van de komeetbaan en geef de vorm van de baan in woord en tekening aan. Zal de komeet aan het zonnestelsel ontsnappen?
- c) Bereken de hoek ϕ die de aardbaan en de komeetbaan in het punt P met elkaar maken.

7.5 Botsing Tussen Satellieten

Twee deeltjes met massa m_1 en m_2 doorlopen dezelfde cirkelbaan om de aarde in tegengestelde richtingen. Op zeker moment vindt een centrale elastische botsing plaats. Hoe groot moet de verhouding m_1/m_2 zijn opdat een van de deeltjes na de botsing in een parabolische baan terecht komt en zo aan de aantrekking van de aarde ontsnapt? Neem aan dat de massa's van de beide deeltjes veel kleiner zijn dan de massa van de aarde en dat die deeltjes geen noemenswaardige aantrekkingskracht op elkaar uitoefenen.

7.6 r^n Potentiaal

Een deeltje met massa m beweegt in een krachtveld met een potentiaal $V(r) = \beta r^n$. Gegeven is dat het deeltje een impulsmoment \mathbf{L} heeft ten opzichte van het krachtcentrum.

1. Bereken de straal r_0 van de cirkelbaan.
2. Vanuit de cirkelbaan geven we het deeltje een stootje zodat de straal r (hopelijk) om de evenwichtswaarde r_0 gaat oscilleren. Bereken de frequentie ω_r van deze trilling.
Hint: De standaard manier is door in de bewegingsvergelijking te substitueren $r(t) = r_0 + \epsilon(t)$ en de vergelijking in goede benadering te herleiden tot $\ddot{\epsilon} = \omega_r \epsilon$. Het kan echter eenvoudiger door gebruik te maken van de effectieve potentiaal en te realiseren dat nabij een extremum de potentiaal een parabolische vorm heeft voor kleine uitwijkingen.
3. Voor welke waarde van n zijn er stabiele banen mogelijk?
4. Laat zien dat de verhouding van ω_r en de frequentie van de cirkelbaan ω_0 gelijk is aan $\sqrt{n+2}$. Teken de verstoorde baan in het geval $n = -1$, de gravitatiepotentiaal.

7.7 Baan in een $1/r^5$ -Krachtveld

Een deeltje beweegt in een cirkelbaan met straal a onder invloed van een aantrekkende kracht die gericht is naar een vast punt van de cirkel.

- a) Geef de baanvergelijking in poolcoördinaten.
- b) Laat zien dat de kracht omgekeerd varieert met de vijfde macht van de afstand tussen massa en het vaste punt op de cirkel. (*Hint: gebruik behoudswetten, uit de baanvergelijking is een verband tussen de radiële en azimuthale snelheid af te leiden.*)
- c) Laat zien dat voor de beschreven baan de totale mechanische energie gelijk is aan nul.
- d) Bereken de omlooptijd.

Hoofdstuk 8

Niet-Interiaalstelsels

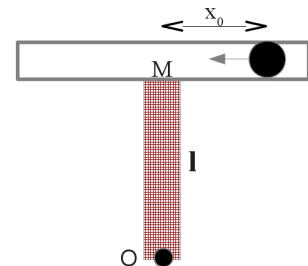
8.1 Slee op Helling

Een slee glijdt zonder wrijving van een hellend vlak met hellinghoek α . Op de slee staat een stelling waaraan een massa m op een hoogte h beven de slee is bevestigd. Terwijl de slee naar beneden glijdt wordt de massa m losgelaten.

- Bepaal de plaats P waar m op de slee terecht komt en bereken de valtijd.
- Stel dat er wel wrijving is met wrijvingscoëfficiënt μ , bepaal dan opnieuw de plaats P' waar m op de slee terecht komt, dat wil zeggen bereken PP' . Bereken ook voor dit geval de valtijd.

8.2 Roterende Buis

Aan het uiteinde M van een lat met lengte l is een buis star bevestigd. Buis en lat staan loodrecht op elkaar (zie tekening). Het hele systeem roteert met een constante hoeksnelheid ω om een as door het punt O loodrecht op het vlak van de lat en de buis. In de buis kan een deeltje met massa m zonder wrijving met de wand van de buis bewegen. Op zeker moment ($t = 0$) bevindt het deeltje zich op een afstand x_0 van M en beweegt dan met een snelheid v_0 zoals in de figuur is aangegeven. De zwaartekracht kan buiten beschouwing worden gelaten.



- Geef de grootte en de richting aan van de echte krachten en van de schijnkrachten, beschouwd in een meedraaiend stelsel, die werken op de massa m in de getekende situatie.
- Stel de differentiaalvergelijking op die de beweging van m in het meedraaiend stelsel beschrijft.
- Los deze differentiaalvergelijking op. Bereken aan welke condities de beginvoorwaarden moeten voldoen opdat m de eindig lange buis niet verlaat.
- Geef aan welke extra kracht op m moet worden uitgeoefend opdat de beweging van m ten opzichte van de buis eenparig is, oftewel $\dot{x}(t) = v_0$ voor alle waarden van t .

8.3 Roterende Kom

Een kom in de vorm van een omwentelingsparaboloïde ($z = cr^2$) draait om de z -as met hoeksnelheid ω . In de kom beweegt zonder wrijving een voorwerp met massa m . In een x', y', z' -coördinatenstelsel van een *met de kom meedraaiende* waarnemer bevindt het voorwerp zich op een gegeven moment op de positie $(x'_0, 0, cx'^2_0)$ (zie fig.b) en beweegt met een snelheid v' in de richting van de oorsprong. De valversnelling is g .

- Welke echte krachten en schijnkrachten werken in het stelsel van de meedraaiende waarnemer op het voorwerp. Geef de grootte en richting van deze krachten.
- Bereken de hoeksnelheid ω_0 waarvoor er op het voorwerp geen netto resulterende kracht tangentieel aan de curve $z = cx^2$ is. Toon aan dat dit resultaat onafhankelijk van de positie x_0 is.
- De kom draait nu rond met de hoeksnelheid ω_0 uit vraag b. Vanuit het meedraaiende stelsel kijken we boven op de kom. Neem aan dat de afstand tot O zo gering is dat de beweging vrijwel in het (x', y') -vlak plaatsvindt. Toon aan dat de baan in het (x', y') -vlak een cirkel wordt. Bereken de straal.

8.4 Ruimtereis

Beschouw een cilindervormig ruimteschip met straal R ver verwijderd van hemellichamen. Het ruimteschip draait met constante hoeksnelheid ω om de cilinderas, waardoor op de binnenwand een kunstmatige valversnelling $\frac{1}{2}g$ heerst, waarbij g de valversnelling op het aardoppervlak is.

- Bepaal de omwentelingstijd van het ruimteschip, uitgedrukt in R en g .
- Een man met massa m , te beschouwen als puntmassa, loopt met de snelheid v over de binnenwand in de lengterichting van het schip. Bepaal de grootte van de normaalkracht \vec{N} die de wand op de man uitoefent.
- De man loopt met snelheid v over de binnenwand maar nu loodrecht op de lengte-as, tegen de rotatierichting van het schip in. Bepaal weer \vec{N} .
- De man bevindt zich op een ladder op een afstand r van de cilinderas en klimt met een snelheid v naar de as toe. De ladder staat loodrecht op de binnenwand. Bereken in het stelsel dat met het schip meedraait alle krachten die op de man werken.

8.5 De Slinger van Foucault

We zullen in dit probleem de slinger van Foucault bekijken. Dit is een slinger die is opgehangen in een roterend stelsel (de aarde). Hierdoor zal een effect genaamd “precessie” op gaan treden. Dit houdt in dat de richting van de slinger (langzaam) zal veranderen.

We beschouwen een mathematische slinger die is opgehangen precies op de noordpool. De slinger heeft een vaste lengte ℓ en daaraan een



Foucault Pendulum at the Panthéon, Paris

image by Javi Masa, CC BY 2.0

(punt)massa m . Verder is de valversnelling g en kijken we naar uitwijking van de slinger t.o.v. de rust positie. die in de oorsprong wordt gelegd.

We noemen nu V het raakvlak aan de noordpool. Hiermee kunnen we twee stelsels associëren: een inertiaalstelsel S (waarin dus de bewegingsvergelijkingen van Newton opgaan), dat niet met de aarde meedraait, en een stelsel S' wat met de aarde meedraait. Noem ω de rotatiesnelheid van S' t.o.v. S .

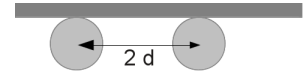
- a) Geef de Lagrangiaan van deze slinger in Cartesische coördinaten, met x en y in het vlak V , en laat zien dat deze voor kleine uitwijkingen benaderd wordt door de Lagrangiaan van een tweedimensionale harmonische oscillator. Gebruik het verband dat bestaat tussen x , y , en z om de z -coördinaat uit de Lagrangiaan te elimineren. Wat is de “veerconstante” k van dit systeem, uitgedrukt in m , g , en ℓ ?
- b) Geef de Lagrangiaan \mathcal{L} van het systeem in het stelsel S en ook de Lagrangiaan \mathcal{L}' in het met de aarde meeroterende stelsel S' in poolcoördinaten (r', ϕ') . Geef vervolgens de bewegingsvergelijkingen in het roterende stelsel.
(*Hint*: aangezien x en y klein verondersteld worden t.o.v. ℓ , kunnen bij Taylor-expansie hogere-ordertermen in x/ℓ en y/ℓ verwaarloosd worden. Let wel op vanaf welke orde je termen verwaarloost! Ga na dat de kinetische energie t.g.v. beweging in de z -richting in deze benadering wegvalt.)
- c) Is er een behouden grootte? Zo ja, welke en wat stelt deze voor?
- d) Wat betekent het dat we de slinger loslaten met $\dot{\phi}' = 0$? En met $\dot{\phi}' = -\omega$? Beschrijf
- e) Neem aan dat de startconditie $p\dot{\phi}' = -\omega$ is. Waartoe reduceren de bewegingsvergelijkingen dan? Beschrijf het gedrag van de oplossing voor beide startcondities. (Hiervoor hoeft je de bewegingsvergelijkingen niet op te lossen!)

Hoofdstuk 9

Rotaties om een Vaste As

9.1 Plank op Rollers

Een uniforme lange plank met massa M en lengte L wordt op twee in tegengestelde richting draaiende even grote cylinders geplaatst (zie figuur). De assen van beide cylinders zijn evenwijdig en liggen in een horizontaal vlak op afstand $2d$ ($2d \ll L$). De wrijvingscoëfficiënt tussen plank en cilindermantel is μ .



- Op het tijdstip $t = 0$ legt men de plank zodanig op de cilinders dat het zwaartepunt Z van de plank niet midden tussen de cilinders ligt. Toon aan dat de plank bij voldoende grote omwentelingsnelheid Ω van de cilinders een harmonische beweging krijgt. Geef de baanvergelijking van het zwaartepunt van de plank.
- Welke hoeksnelheid Ω moeten de cilinders minstens hebben opdat de plank een harmonische beweging krijgt? De straal van de cilinders is R .

9.2 Roterende Schijf

Een cirkelvormige schijf met massa m en straal r is draaibaar in zijn middelpunt M bevestigd aan een massaloze stang met lengte R die aan de andere kant verbonden is met een vast punt P . De stang roteert met een hoeksnelheid $\omega_1(t)$ om een as door P , de schijf roteert met een hoeksnelheid $\omega_2(t)$ om een as door M . Beide rotatieassen staan loodrecht op het vlak door de schijf en de staaf.

Op het tijdstip $t = 0$ roteert de staaf met hoeksnelheid ω_0 terwijl de schijf dan niet roteert. Tussen de schijf en de stang werkt een wrijvingskracht die de schijf in de loop van de tijd met de stang zal doen meedraaien. De bewegingsvergelijking voor de schijf wordt hierdoor

$$I_2 \dot{\omega}_2(t) = -\alpha \{\omega_2(t) - \omega_1(t)\},$$

waarin $I_2 = \frac{1}{2}mr^2$ en α een wrijvingsconstante. Voer verder in $I_1 = mR^2$.

- Beredeneer dat er behoud van impulsmoment is ten opzichte van P en formuleer de wet van behoud van impulsmoment in termen van $\dot{\omega}_1(t)$ en $\dot{\omega}_2(t)$.

Introduceer vervolgens de nieuwe grootheden A (een constante) en $\omega(t)$:

$$\omega_1(t) = A + \frac{I_2}{I_1 + I_2} \omega(t); \quad \omega_2(t) = A - \frac{I_1}{I_1 + I_2} \omega(t).$$

- b) Laat zien dat deze keuze van grootheden consistent is met de wet van behoud van impulsmoment.
- c) Leid uit de vergelijkingen voor $\dot{\omega}_1(t)$ en $\dot{\omega}_2(t)$ een differentiaalvergelijking voor $\omega(t)$ af en los deze op. Geef daarmee de uitdrukkingen voor $\omega_1(t)$ en $\omega_2(t)$.
- d) Teken in één grafiek het totale impulsmoment $J(t)$, het baanimpulsmoment $L(t)$ en het spinimpulsmoment $S(t)$ als $r = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$.
- e) Hoe moeten r en R zich verhouden opdat na lange tijd L en S even groot zijn?

9.3 Roterende Schijven

Twee homogene cilindervormige schijven kunnen draaien om twee evenwijdige vast opgestelde assen A en B . De stralen van de schijven zijn respectievelijk R_A en R_B , hun massa's m_A en m_B . Schijf A roteert met een hoeksnelheid ω_0 om zijn as terwijl schijf B stilstaat. In deze toestand raken de schijven elkaar net niet.

Vervolgens worden de schijven met elkaar in contact gebracht door een kleine evenwijdige verplaatsing van een der assen, waarna de assen op hun plaats worden gehouden. Ten gevolge van de onderlinge wrijving wordt schijf B door A aan het draaien gebracht. Na korte tijd roteren de beide schijven slipvrij. Laat de zwaartekracht buiten beschouwing.

- a) Teken alle krachten die tijdens het slippen op beide schijven werken.
- b) Motiveer waarom de wet van behoud van impulsmoment hier *niet* van toepassing is.
- c) Bereken de hoeksnelheden van beide schijven als ze, met elkaar in contact, slipvrij roteren.

9.4 Kracht op een Scharnier

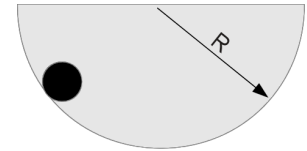
Op de rand van een deur met massa m en breedte b wordt gedurende een zeer korte tijd Δt een horizontale constante kracht F uitgeoefend, waardoor de deur gaat draaien om de verticale as door het punt A (het scharnier). De kracht F staat loodrecht op het vlak van de deur.

Ten gevolge van deze krachtstoot ($F\Delta t$) krijgt de deur een hoeksnelheid ω .

- a) Bereken ω .
- b) Bereken de kracht G_1 die door het scharnier bij A *tijdens* de krachtstoot op de deur wordt uitgeoefend.
- c) Bereken de kracht G_2 die door het scharnier bij A *onmiddellijk na* de krachtstoot op de deur wordt uitgeoefend.

9.5 Rollende Schijf op een Cilinderoppervlak

Een kleine schijf met straal a en massa m rolt zonder te slippen over een onbeweeglijk cilinderoppervlak met straal $R > a$. De kleine schijf beweegt onder invloed van de zwaartekracht.



- a) Hoeveel vrijheidsgraden heeft het systeem? Kies een stelsel van generaliseerde coördinaten en formuleer de conditie waarvoor de schijf slipvrij rolt.
- b) Bepaal de Lagrangiaan.
- c) Bepaal de bewegingsvergelijkingen van de schijf en los deze op voor de randvoorwaarde dat op het tijdstip $t = 0$ de schijf onder een hoek θ_0 vanuit stilstand wordt losgelaten.

Hoofdstuk 10

Rotaties in Drie Dimensies

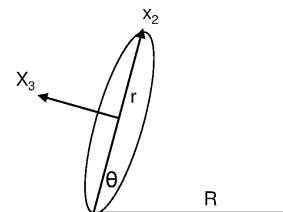
10.1 Traagheidstensor

Beschouw drie massa's, m op de positie $(a, 0, 0)$, $2m$ op $(0, a, a)$ en $3m$ op $(0, a, -a)$. De massa's zijn verbonden door staven met verwaarloosbare massa.

- Bereken de traagheidstensor \mathbf{I} .
- Diagonaliseer de tensor en vind de hoofdtraagheidsmomenten en de hoofdassen.

10.2 Precessie van een Rollende Munt

We kunnen een munt, met straal r zo over een tafel laten rollen (of een wiel over de grond) dat de munt (of wiel) een deel van een cirkel gaat beschrijven. We nemen aan dat de munt slipvrij rolt en dat de afstand van het contactpunt tot het middelpunt van de cirkel gelijk is aan R . De hoek die de munt maakt met het horizontale oppervlak is θ . De hoeksnelheid waarmee de munt door de cirkel loopt is Ω . De hoofdassen van de munt noemen we \hat{x}_2 en \hat{x}_3 , hierbij is de richting van x_3 loodrecht op het oppervlak van de munt en ligt x_2 in het vlak van de munt (zie tekening). De hoofdtraagheidsmomenten zijn $I_3 = \frac{1}{2}mr^2$ en $I_2 = \frac{1}{4}mr^2$.



- Bereken het krachtmoment $\vec{\tau}$ t.o.v het massamiddelpunt van de munt in het laboratoriumstelsel.
- Laat zien dat de hoeksnelheid $\vec{\omega}$ van de munt in het laboratoriumstelsel geschreven kan worden als $\vec{\omega} = \Omega \sin \theta \hat{x}_2 - \Omega \left(\frac{R}{r} - \cos \theta \right) \hat{x}_3$
- Leid nu af door gebruik te maken van $|\frac{d\vec{L}}{dt}| = \Omega L_{\perp}$, waarin \vec{L} het impulsmoment is, dat

$$\Omega^2 = \frac{g}{\frac{3}{2}R \tan \theta - \frac{5}{4}r \sin \theta}. \quad (10.1)$$

De hellingshoek wordt dus in goede benadering gegeven door $\tan \theta = 2g/(3R\Omega^2)$.

10.3 Nutatie van een Snelroterende Symmetrische Tol

Als startpunt nemen we voor de tol de Lagrangiaan, vgl. Taylor 10.106 uit het boek,

$$L = \frac{1}{2}I(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_s(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 - MgR \cos \theta.$$

Hierin is I_s het hoofdtraagheidsmoment van de as waarom de tol snel roteert en I het hoofdtraagheidsmoment om een as hier loodrecht op. De hoeken zijn de Eulerhoeken en R is de afstand van het massamiddelpunt van de tol tot het contactpunt.

- a) Leid met behulp van de Lagrangevergelijkingen de volgende bewegingsvergelijkingen af:

$$I\ddot{\phi} \sin \theta + \dot{\theta}(2I\dot{\phi} \cos \theta - I_s\omega_s) = 0,$$

$$(MgR + I\dot{\phi}^2 \cos \theta - I_s\omega_s\dot{\phi}) \sin \theta = I\ddot{\theta},$$

met de constante $\omega_s = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$.

- b) In het vervolg nemen we aan dat ω_s zeer groot is (snelle tolrotatie) en de precessie $\dot{\phi}$ langzaam, zodat $\dot{\phi} \ll \omega_s$. We kunnen dan de middelste termen in bovenstaande vergelijkingen verwaarlozen. Leid nu af:

$$\frac{d^2\dot{\phi}}{dt^2} + \omega_n^2(\dot{\phi} - \Omega_s) = 0,$$

met $\omega_n = I_s\omega_s/I$, en $\Omega_s = MgR/I_s\omega_s$. (Verwaarloos termen met producten $\dot{\phi}\dot{\theta}$.)

- c) Geef de oplossingen voor $\phi(t)$ en $\theta(t)$ en interpreteer deze.

Hoofdstuk 11

Viervectoren

11.1 Lorentztransformatie

Een Lorentztransformatie beeldt de ruimte- en tijdcoördinaten \vec{x} en t af op nieuwe coördinaten \vec{x}' en t' die gerelateerd zijn aan de oude coördinaten via een lineaire transformatie

$$\vec{x}'_{\parallel} = \gamma_v(\vec{x}_{\parallel} - \vec{v}t), \quad \vec{v}'_{\perp} = \vec{x}_{\perp}, \quad t' = \gamma_v \left(t - \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{c^2} \right), \quad (11.1)$$

waarbij de coördinaten gesplitst zijn evenwijdig een loodrecht op de snelheidsvector. Er geldt $\vec{x}_{\parallel} = (\vec{x} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v}/v^2$ en $\vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{\parallel}$.

a) Laat zien dat de grootheid

$$\vec{x}^2 - c^2 t^2 \quad (11.2)$$

invariant is onder deze transformatie.

11.2 De 4-componentennotatie

We herhalen hier de definities en conventies van deze notatie en maken aan de hand van een aantal opgaven duidelijk hoe hiermee gewerkt kan worden.

we voegen nu de ruimte en tijdcoördinaten \vec{x} en t samen in een (kontravariante) kolomvector met 4 componenten

$$x^{\mu} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix} \quad (11.3)$$

waarbij de bovenindex μ vier waarden, 0, 1, 2 en 3, kan aannemen. De 4-dimensionale vectorruimte die we op deze manier krijgen heet de Minkowski-ruimte. In de 4-componentennotatie wordt onderscheid gemaakt tussen boven- en onderindices. Namelijk, de (covariante) notatie x_{μ} met een onderindex wordt gebruikt voor een rijvector

$$x_{\mu} = (-ct, \vec{x}). \quad (11.4)$$

De ruimtelijke componenten van x^{μ} en x_{μ} zijn dus gelijk, d.w.z. $x^i = x_i$ voor $i = 1, 2, 3$ en dit verklaart waarom we dezelfde notatie \vec{x} gebruiken. Maar we zien dat bij het omhoog en omlaag

galen van de index het teken van de 0-component omdraait: $x^0 = -x_0$. We kunnen dit samenvatten in de vergelijking

$$x_\mu \equiv \sum_\nu \eta_{\mu\nu} x^\nu := \eta_{\mu\nu} x^\nu, \quad (11.5)$$

waarbij $\eta_{\mu\nu}$ een element is van de diagonaalmatrix $\text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ (metrische tensor of Minkowski-metrik), alle niet-diagonale elementen zijn gelijk aan 0. Om de notatie te vereenvoudigen hebben we de Einstein-sommatieconventie ingevoerd. Volgens deze conventie moet er gesommeerd worden over indices die herhaald worden. Een herhaalde index, ook wel gecontraheerde index genoemd, komt altijd tweemaal voor; eenmaal als onderindex en eenmaal als bovenindex. Een index die slechts eenmaal voorkomt wordt een vrije index genoemd. Aan de linker end rechterkant van een vergelijking moeten altijd dezelfde vrije indices voorkomen. Bijvoorbeeld in de bovenstaande vergelijking is μ de vrije index, en omdat deze vier waarden aanneemt staan er dus eigenlijk vier vergelijkingen.

Onderindexen kunnen naar boven gehaald worden door de inverse $\eta^{\mu\nu}$ van $\eta_{\mu\nu}$,

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu, \text{ met } \eta^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} = \delta^\mu_\nu, \quad (11.6)$$

waar δ^μ_ν het Kronecker delta-symbool is, als 4×4 matrix is dit de eenheidsmatrix. Let goed op de positie van de indices in de matrices, voor de duidelijkheid is het raadzaam de kolomindex van een matrix duidelijk als tweede index te positioneren. Bij de 4-componenten notatie is het in principe niet belangrijk in welke volgorde de verschillende symbolen worden geschreven, maar om de notatie enigszins leesbaar te maken is het aan te raden om herhaalde indices zo dicht mogelijk bij elkaar te schrijven, indien mogelijk naast elkaar!

a) Schrijf $\eta^{\mu\nu}$ als een 4×4 matrix. Leid vgl. 11.5 af uit vlg. 11.6.

De norm van de 4-vector x^μ is gedefinieerd als

$$x^2 := x_\mu x^\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu x^\mu = \vec{x}^2 - c^2 t^2. \quad (11.7)$$

We hebben al gezien dat x^2 invariant is onder de Lorentztransformatie. Omdat dit een lineaire transformatie is kunnen we het in 4-componenten notatie schrijven in de vorm

$$(x')^\mu = L^\mu_\nu x^\nu \quad (11.8)$$

Hierbij geeft L^μ_ν de 4×4 matrix aan, waarbij de eerste index de rij en de tweede index de kolom aanduidt. De sommatie over ν , gempliceerd door de sommatieconventie, komt precies overeen met de gebruikelijke regel voor vermenigvuldiging van een matrix met een kolomvector.

b) laat zien dat uit het feit dat x^2 Lorentzinvariant is dit ook moet gelden voor het in-product

$$x \cdot y = x_\mu y^\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu y^\mu = \vec{x} \cdot \vec{y} - x^0 y^0. \quad (11.9)$$

(Hint: gebruik $2xy = (x + y)^2 - x^2 - y^2$)

c) Leid uit de invariantie van het in-product $x \cdot y$ en 11.8 (voor y') af dat de transformatieregel voor een 4-vector met onderindex gegeven wordt door

$$(x')_\mu = x_\nu (L^{-1})^\nu_\mu \text{ waarbij } (L^{-1})^\nu_\mu (L)^\mu_\lambda = \delta^\nu_\lambda \quad (11.10)$$

d) Laat zien dat uit de invariantie van het in-product ook volgt:

$$\eta_{\rho\sigma} L^\rho{}_\nu L^\sigma{}_\nu = \eta_{\mu\nu} \quad (11.11)$$

e) Laat zien dat $\eta_{\rho\sigma} L^\rho{}_\nu \eta^{\nu\lambda} = (L^{-1})^\lambda{}_\sigma$ of in matrixvorm $L^{-1} = \eta L^T \eta$. Hoe vinden we op eenvoudige wijze de inverse Lorentztransformatie L^{-1} ?

11.3 Invariante Massa

Antiprotonen (\bar{P}) kunnen in versnellers geproduceerd worden door de reactie:

$$P_a + P_b \rightarrow P_c + P_d + P_e + \bar{P}_f$$

Hierbij botst een proton met kinetische energie T tegen een stilstaand proton in een trefplaatje. Voor de massa van zowel het proton als het antiproton geldt $m_P = 1 \text{ GeV}/c^2$.

- Geef de vier-impulsvectoren van de twee protonen voor de botsing in termen van de gegeven grootheden. Welke behoudswet geldt er?
- Bereken de invariante massa van het systeem voor de botsing.
- Hoeveel energie is minimaal nodig om deze reactie mogelijk te maken? (Hint: ga na wat de conditie is voor minimale energie in het coördinatenstelsel dat met het massamiddelpunt mee beweegt.)
- Bereken de energie en de impuls van de reactie-producten in de genoemde drempelsituatie.

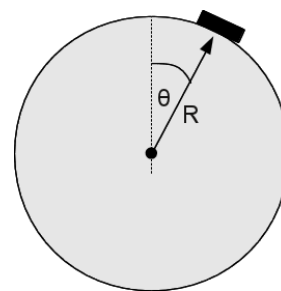
Bijlage A

Tentamenopgaven

A.1 Schijf op een bol

Een schijf met massa m balanceert bovenop een bol met straal R . De bol blijft bewegingsloos in dit probleem. De wrijvingskracht tussen de schijf en de bol is $F_w = \gamma F_N$, waarbij γ een positive constante is en F_N de normaalkracht is die de bol op de schijf uitoefent. De richting van de wrijvingskracht is tegengesteld aan de beweging van de schijf.

De schijf wordt langzaam vanaf de bovenkant van de bol geduwd, totdat de schijf vanzelf naar beneden glijdt onder de invloed van de zwaartekracht. [totaal: 10pt]

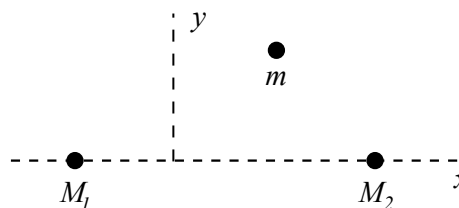


- Definieer en bereken alle krachten die op de schijf werken als de hoek vanaf de top van de bol θ is en de snelheid v . [3 pt]
- Bereken de minimale hoek θ_0 waarbij de schijf begint te glijden onder z'n eigen gewicht. Wat geldt voor de maximale hoek θ_1 waarbij de schijf van de bol afvliegt? Beschrijf ook in woorden wat de fysische condities zijn waardoor deze hoeken bepaald worden. [2 pt]
- Gebruik de wet van behoud van energie om een differentiaalvergelijking op te stellen waaraan de snelheid v van de schijf als functie van de hoek $\theta \leq \theta_1$ voldoet. Het is niet nodig de vergelijking op te lossen. [3 pt]
- Laat zien dat in de limiet $\gamma \rightarrow 0$ de vergelijking $v(h)^2 = 2g(R - h)$ voor een schijf en bol zonder wrijving een oplossing van de in (c) gevonden differentiaalvergelijking is. [2 pt]

A.2 Lagrange-punten

Beschouw een systeem van twee hemellichamen met massa's M_1 en M_2 die om een gezamenlijk massamiddelpunt heen bewegen onder invloed van de zwaartekracht. We beschouwen nu een derde 'testmassa' $m \ll M_1, M_2$ en verwaarlozen de invloed die deze massa heeft op de beweging van de twee hemellichamen.

We beschouwen dit systeem in een meedraaiend stelsel, waarin M_1 en M_2 op de horizontale x -as liggen.



De relatie tussen omwentelingssnelheid Ω van lichamen 1 en 2 in het massamiddelpuntssysteem en de afstand R tussen de lichamen volgt de derde wet van Kepler: $\Omega^2 R^3 = G(M_1 + M_2)$. [totaal: 20 pt]

- (a) Specificeer alle krachten en schijnkrachten die testmassa (m) ondervindt en maak een schets waarin de richtingen van deze krachten zijn aangegeven. [4 pt]
- (b) De zgn. Lagrangepunten zijn stationaire punten, waarvoor geldt dat de totale kracht \vec{F} op de testmassa gelijk is aan nul als de snelheid van de testmassa $\vec{v} = 0$ in het meedraaiende systeem. Geef de componenten van \vec{F} voor dit geval ($v = 0$) als functie van de positie (x en y) ten opzichte van het massamiddelpunt. [5 pt]

De eerste drie Lagrangepunten liggen op de x -as ($y = 0$). We gaan nu op zoek naar Lagrangepunten 4 en 5, met $y \neq 0$.

- (c) Ontbind de kracht op de testmassa (van vraag (b)) in de componenten loodrecht op en parallel aan de eenheidsvector \hat{r} in de richting van de lijn die de positie van testmassa ten opzichte van het massamiddelpunt van M_1 en M_2 aangeeft. Laat zien dat de krachtcomponent loodrecht op \hat{r}

$$F_{\perp} = m\alpha\beta y\Omega^2 R^4 \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(\frac{1}{((x - R\beta)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{((x + R\alpha)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right),$$

met $\alpha = M_2/(M_1 + M_2)$ en $\beta = M_1/(M_1 + M_2)$. Wat betekent dit voor de positie van de Lagrangepunten? [4 pt]

- (d) Geef nu F_{\parallel} en geef de positie van L_4 en L_5 . [5 pt]

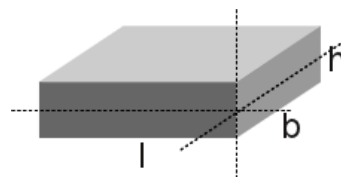
De Lagrangepunten liggen over het algemeen op een zadelpunt van de zwaartekrachtspotentiala. Hierdoor is er geen stabiel evenwicht in de punten: als de massa m zich begint te verplaatsen vanaf het Lagrangepunt, neemt de kracht toe en verwijderd de massa zich alsmaar verder.

- (e) Lagrangepunten 4 en 5 zijn toch stabiel. Welke van de in onderdeel (a) genoemde krachten denk je dat er hier kan werken als de 'restoring force'? [2 pt]

A.3 Tuimelend Blok

We beschouwen de rotatiebeweging van een rechthoekig blok met massa M met homogene massaverdeling (dichtheid ρ) en met afmetingen $h < b < l$ (zie figuur A.1). [totaal: 25 pt]

- (a) Bereken het traagheidsmoment I van dit blok ten opzichte van een as loodrecht op het lb -vlak, langs een van de randen van het blok. Reken, voor de keuze van twee andere assen, zoals in de tekening aangegeven, de drie traagheidsproducten (let op: *niet* de momenten!) uit. [4 pt]
- (b) Rondom welke van de aangegeven assen kan het blok alleen draaien als er een krachtmoment wordt uitgeoefend (dus niet vrij roteren)? [3 pt]



Figuur A.1: Rechthoekig blok met homogene massaverdeling.

We concentreren ons nu op vrije rotaties van het blok (geen krachtmomenten), die we beschrijven met behulp van de hoofdtraagheidsmomenten $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

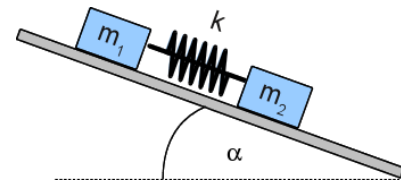
- (c) Door welke oorsprong gaan de assen met het kleinste traagheidsmoment? In welke richtingen ten opzichte van het blok staan de drie hoofdassen? [2 pt]
- (d) Stel de Eulervergelijkingen op. [3 pt]

Voor een symmetrisch object met $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ hebben we gezien dat de rotatievector $\vec{\omega}$ beschreven kan worden als een constante component ω_3 langs de lichaamsas (richting \hat{e}_3) en een component met constante grootte, loodrecht op de lichaamsas, die met een vaste hoeksnelheid om de lichaamsas draait. Voor het blok, met $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, testen we nu of we vergelijkbaar gedrag mogen verwachten. Hiertoe gaan we uit van een rotatievector die vrijwel precies langs een van de 3 hoofdassen ligt, en beschouwen het effect van een kleine component loodrecht op de hoofdas.

- (e) Ga uit van een rotatie vrijwel precies rond richting \hat{e}_3 , zodat $\omega_3 \gg \omega_2, \omega_1$. Neem aan dat ω_3 constant is. Gebruik deze informatie om de Eulervergelijkingen voor $\dot{\omega}_1$ en $\dot{\omega}_2$ te vereenvoudigen, en los deze twee vergelijkingen op. [5 pt]
- (Tip: gebruik voor deze componenten als probeeroplossing $\omega_{1,2}(t) = Ae^{kt}$ en houd bij de oplossing rekening met $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$).
- (f) Doe hetzelfde als bij (e) voor de twee rotaties vrijwel precies rond richting \hat{e}_1 en vrijwel precies rond richting \hat{e}_2 . [5 pt]
- (g) Bespreek de bij (e) en (f) gevonden antwoorden in termen van stabiele en instabiele rotaties. [3 pt]

A.4 Veer op een helling

Twee blokken met ongelijke massa's m_1 en m_2 liggen op een hellend vlak met hellingshoek α (zie figuur A.2). De blokken zijn onderling verbonden door een ideale veer met veerconstante k . De blokken glijden wrijvingsloos over het vlak. Blokken en veer bevinden zich in het vlak van de tekening en ook hun bewegingen vinden uitsluitend in dit vlak plaats. [Totaal: 15 pt]

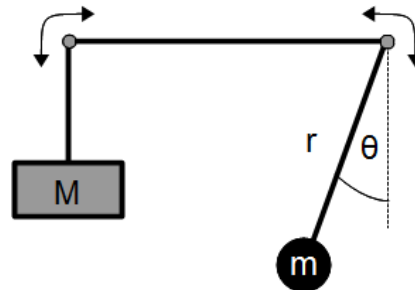


Figuur A.2: Twee blokken met ongelijke massa's op een helling.

- (a) Schrijf de Lagrangiaan voor dit systeem in termen van de Cartesische coördinaten x_1, y_1 en x_2, y_2 voor de posities van het linker (m_1) en rechter (m_2) blok. Kies daarbij de x -as langs de helling en de y -as loodrecht op de helling omhoog. Houd hierbij nog geen rekening met de beperking dat de blokken op de helling blijven. [4 pt]
- (b) Geef de twee constraint-vergelijkingen op voor de beweging van de twee blokken. [2 pt]
- (c) Gebruik het Euler-Lagrangeformalisme met de Lagrange-multiplier techniek om de bewegingsvergelijkingen (differentiële vorm) op te stellen. [3 pt]
- (d) Wat is de kracht die ervoor zorgt dat de blokjes op de helling blijven? Reken de grootte van de kracht uit met behulp van de Lagrange-multiplier. [2 pt]
- (e) Welke lineaire combinaties van de bewegingsvergelijkingen in onderdeel (c) zijn handig voor het oplossen? Maak hiervan gebruik en geef de algemene oplossing. [4 pt]

A.5 Slinger van Atwood

Figuur A.3 toont een slinger van Atwood. Twee massa's zijn met elkaar verbonden door een massaloos touw van vaste lengte dat wrijvingsloos over twee ophangpunten kan glijden. De eerste massa M kan alleen verticaal bewegen, terwijl de tweede massa m zowel verticaal als horizontaal kan bewegen. [totaal: 15 pt]



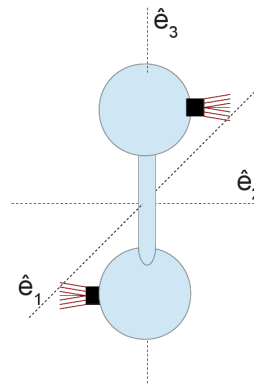
Figuur A.3: Slinger van Atwood

- Geef de potentiële energie U en de kinetische energie K van het systeem. [3 pt]
- Bereken de gegeneraliseerde impulsen p_θ en p_r . [2 pt]
- Gebruik de gegeneraliseerde impulsen van onderdeel (b) om de snelheden $\dot{\theta}$ en \dot{r} uit te drukken als functie van de gegeneraliseerde impulsen; gebruik die uitdrukkingen om de Hamiltoniaan $\mathcal{H}(r, \theta, p_r, p_\theta)$ op te schrijven. [4 pt]
- Gebruik Hamiltons formalisme om de bewegingsvergelijkingen voor r en θ op te stellen. Je hoeft de differentiaalvergelijkingen niet op te lossen. [4 pt]
- De bij onderdeel (d) opgestelde bewegingsvergelijkingen zijn in het algemeen niet oplosbaar. Geef aan waarom dat zo is. [2 pt]

A.6 Haltervormige Satelliet

Een satelliet is opgebouwd uit twee bolvormige gedeelten, die verbonden zijn door een cilindrische buis. De bollen hebben elk een straal R en een massa m , en de buis heeft een lengte l en een verwaarloosbaar kleine massa. Neem aan dat de massa van de bollen homogeen over hun volume is verdeeld. [totaal: 25 pt]

- Bereken de drie hoofdtraagheidsmomenten. Hierbij mogen de twee bollen *niet* als puntmassa's worden beschouwd! (Tip: als je het traagheidsmoment van een bol niet weet en niet kunt uitrekenen, laat het als onbekende I in de formule voor de λ_i 's staan!) [5 pt]
- Op het midden van elke bol bevindt zich een stuurruket waarmee een rotatie om as 1 kan worden bewerkstelligd. Stel dat $R = 10$ m, $l = 20$ m en $M = 1000$ kg. Stel verder dat de stuwkracht per raket $F = 25$ N bedraagt. Hoe lang moeten de twee raketten aanstaan om een kunstmatige zwaartekrachtsversnelling te genereren in het midden van de twee bollen van $\frac{1}{2}g$? [3 pt]
- Wat voor krachten voelt een astronaut als deze in de draaiende satelliet van de ene bol door de buis naar de andere bol beweegt? [2 pt]
- Gebruik de Eulervergelijkingen zonder koppel (zie formuleblad) om te analyseren wat er gebeurt met de rotatie als de stuurruketten niet alleen een draaiing rondom as 1 hebben veroorzaakt maar ook een lichte rotatie om as 3; m.a.w. geef de rotatiesnelheden $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ als functie van de tijd, uitgaande van $\omega_2 = 0$ en $\omega_3 \ll \omega_1$ op tijdstip $t = 0$. [5 pt]



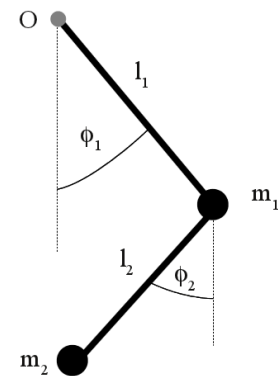
We brengen de satelliet in een cirkelbaan met straal r om een planeet met massa M_P en laten de satelliet precies zo rond zijn as 1 draaien, dat een van de twee bollen voortdurend in de richting van de planeet wijst.

- e) Gemiddeld heerst er nu binnen de satelliet gewichtsloosheid. Toch zijn er kleine variaties. Hoe groot is de daardoor optredende versnelling die in het midden van elk van de twee bollen te voelen is? (Tip: gebruik een Taylor expansie t/m de lineaire term) In welke richting staat deze versnelling in elke bol? Hoe noem je deze versnelling of de daarmee geassocieerde krachten? [6 pt]
- f) Wat voor beweging zal de satelliet maken ten gevolge van de bij e) beschouwde versnellingen als as 3 van de satelliet aanvankelijk niet precies naar de planeet gericht is? Reken deze beweging uit in de limiet van een kleine initiële afwijking θ_0 . [4 pt]

A.7 Dubbele slinger

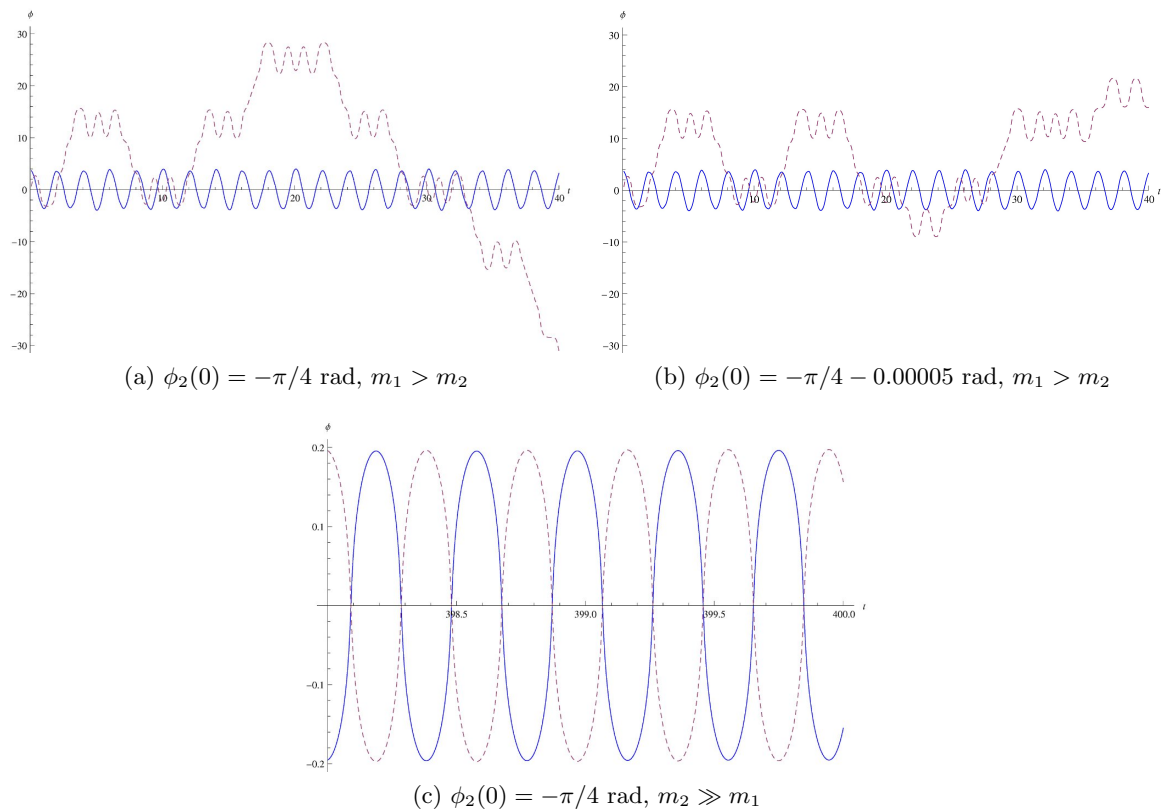
Een mathematische slinger met lengte l_1 en massa m_1 is bevestigd in punt O . Een tweede slinger met lengte l_2 en massa m_2 is bevestigd aan het eind van de eerste slinger. Alle verbindingen kunnen wrijvingsloos bewegen en kunnen massaloos verondersteld worden. [totaal: 15 pt]

- (a) Formuleer de Lagrangiaan $\mathcal{L}(\phi_1, \phi_2, \dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2, t)$ die bij dit systeem hoort. (Noot: De Lagrangiaan bevat een groot aantal termen. Het kan makkelijk zijn om eerst een algemenere uitdrukking op te schrijven en vervolgens de termen apart uit te schrijven) [4 pt]
- (b) Geef de bewegingsvergelijkingen voor ϕ_1 en ϕ_2 . [4 pt]



Gebruik vanaf nu de benadering $l_1 = l_2 = 1$.

- (c) Beschouw het geval dat $m_1 \gg m_2$. Beschrijf de beweging van ϕ_1 . [3 pt]
- (d) De dubbele slinger is een chaotisch systeem.
- Figuur A.4 toont de coördinaten ϕ_1 en ϕ_2 als functie van de tijd. Welke karakteristieke eigenschap van een chaotisch systeem (bijzonder ϕ_2) is zichtbaar in (a) en (b)? Bespreek de gevolgen van deze eigenschap. Welke grootte/variabele beschrijft deze eigenschap? Definieer de grootte en leg uit wat voor waarden je verwacht voor chaotisch gedrag. [2 pt]
 - Gezien de resultaten van punt (c) en figuur A.4(c), vind de ‘control parameter’ van een dubbele slinger met constante energie. Definieer ‘control parameter’ en leg uit welke waarden je verwacht voor niet-chaotisch en chaotisch gedrag. [2 pt]



Figuur A.4: ϕ_1 en ϕ_2 (onderbroken lijn) als functie van de tijd voor een dubbele slinger. De begintoestanden van (a) en (b) zijn gelijk, met uitzondering van $\phi_2(0)$.