Modellen en Simulatie

F.Beukers

Departement Wiskunde

2012

UU

Inhoudsopgave

1 Populatiegroei van één soort en recursies **5**

1.1 Inleiding 5
1.2 Recursies in één variabele, theorie 6
1.3 Logistische groei 13
1.4 Oefeningen 15

2 Lesliematrices en Markovketens **22**

2.1 Inleiding 22
2.2 Matrixrecursies, theorie 25
2.3 Stelling van Perron–Frobenius 27
2.4 Lesliematrices en Markovketens, theorie 28
2.5 Markovketens, voorbeelden 31
2.6 Oefeningen 35

3 Algemene recursies in $\mathbb{R}^m$ **48**

3.1 Parasiet-gastheer modellen 48
3.2 Stabiliteit 49
3.3 Hoefijzer van Smale 52
3.4 Oefeningen 55

4 Differentiaalvergelijkingen van orde 1, 2 **61**

4.1 Eerste orde differentiaalvergelijkingen 61
4.2 Lineaire d.v.'s met constante coëfficiënten 65
4.3 Harmonische oscillator, resonantie 66
4.4 Oefeningen 71

5 Stelsels differentiaalvergelijkingen **84**

5.1 Algemeen 84
5.2 Autonome stelsels in $\mathbb{R}^2$, het lineaire geval 85
5.3 Autonome stelsels in $\mathbb{R}^2$, het algemene geval 89
5.4 Niet-autonome stelsels, stelsels in $\mathbb{R}^3$ 98
5.5 Verband met recursies, numerieke oplossing 100
5.6 Oefeningen 102

6 Lineaire programmering **111**

6.1 Inleiding, voorbeeld 111
6.2 Lineaire ongelijkheden 113
6.3 De simplexmethode 117
6.4 Het algemene lineaire programmeringsprobleem 121
6.5 Oefeningen 123

7 Matrixspellen **130**
7.1 Een voorbeeld 130
7.2 Theorie 131
7.3 Oefeningen 135

8 Simulated Annealing **138**
8.1 Het handelsreizigersprobleem 138
8.2 Het grootschalige integratieprobleem 138
8.3 Een analogie 138
8.4 Het algoritme 140
8.5 Het geval van grootschalige integratie 141
8.6 Oefeningen 141

9 Wachtrijen **143**
9.1 Inleiding 143
9.2 Poissonprocessen 144
9.3 Aankomst van klanten, serviceverlening 146
9.4 Een model met deterministische service 147
9.5 Een model met probabilistische service 147
9.6 Geboorte-sterfteprocessen 150
9.7 Oefeningen 152

Voorwoord

Het voor je liggende dictaat is een eerste introductie tot modelvorming, het probleem om in wiskundige taal een beschrijving te geven van verschijnselen die we rond ons waarnemen. Het doel hiervan is enerzijds wetenschappelijk, we proberen een beter begrip te krijgen van alles wat om ons heen gebeurt. Een tweede, maar niet minder belangrijk doel is gebruikersgericht. Met de opgedane kennis van een proces kunnen we trachten dit proces te sturen, het liefst in ons voordeel.
Schematisch bestaat het proces *modelvorming* uit de volgende stappen

i) Het herkennen van de relevante grootheden in een proces en hiervoor algemeen geldende regels opstellen. Dit stelsel van regels noemen we een *model*.

ii) De regels in mathematische vorm formuleren. Er ontstaat dan een wiskundig probleem.

iii) Het wiskundige probleem oplossen

iv) De gevonden resultaten toetsen aan de werkelijkheid. Dit houdt in dat de in iii) gevonden oplossing naar het proces wordt 'terugvertaald'.

Mochten de gevonden resultaten niet overeenkomen met de werkelijkheid, dan is er iets mis met ons model en moeten we wat nieuws bedenken. Een eventuele vijfde stap die strikt genomen niet tot de modelvorming hoort maar vaak wel erg belangrijk is,

v) Vindt methoden om het proces optimaal te sturen, of om er optimaal gebruik van te maken.

Het voorbeeld bij uitstek, waarin deze stappen goed te herkennen zijn, is de mechanica van Newton. Lange tijd heeft modelvorming zich zo'n beetje afgespeeld op het gebied van de exacte wetenschappen, natuurkunde, sterrenkunde en ook chemie. In de 20e eeuw heeft men echter tal van andere mogelijkheden tot modelvorming herkend. De moeilijkheidsgraad van de diverse stappen ligt in deze gevallen totaal anders dan bij de mechanica, maar niettemin zijn ze allen aanwezig. Zo is er de theoretische biologie bijgekomen waarin modellen voor populatiegroei, evolutie en biochemische processen bestudeerd worden. Een ander bekend voorbeeld is dat van de Operations Research, een gebied dat pas na 1945 tot ontwikkeling kwam door de noodzaak om het gedrag van grote organisaties te beschrijven en te sturen. Tegenwoordig is dit vak niet meer weg te denken bij besluiten over efficiëntie van grote bedrijven en instellingen. Een belangrijk probleem bij veel van deze nieuwe modellen is de toetsing. Veelal gaat het om systemen die niet in laboratorium omstandigheden bestudeerd kunnen worden. Ze kunnen alleen maar in hun 'natuurlijke omgeving' geobserveerd worden. Nadeel is dat ze ook vaak in wisselwerking staan met die omgeving (open systemen). In dergelijke gevallen kunnen oorzaken van buitenaf een verstorende rol spelen. Bij het aflezen van meetwaarden en voorspellingen op grond van een model moet hier terdege rekening mee worden gehouden.
In dit dictaat proberen we aan de hand van diverse onderwerpen de bovengenoemde stappen weer te geven. Daarbij heb ik me vooral bij de wiskundige achtergronden (stap

iii)) en de sturing (stap v)) regelmatig moeten inhouden. Enerzijds omdat we ons in dit dictaat toch op modelvorming willen richten anderzijds omdat ik 3e en 4e jaars colleges niet te veel in de wielen wil rijden. Toch is in een aantal gevallen de minimaal benodigde wiskunde achtergrond bij eerstejaars studenten nog niet aanwezig en moet samen met het model behandeld worden. Ook zul je merken dat de stijl heel anders is dan de gebruikelijk wiskunde lectuur. Stellingen worden hier vaak niet bewezen, of het bewijs wordt alleen maar geschetst. De reden hiervoor is, dat we ons in deze cursus opstellen als gebruikers van de wiskunde en niet als de mensen die dit allemaal moeten bedenken. Dit neemt geenszins weg dat de bewijzen van deze stelling uiterst boeiend kunnen zijn, maar wij hebben er eenvoudig de tijd niet voor hierop in te gaan.
Tenslotte nog een woord over de Computer. We zullen deze gebruiken als instrument bij de stappen iii) en iv). Zoals gezegd kunnen modellen aanleiding geven tot wiskundige problemen die niet expliciet op te lossen zijn, zodat ook de toetsing niet kan plaatsvinden. Wat vaak wel mogelijk is, is om de computer een simulatie laten uitvoeren op grond van het wiskundig model. Dit levert enerzijds een indruk van de voorspellingen die het model doet, maar als bonus leren we ook nog wat interessante dingen over ons wiskunde probleem. In een aantal gevallen vinden we zelfs zeer verrassende verschijnselen die we zonder computer nooit gezien zouden hebben. Met het pakket Mathematica hebben we een calculator tot onze beschikking die gemakkelijk eigenwaarden en -vectoren van 10 bij 10 matrices uitrekent zonder bang te zijn voor rekenfouten. Hopelijk leer je in de loop van het practicum de computer waarderen als nuttig instrument bij het bedrijven van wiskunde.

F. Beukers

Naschrift

Uit het bovenstaande mag duidelijk zijn wat oorspronkelijk de bedoeling was. In de loop der tijd is echter gebleken dat het een beetje vroeg is om nu meteen serieus te leren modelleren. We zullen wel degelijk naar modellen kijken, maar die zul je zelden *zelf* op verantwoorde wijze vanuit een situatie in de buitenwereld ontwikkelen. Het modelleren zal er dus bekaaid af komen, de modellen zelf proberen we toch serieus te nemen. (Oké, deze combinatie kan niet echt, maar we doen een poging.) Wat het gebruik van de computer betreft, ook hier zullen we ons neerleggen bij half werk. Zelf programmeren leer je bij dit vak onvoldoende. We zijn vaak al tevreden met een begrip van de methode en een door wiskunde gesteunde interpretatie van output. Door al deze compromissen hopen we ruimte te hebben gemaakt voor een interessante collectie voorbeelden van gebruik van wiskunde, die ook kan helpen bij verdere studie-keuzes. Duidelijk wordt hopelijk ook dat er buiten de definitie-stelling-bewijs methode nog meer manieren zijn om zinvol met wiskunde bezig te zijn.

W. van der Kallen

1 Populatiegroei van één soort en recursies

1.1 Inleiding

In deze paragraaf bestuderen we recursies of iteraties in één dimensie die ten grondslag liggen aan modellen voor de groei van populaties bestaande uit één soort. We kunnen hierbij denken aan menselijke populaties of andere dieren, maar ook aan bacteriën of zelfs radioactieve atomen die vervallen. De laatste twee voorbeelden zijn natuurlijk eenvoudiger onder laboratorium omstandigheden te bestuderen. Neem als voorbeeld een populatie bacterieën waarvan we het aantal om de minuut, of een ander vast tijdvak, tellen. Zij N_n het aantal bacterieën aan het begin van het n-de tijdvak. We beginnen bij tijdvak 0. De volgende eenvoudige aannamen leveren al gauw een model: *per tijdvak sterft een fractie s van de populatie en komt er door celdeling een fractie g bij.* Het verband tussen N_{n+1} en N_n wordt dus gegeven door $N_{n+1} = N_n - sN_n + gN_n$, ofwel

$$N_{n+1} = \kappa N_n, \tag{1}$$

waarin we $\kappa = 1 - s + g$ de *groeifactor* van de populatie noemen. Stel $N_0 > 0$, m.a.w. er zijn in het begin bacterieën aanwezig. Als $s > g$ (sterfte groter dan 'geboorte') dan is $\kappa < 1$ en $N_n \to 0$ als $n \to \infty$, de populatie sterft uit. Is daarentegen $s < g$, dan is $\kappa > 1$ en $N_n \to \infty$ als $n \to \infty$. We hebben dan te maken met de exponentiële groei $N_n = \kappa^n N_0$, ook wel Malthus' groei genoemd. De recursie (1) staat bekend als het *Malthus model*.

Thomas Robert Malthus (1766-1834) was een Engelse dominee die een aantal politiek economische geschriften publiceerde waarvan '*Essay on the principle of population*' (1798) de bekendste en controversieelste was. Hierin betoogde Malthus dat de bevolking van Engeland exponentieel toenam terwijl de voedselproductie dat slechts lineair deed. Het verschil tussen voedselbehoefte en -aanbod zou daardoor in zeer korte tijd dramatische vormen kunnen aannemen, tenzij er ingrijpende maatregelen als geboortebeperking genomen zouden worden. Dit laatste zorgde voor de controverses over de inhoud van het boek. Vast staat dat het boek invloed heeft gehad op het denken van veel mensen, waaronder Darwin en Wallace, de grondleggers van de evolutietheorie. De grote verdienste van Malthus is dat hij als één van de eersten heeft gewezen op het belang van demografische modellen bij het nemen van politieke beslissingen.

Iedereen die wel eens een exponentiële functie heeft bekeken weet dat exponentiële groei in feite betekent, explosieve groei. Darwin zag dit als een belangrijk mechanisme bij de natuurlijke selectie, beter aangepaste diersoorten vermenigvuldigen zich met een hogere groeifactor dan de minder aangepaste, krijgen dus na relatief korte tijd de overhand en verdringen zelfs de minder aangepasten. Het zal echter duidelijk zijn dat exponentiële groei zich niet over al te lange perioden kan uitstrekken, de sterke aanwas zal allerlei tegeneffecten in het leven roepen die de groeifactor verkleinen en de populatiegroei zelfs tot stilstand kunnen brengen. Voorbeelden van dergelijke tegeneffecten bij de bacterie populatie kunnen zijn, de hoeveelheid voedsel per bacterie neemt af, giftige stofwisselingsprodukten werken remmend op de groei, de diertjes ontmoeten elkaar vaker waarbij de één de ander opeet, etc. In menselijke populaties kunnen we dergelijke verschijnselen soms ook waarnemen. Wat de aard van de tegeneffecten ook moge zijn,

het is erg eenvoudig om in het wiskundige model zo'n tegeneffect in te bouwen. Een voorbeeld,

$$N_{n+1} = \kappa \left(1 - \frac{N_n}{N}\right) N_n. \tag{2}$$

Dit staat bekend als het model van Verhulst. Merk op dat de groeifactor nu niet κ is maar $\kappa(1 - N_n/N)$, m.a.w. als N_n groter wordt, neemt de groeifactor af. Een dergelijk groeigedrag noemen we ook wel *logistische groei*. Het getal N noemen we de *draagcapaciteit* van het model, het is het maximale aantal mogelijke individuen in onze populatie.
Pierre-François Verhulst (1804-1849) was een hoogleraar uit Brussel die dit model bestudeerde als verfijning van de ideeën van Malthus. Eén van zijn conclusies was dat de bevolking van België niet veel groter kon worden dan 9400000 zielen. In 1967 bedroeg dit aantal 9570000 (?!).
Het model van Verhulst kunnen we vereenvoudigen door aan beide zijden door N te delen en $x_n = N_n/N$ te stellen. We krijgen dan de recursie $x_{n+1} = \kappa(1-x_n)x_n$ welke we in een aparte paragraaf bestuderen. Het blijkt dat we voor $\kappa > 3$ met vreemde effecten te maken krijgen. In veel praktische gevallen zal κ echter ruim onder de 3 liggen.
Een andere manier om de groeifactor af te remmen wordt in het model van Ricker (visserijbioloog) gegeven,

$$N_{n+1} = \kappa\, e^{-N_n/N}\, N_n \tag{3}$$

In het algemeen is het moeilijk om in de natuur voorbeelden te vinden waar modellen als die van Verhulst en Ricker op van toepassing zijn. Op de achtergrond zijn ze misschien aanwezig, maar allerlei variabele storingen zoals seizoens- of weerinvloeden of populaties concurrerende organismen kunnen dit beeld verstoren. En 'last but not least', aantallen van populaties kunnen niet altijd even precies bepaald worden (vergelijk de populatie haringen in de Noordzee). Er zijn gunstige uitzonderingen, zoals de zaailing (*Erophila verna*), een éénjarig plantje dat algemeen in onze duinen voorkomt. Beschouw het aantal N_n plantjes op een vast oppervlak. Door oorzaken die niet geheel bekend zijn, hangt het aantal jaarlijks geproduceerde zaden sterk van N_n af volgens een functie die lijkt op $\kappa\, e^{-N_n/N}\, N_n$ voor geschikte κ, N. Het model van Ricker is hier dus goed van toepassing.
Om het model van Ricker wiskundig te kunnen bestuderen delen we eerst aan beide zijden door N en stellen vervolgens $x_n = N_n/N$. We vinden

$$x_{n+1} = \kappa\, e^{-x_n}\, x_n.$$

We kunnen via de methoden uit de volgende paragraaf op zoek gaan naar dekpunten, stabiliteit, etc. In veel opzichten vertoont deze recursie in gedrag overeenkomsten met de recursie van Verhulst (periodieke banen, chaos, etc.). Deze laatste zullen we in een aparte paragraaf bespreken.

1.2 Recursies in één variabele, theorie

Gegeven een verzameling $V \subset \mathbb{R}$ en een functie $f : V \to V$. Beschouw een oneindige rij getallen $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ met $x_i \in V$ gegeven door

$$x_{n+1} = f(x_n) \text{ voor } n = 0,\ 1,\ 2, \ldots \tag{4}$$

Een relatie van de vorm (4) noemen we een *recursierelatie*, een rij $\{x_n\}$ die voldoet aan (4) noemen we een *recursieve rij*. Merk op dat een recursieve rij wordt vastgelegd door de keuze van x_0. De vraag is nu,

Hoe gedraagt x_n zich als $n \to \infty$?

We bekijken een tweetal eenvoudige voorbeelden.

Voorbeeld 1. Stel $V = \mathbb{R}$ en $f(x) = Ax$ met $A > 0$. De recursierelatie luidt dus $x_{n+1} = Ax_n$, $n \geq 0$ en de algemene oplossing is natuurlijk $x_n = A^n x_0$. Merk nu op,

$A < 1$, dan gaat $x_n = A^n x_0$ naar 0 als $n \to \infty$.

$A = 1$, dan geldt $x_n = x_0$ voor alle $n \geq 0$.

$A > 1$, dan gaat $x_n = A^n x_0$ naar ∞ als $x_0 > 0$ en naar $-\infty$ als $x_0 < 0$.

Voorbeeld 2. Stel $V = \mathbb{R}$ en $f(x) = Ax + B$ met $A > 0$. De recursierelatie luidt dus $x_{n+1} = Ax_n + B$, $n \geq 0$. De oplossing luidt

$$x_n = \begin{cases} A^n(x_0 - \frac{B}{1-A}) + \frac{B}{1-A} \text{ als } A \neq 1 \\ x_0 + nB \text{ als } A = 1 \end{cases}$$

hetgeen we gemakkelijk controleren door in de recursie in te vullen. Evenals in voorbeeld 1 zijn er, afhankelijk van A, diverse gedragingen te zien,

$A < 1$, dan $\lim_{n\to\infty} x_n = B/(1 - A)$.

$A > 1$, dan $|x_n| \to \infty$ als $n \to \infty$, tenzij $x_0 = B/(1 - A)$.

Nu kijken we naar algemenere functies f. Een punt $a \in V$ heet *dekpunt* van de recursierelatie $x_{n+1} = f(x_n)$ als $a = f(a)$. De constante rij $a, a, a, \ldots$ is een oplossing van onze recursierelatie. Een dekpunt a noemen we een *attractief* dekpunt, als er een omgeving U van a bestaat, zodat voor elke $b \in U \cap V$ geldt dat $\lim_{n\to\infty} f^n(b) = a$. Voor een begrip van stabiliteit willen we bovendien dat elke dichtbij beginnende recursieve rij ook dichtbij blijft. Het is de moeite waard om zelf eens te proberen hoe dat in wiskundige termen gevat kan worden, want de volgende definitie komt op het eerste gezicht vrij ingewikkeld over. Maar kan het werkelijk eenvoudiger?

Definitie 1.2.1 *Een dekpunt $a \in V$ van $f : V \longrightarrow V$ is stabiel in de zin van Liapunov, als voor elke omgeving U van a een omgeving W van a bestaat zodanig dat $f^n(W) \subseteq U$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, en stabiel als a bovendien attractief is. Een dekpunt is instabiel als het niet stabiel in de zin van Liapunov is.*

Deze reeks van definities houdt in dat er instabiele dekpunten bestaan die attractief zijn, zie oefening 7. Tenslotte noemen we een dekpunt *repulsief* als er een omgeving U van a bestaat, zó dat ieder punt $b \in U \cap V$, $b \neq a$ na een eindig aantal iteraties buiten U komt te liggen.

Een heel eenvoudig voorbeeld van (in)stabiel dekpunt vinden we in voorbeeld 2 als $A \neq 1$. De functie is in dat geval $f(x) = Ax + B$ en het punt $a = B/(1 - A)$ is het unieke dekpunt dat gevonden kan worden door oplossing van $a = f(a)$. Als $A < 1$ dan zagen we dat elke rij naar dit dekpunt convergeert. We hebben te maken met stabiliteit. Is daarentegen $A > 1$, dan divergeert x_n tenzij $x_0 = B/(1 - A)$. In dit geval hebben we te maken met een instabiel dekpunt.

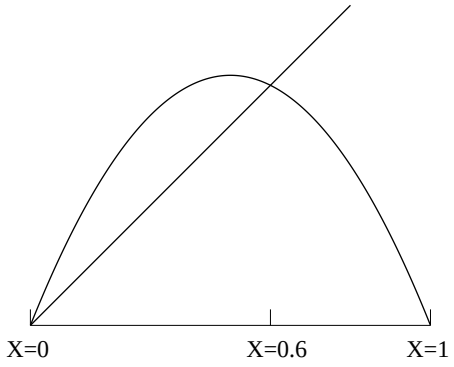
Stelling 1.2.2 *Zij $V \subset \mathbb{R}$ en $f : V \to V$. Stel a is een inwendig punt van V, $a = f(a)$ en stel f differentieerbaar in a. Als $|f'(a)| < 1$ dan is a een stabiel dekpunt. Als $|f'(a)| > 1$ dan is a een instabiel dekpunt.*

Bewijsschets. Voer de nieuwe variabele Δx in door $x = a+\Delta x$. Als Δx voldoende klein is, dan geldt $f(a+\Delta x) = f(a)+f'(a)\Delta x+$hogere orde termen in Δx. Stel $x_n = a+\Delta x_n$. We schrijven nu onze recursie om als recursie in Δx_n en verwaarlozen daarbij de hogere orde termen, $a + \Delta x_{n+1} = f(a + \Delta x_n) \approx f(a) + f'(a)\Delta x_n$. De termen a en $f(a)$ vallen tegen elkaar weg (want $f(a) = a$) en we houden over,

$$\Delta x_{n+1} \approx f'(a)\Delta x_n$$

waarbij de benadering goed is voor Δx_n voldoende klein. We zien nu dat als $|f'(a)| < 1$ en Δx_0 voldoende klein, de rij $\{\Delta x_n\}$ naar nul convergeert. Met andere woorden $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ voor alle x_0 voldoende dicht bij a, en dus is a stabiel. Als daarentegen $|f'(a)| > 1$ dan kan de rij $\{\Delta x_n\}$ nooit naar nul convergeren, en het dekpunt is nu instabiel. □

Als $|f'(a)| = 1$ kunnen we geen uitspraak doen, het gedrag hangt dan ook af van de hogere afgeleiden van f, indien ze bestaan.
Grafisch kunnen we dekpunten en hun aard illustreren door de grafiek van f te snijden met de rechte lijn $y = x$. De snijpunten geven de dekpunten aan en de helling van de grafiek van f in deze punten hun aard. In de volgende figuur is $f(x) = (5/2)x(1-x)$ en we hebben de dekpunten 0, 3/5. De eerste is instabiel, de tweede stabiel.



De grafiek maakt duidelijk dat niet alleen de functie f twee dekpunten heeft, maar dat elke functie g die een kleine storing van f is eveneens twee dekpunten heeft.

Stelling 1.2.3 *Zij $a \in V$ een dekpunt van de continu differentieerbare functie $f : V \longrightarrow V$ met $f'(a) \neq 1$. Stel dat $g : V \longrightarrow V$ eveneens continu differentieerbaar is en voor alle $x \in V$ voldoet aan*

$$|g(x) - f(x)| < \varepsilon \quad en \quad |g'(x) - f'(x)| < \varepsilon$$

met $\varepsilon < \frac{1}{2}|f'(a) - 1|$. Dan heeft g een dekpunt in b dichtbij a met $g'(b) \neq 1$.

Bewijsschets. We beschouwen alleen het geval $f'(a) > 1$, indien $f'(a) < 1$ kan men analoog argumenteren (oefening). De functie $F(x) = f(x) - x$ heeft afgeleide $F'(a) > 0$ en is daarom op een kleine omgeving van a strikt monotoon stijgend. Indien we die omgeving $U = [c, d]$ zo klein kiezen dat $F'(x) > \frac{1}{2}(f'(a) - 1)$ voor alle $x \in U$ dan is (vanwege de driehoeks-ongelijkheid) ook de functie $G(x) = g(x) - x$ op U strikt monotoon stijgend. Nu moeten we er nog voor zorgen dat $0 \in G(U) = [G(c), G(d)]$; het uniek (waarom?) punt $b \in U$ met $G(b) = 0$ is dan het gezochte dekpunt, $g(b) = b$, en $g'(b) = 1 + G'(b)$. Hiervoor kiezen we ε zo klein dat $G(c) = g(c) - c < f(c) + \varepsilon - c < 0$ en $G(d) = g(d) - d > f(d) - \varepsilon - d > 0$. □

We kunnen een recursieve rij analyseren door middel van een *iteratiediagram*. Dit verkrijgen we door, gegeven x_0, de volgende lijnen aan bovenstaand plaatje toe te voegen. Allereerst de lijn omhoog/omlaag van $(x_0, 0)$ naar $(x_0, f(x_0))$ op de grafiek van f; vervolgens de lijn opzij van $(x_0, f(x_0))$ naar $(f(x_0), f(x_0)) = (x_1, x_1)$ op de diagonaal; vervolgens de lijn omhoog/omlaag van (x_1, x_1) naar $(x_1, f(x_1))$ op de grafiek van f; vervolgens de lijn opzij van $(x_1, f(x_1))$ naar $(f(x_1), f(x_1)) = (x_2, x_2)$ op de diagonaal; etc.

Voorbeeld 3. In het volgende voorbeeld beschouwen we de recursie

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)$$

met $A > 0$ en kiezen $x_0 > 0$. Dan geldt: $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{A}$. We kunnen dit als volgt inzien. Allereerst geldt, omdat het minimum van $\frac{1}{2}(x + A/x)$ precies $\sqrt{A}$ is, dat $x_n \geq \sqrt{A}$ voor alle $n \geq 1$. Verder geldt voor elke $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \sqrt{A} &= \frac{1}{2}\left(x_n - 2\sqrt{A} + \frac{A}{x_n}\right) \\ &= \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{A})^2 = \frac{1}{2}\frac{x_n - \sqrt{A}}{x_n}(x_n - \sqrt{A}) \\ &\leq \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{A})\,. \end{aligned}$$

Dus, met volledige inductie, $0 \leq x_n - \sqrt{A} \leq (1/2)^{n-1}(x_1 - \sqrt{A})$. Gevolg, $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{A}$ en het punt $\sqrt{A}$ is een stabiel dekpunt van onze recursie.
De zojuist beschreven recursie levert ons tevens een methode om op razendsnelle wijze een wortel uit een getal te berekenen. Dit moge blijken uit het volgende numerieke voorbeeld waar we $A = 42$ nemen en als startwaarde $x_0 = 10$,

$$x_0 = 10.000000000000000000000000$$

$$x_1 = 7.1000000000000000000000000000$$
$$x_2 = 6.5077464788732394366197183 09$$
$$x_3 = 6.4807967325650690203334496 75$$
$$x_4 = 6.4807406986501010312615657 12$$
$$x_5 = 6.4807406984078602309704947 42$$
$$x_6 = 6.4807406984078602309659674 35$$
$$x_7 = 6.4807406984078602309659674 35$$

In 6 stappen krijgen we $\sqrt{42}$ tot 27 cijfers achter de komma nauwkeurig!

Bovenstaand voorbeeld was een schoolvoorbeeld van een recursie waarvan het langetermijngedrag volkomen voorspelbaar is, wat de keuze van A en x_0 ook is. In het volgende voorbeeld laten we zien dat de zaken op lange termijn ook wel eens onvoorspelbaar kunnen zijn.

Voorbeeld 4. Stel $V = [0, 1]$ en neem de recursie $x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n)$ met $0 < A \leq 4$. De studie hiervan stellen we even uit tot de volgende paragraaf, maar we geven wel een aantal numerieke resultaten. In de volgende tabel hebben we vier verschillende waarden van A gekozen en startwaarde $x_0 = 0.2$. Om een indruk te krijgen wat er in deze gevallen uiteindelijk met x_n gebeurt hebben we de waarden van x_{50} tot x_{60} uitgezet.

	$A = 2.5$	$A = 3.2$	$A = 3.7$	$A = 3.838$
x_{50}	0.6000	0.7995	0.3784	0.1505
x_{51}	0.6000	0.5130	0.8703	0.4907
x_{52}	0.6000	0.7995	0.4176	0.9592
x_{53}	0.6000	0.5130	0.8999	0.1503
x_{54}	0.6000	0.7995	0.3334	0.4902
x_{55}	0.6000	0.5130	0.8222	0.9591
x_{56}	0.6000	0.7995	0.5408	0.1504
x_{57}	0.6000	0.5130	0.9188	0.4905
x_{58}	0.6000	0.7995	0.2759	0.9592
x_{59}	0.6000	0.5130	0.7392	0.1504
x_{60}	0.6000	0.7995	0.7133	0.4903

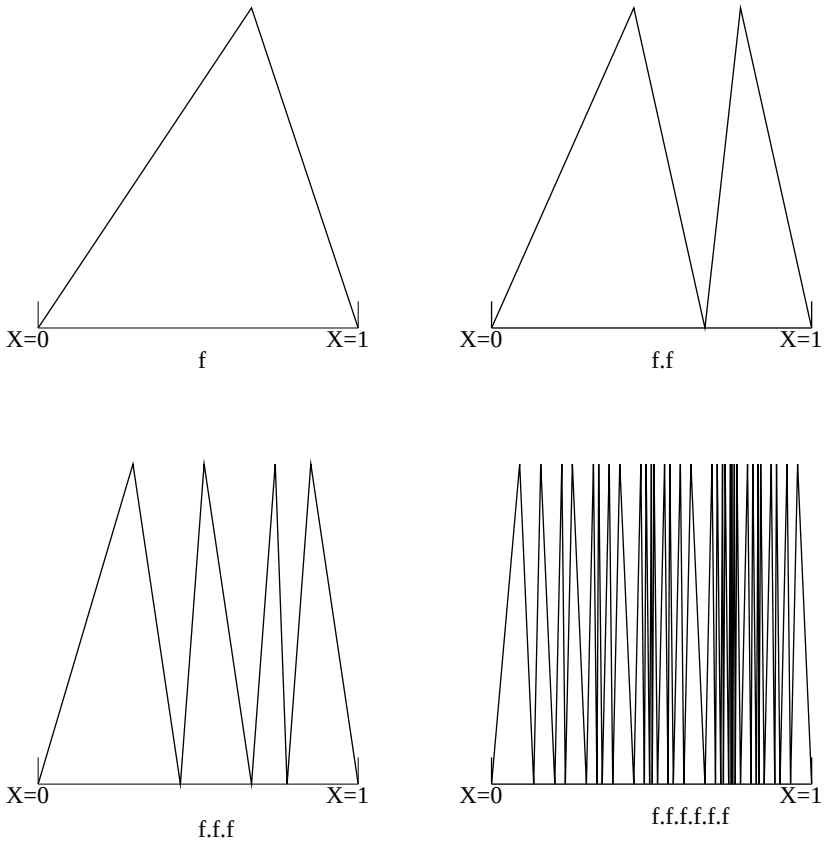
Als $A = 2.5$ dan zien we dat de rij naar het dekpunt 0.6 gaat. Als $A = 3.2$ dan springt de rij op den duur tussen twee waarden heen en weer. We zeggen dan dat we een (stabiele) *periodieke baan* van orde 2 hebben gevonden. In het geval $A = 3.7$ valt er geen regelmaat te ontdekken en in het geval $A = 3.838$ lijken we te maken hebben met een stabiele periodieke baan van orde 3. Het blijkt dat we bij praktisch iedere keuze van x_0 voor elk van deze A-waarden een zelfde soort gedrag zien. Hieruit blijkt dat bij verschillende waarden van A de rij zich zeer verschillend kan gedragen.

Het is pas sinds kort dat men zich bewust is geworden van het feit dat eenvoudige recursies met een simpele f aanleiding kunnen geven tot een hoogst onvoorspelbaar langetermijngedrag. Dit kunnen we al met een simpel voorbeeld illustreren.

Voorbeeld 5. Beschouw de functie

$$f(x) = \begin{cases} 3x/2, & \text{als } x \in [0, 2/3] \\ 3 - 3x, & \text{als } x \in [2/3, 1]. \end{cases}$$

De recursie $x(n+1) = f(x(n))$ zou model kunnen staan voor de geremde groei van een populatie organismen. Bekijk nu de grafieken van f en de geïtereerden $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$ en f^6,



Het is niet moeilijk om na te gaan dat $f^6(244/729) = 1$ en $f^6(\mathbf{240}/729) = 0$. Met andere woorden: een kleine verandering van de startwaarde $x(0)$ met $\mathbf{4}/729$ geeft al een dramatische verandering in de waarde van $x(6)$. Deze grote gevoeligheid van een systeem voor de startwaarden is een van de kenmerkende eigenschappen van *chaos* en komt in vele gedaanten in de natuur voor.

Een belangrijk hulpmiddel bij het bestuderen van complexere recursies is het zoeken naar periodieke banen. Een *periodieke baan* is een rij verschillende punten $a_1, a_2, \ldots, a_p$ zó dat $a_2 = f(a_1)$, $a_3 = f(a_2)$, $\ldots$, $a_p = f(a_{p-1})$, $a_1 = f(a_p)$. Het getal p heet de *periode* van de baan. Het is duidelijk dat elk van de punten a_i dekpunt is van de p-de geïtereerde functie $f^p = f \circ \cdots \circ f$ (p maal f toepassen). Een p-baan heet *stabiel* resp. *instabiel* als a_1 een stabiel respectievelijk instabiel punt is van f^p. Om stabiliteit van een p-baan te controleren kunnen we natuurlijk weer gebruik maken van Stelling 1.2.2. Voor

de berekening van de afgeleide $(f^p)'(a_1)$ kunnen we gebruik maken van de kettingregel die zegt dat

$$(f^p)'(a_1) = f'(a_1)f'(a_2)\cdots f'(a_p).$$

Ten slotte vermelden we nog een zeer frappante stelling.

Stelling 1.2.4 (Sarkovskii, 1964) *Als een continue afbeelding $f : [0,1] \to [0,1]$ een periodieke baan van orde 3 heeft, dan heeft f een periodieke baan van iedere andere periode.*

Deze stelling is het geval $p = 3$ van een algemener resultaat. Zij hiervoor $\prec$ de volgende lineaire ordening op $\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & 3 & \prec & 5 & \prec & 7 & \prec & \dots & & & & \\
\prec & & 2\cdot 3 & \prec & 2\cdot 5 & \prec & 2\cdot 7 & \prec & \dots & & & & \\
\prec & & 2^2\cdot 3 & \prec & 2^2\cdot 5 & \prec & 2^2\cdot 7 & \prec & \dots & & & & \\
\prec & & 2^3\cdot 3 & \prec & 2^3\cdot 5 & \prec & 2^3\cdot 7 & \prec & \dots & & & & \\
 & & & & \vdots & & & & & & & & \\
 & & \dots & \prec & 2^4 & \prec & 2^3 & \prec & 2^2 & \prec & 2 & \prec & 1
\end{array}$$

Als een continue afbeelding $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ een periodieke baan met periode p heeft en $p \prec q$, dan heeft f ook een periodieke baan met periode q.

Voorbeeld 6. Beschouw de functie $f : [0,1[\longrightarrow [0,1[$ gegeven door

$$f(x) \;:=\; 10x - \text{entier}(10x)$$

waar entier(y) het gehele gedeelte van y is, bv. entier$(\pi) = 3$. De grafiek van f bestaat uit tien rechte lijnen met helling 10 en kan dus nog gemakkelijk worden geschetst. Hieraan kan men aflezen dat f negen dekpunten heeft. Omdat f niet continu is kan men stelling 1.2.4 niet toepassen, maar de grafiek van f^n (die men al voor $n = 2$ niet meer zo gemakkelijk kan schetsen) maakt duidelijk dat er periodieke banen van willekeurige periode n zijn (zeker voor priemgetallen n, maar na enig nadenken ook voor andere periodes n) en dat zelfs in elke omgeving $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ van een gegeven punt x een punt $y \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ bestaat waarvoor de baan $y, f(y), f^2(y), \dots$ periodiek is.
Gebruikmakend van de decimale ontwikkeling van de beginwaarde $x = 0.x_1x_2x_3x_4\dots$ kunnen we $f(x) = x_1.x_2x_3x_4\dots - x_1$ gemakkelijk berekenen, i.h.b. worden de negen dekpunten gegeven door 0, $0.111\dots$, $0.222\dots$ t/m $0.888\dots$ en kunnen we een baan van bv. periode 7 construeren door een rijtje als 3985127 van zeven cijfers te herhalen: $y = 0.39851273985127\dots = \frac{3985127}{9999999}$ is de beginwaarde voor een periodieke baan van periode 7.
Dit model(!) voor de dynamica van f maakt bovendien duidelijk dat er sprake is van gevoelige afhankelijkheid van de beginwaarde. Immers, twee getallen die dicht bij elkaar liggen hebben de eerste tien (of honderd, of honderd miljard) cijfers gelijk, maar na tien (of honderd, of honderd miljard) keer toepassen van f is deze overeenkomst verdwenen en liggen de punten 'ver' uit elkaar.

Tenslotte kan men als volgt een dichte baan construeren, d.w.z. een baan die willekeurig dicht bij elk punt in $[0,1[$ komt. Twee punten $x, y \in [0,1[$ liggen dichter dan $\varepsilon = 10^{-n}$ bij elkaar als de eerste n cijfers in de decimale ontwikkelijngen van x en y overeenstemmen. Als we ervoor zorgen dat de eerste n cijfers van de decimale ontwikkeling ergens in de decimale ontwikkeling van z voorkomen, bv. tussen de $(k+1)$de en de $(k+n)$de plaats, dan stemmen de eerste n cijfers van x en van $f^k(z)$ overeen. Om dit voor elke $x \in [0,1[$ (en elke n) voor elkaar te krijgen hoeven we alleen maar ervoor te zorgen dat de decimale ontwikkeling van z alle mogelijke combinaties van n cijfers bevat (en dit voor elke n). Dus definiëren we (de decimale ontwikkeling van) z door alle mogelijkheden aan elkaar te plakken, beginnend met alle combinaties van lengte $n = 1$, dan lengte $n = 2$, enz. Dit leidt tot

$$z = 0.01234567890001020304050607080910111213141516171819202122232425\ldots$$

en het duurt alleen wel heel erg lang voordat de baan bv. 10^{-5}–dicht bij $x = 0.98765\ldots$ langs komt.

Niet elke onoverzichtelijke rij van geïtereerden is teken van chaotisch gedrag. Een recursie waarvoor elke baan periodiek is (met dezelfde periode) gedraagt zich heel ordelijk, maar als deze periode zeer groot (zeg 1000) is dan zullen de eerste honderd iteraties geen onderling samenhang tonen. Voorbeeld 6 toont de volgende kenmerken.

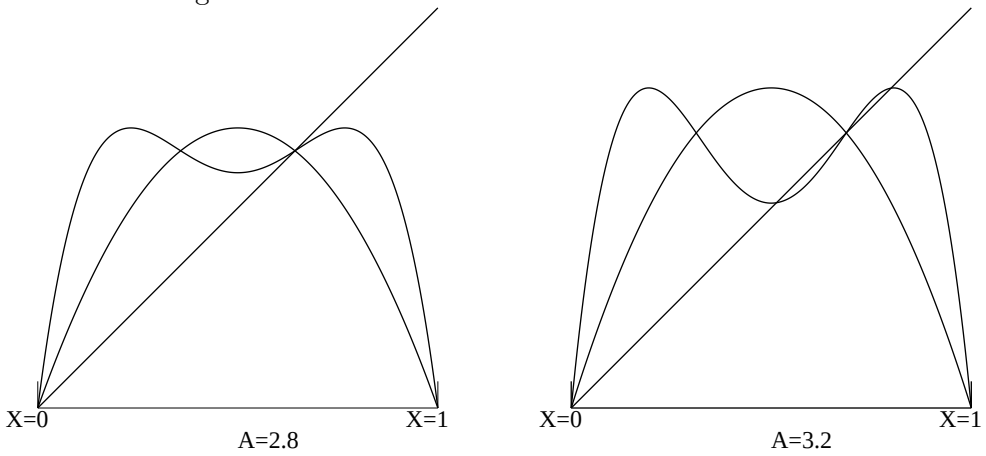
- De periodieke banen liggen dicht.
- Er bestaat een dichte baan.
- De dynamica hangt gevoelig af van de beginwaarde.

We noemen een dynamica chaotisch als ze aan deze drie voorwaarden voldoet.

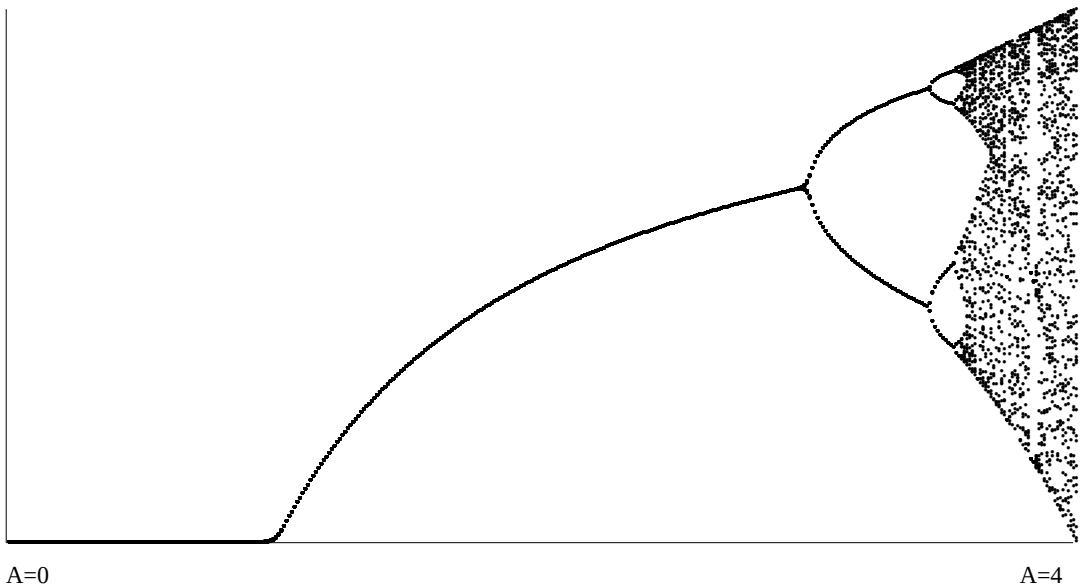
1.3 Logistische groei

In deze sectie bestuderen we de wiskundige achtergrond van het Verhulst model. We zien daarbij zeer snel periodieke banen en chaos optreden kortom, verrassende effecten die we niet van zo'n eenvoudig model zouden verwachten. Het is ook opmerkelijk deze verschijnselen onopgemerkt zijn gebleven tot de verschijning van goedkope rekenkracht in de vorm van zakcalculators en PC's. Tamelijk recent dus.
Stel $V = [0,1]$ en beschouw de recursie $x_{n+1} = A(1-x_n)x_n$ met $0 < A \leq 4$. We berekenen eerst de dekpunten. Los hiertoe de vergelijking $a = A(1-a)a$ op. We vinden de oplossingen $a_1 = 0$, $a_2 = 1 - 1/A$. Merk op dat het dekpunt a_2 alleen in aanmerking komt als $A \geq 1$. Als $A < 1$ dan zou a_2 negatief zijn, en we bekijken alleen punten in $[0,1]$. We bepalen nu de stabiliteit van a_1, a_2 met behulp van Stelling 1.2.2. De functie f is $f(x) = A(1-x)x$ en $f'(x) = A(1-2x)$. Er geldt $f'(a_1) = f'(0) = A$ en dus is a_1 stabiel als $A < 1$ en instabiel als $A > 1$. Verder, $f'(a_2) = f'(1-1/A) = 2 - A$ en dus is a_2 stabiel als $1 < A < 3$ en instabiel als $A > 3$.
Stel nu dat $A > 3$. Er zijn dan geen stabiele dekpunten meer. De vraag is waar x_n naar toe gaat als $n \to \infty$. We schetsen hieronder de grafieken van x, f en f^2 in één plaatje voor $A = 2.8$ respectievelijk $A = 3.2$.

In het plaatje voor $A = 2.8$ herkennen we de dekpunten 0, $1 - 1/A$ en van het punt $1 - 1/A = 0.64\ldots$ zien we ook de stabiliteit. In het plaatje voor $A = 3.2$ zien we dat beide dekpunten instabiel zijn. Er zijn echter twee stabiele dekpunten voor f^2 bijgekomen! Het stabiele dekpunt bij $A < 3$ is blijkbaar overgegaan in een stabiele 2-baan bij $A > 3$. Dit overgangsverschijnsel noemen we een *bifurcatie*, deze hier is een periodeverdubbelingsbifurcatie.

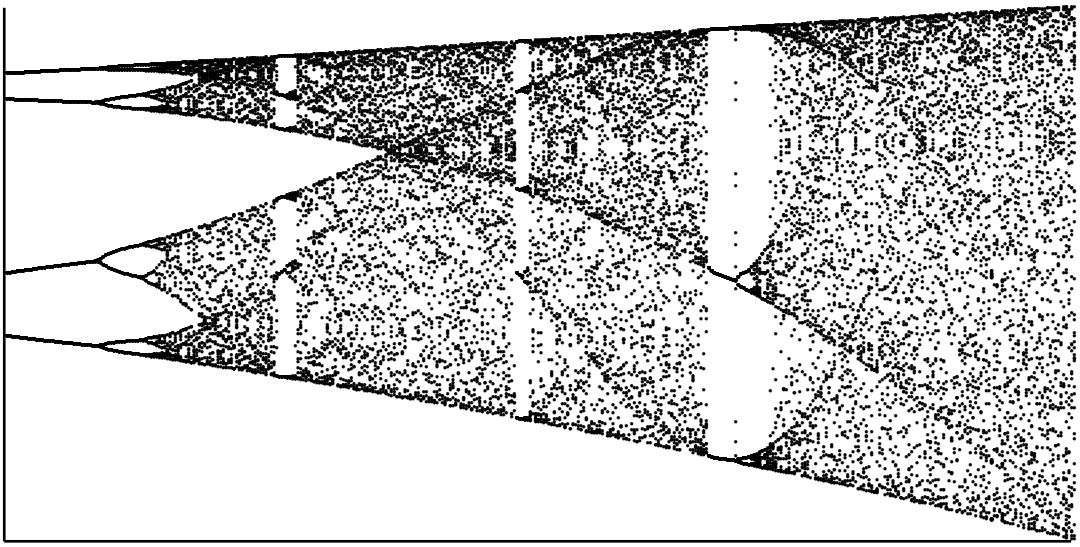


Het blijkt dat als we A verder laten toenemen, er nog meer bifurcaties plaatsvinden. Deze kunnen we echter beter op de volgende manier plotten. Zet op de horizontale as de waarden 0 tot en met 4 van A uit. Op de verticale as zetten we het interval $[0, 1]$ uit. Voor elke waarde van A kiezen we $x_0 = 0.2$ en laten de recursie lopen. Vervolgens plotten we boven de gekozen A de waarden van x_{50}, $x_{51}, \ldots, x_{100}$. De eerste 50 waarden van x_i worden niet geplot om de recursie gelegenheid te geven tot een evenwichtstoestand te komen, als die er is. We krijgen het volgende plaatje,



De stabiele dekpunten bij $A < 3$ evenals de bifurcatie bij $A = 3$ zijn duidelijk zichtbaar.

We zien ook verdere bifurcaties in stabiele 4-banen, 8-banen, etc. tot er bij $A \approx 3.6$ een chaotische brij van punten ontstaat. Bij deze A-waarden hebben we inderdaad te maken met chaos. Verder vallen de A-waarden bij 3.838 op, waar een stabiele 3-baan optreedt. Voor de duidelijkheid vergroten we het gebied $3.5 < A < 4$ nog even.



1.4 Oefeningen

1. We willen de gemiddelde groei van de menselijke bevolking schatten, gebaseerd op het Malthus model

   $$N_{n+1} = \kappa N_n$$

   waar N_n het aantal mensen in jaar n is. De groeifactor κ is dus gezocht.

   Op dit moment telt de wereldbevolking rond 6 800 000 000 mensen. Bereken κ op basis van 100 000 mensen 200 000 jaar geleden.

   Bereken de groei(krimp)factor op basis van de volgende extra gegevens, apart voor de 3 tussenliggende perioden. 100000 jaar geleden waren er nog maar 10000 mensen, maar 30 000 jaar geleden was het aantal weer gegroeid, tot (minstens) 300000 mensen.

   In 1798, toen Malthus zijn model opstelde telde de wereldbevolking rond 1 miljard mensen en de groeifactor was ongeveer $\kappa \approx 1.006$. Hoe groot zou de wereldbevolking nu zijn als deze κ constant was gebleven? En in het jaar 2220?

2. Voor beleggingen, waar men groeifactoren tussen $\kappa = 1.01$ en $\kappa = 1.2$ verwacht, gebruiken economen de benadering

   $$T = \frac{72}{100(\kappa - 1)}$$

waar T het aantal jaren is waarna het belegde geld verdubbelt en $100(\kappa - 1)$ uiteraard de jaarlijkse rente is. Als een econoom je vraagt voor welke waarden van T of κ deze approximatie bruikbaar is, wat zou dan je antwoord zijn?

3. We itereren de functie $f : x \mapsto \kappa\, x$ op heel $\mathbb{R}$, laten dus negatieve waarden van x toe, en ook κ mag een willekeurig reëel getal zijn. Hoe gedraagt zich een door $x_{n+1} = f(x_n)$ recursief gedefinieerd rijtje als $n \to \infty$? Beantwoord deze vraag voor vaste k en onderzoek hoeveel 'verschillende' gevallen er zijn. In hoeverre is de gekozen beginwaarde x_0 belangrijk?

4. Hetzelfde als in de vorige opgave, maar nu voor een lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ in het vlak.

5. Beschouw een functie f die gedefinieerd is op een deel van $\mathbb{R}$ en daarop twee maal continu differentieerbaar is. Het Newton proces probeert een nulpunt α van f als volgt te bepalen. Kies een getal x_0 als benadering voor α. Probeer een correctie te vinden van x_0: $\alpha = x_0 - h$. Dus

$$0 = f(\alpha) = f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 f''(\xi).$$

Hier hebben we de Taylor reeks voor f rond x_0 opgeschreven en is ξ een geschikt getal tussen x_0 en $x_0 - h$. Als h klein is zal de 'h^2-term' veel kleiner zijn dan de andere twee termen, $f(x_0)$ en $hf'(x_0)$. Als we die h^2-term verwaarlozen, dan kunnen we h uitrekenen: $h = f(x_0)/f'(x_0)$. Uiteraard is dit niet helemaal correct, maar zal $x_1 := x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$ waarschijnlijk een veel betere benadering zijn van α dan x_0. Herhaling van deze corrigerende aanpak leidt tot het Newton proces:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \text{voor } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

(a) Laat zien dat de recursie in Voorbeeld 3 het Newton proces voor het oplossen van $f(x) := x^2 - A = 0$ representeert.

(b) Interpreteer het Newton proces als vinden van het snijpunt van de raaklijn aan de grafiek van f in $(x_n, f(x_n))$ met de x-as: x_{n+1} is dan het snijpunt.

(c) Met $h_n := x_n - \alpha$ geldt $\alpha = x_n - h_n$ en $0 = f(x_n) - h_n f'(x_n) + \frac{1}{2}h_n^2 f''(\xi)$. Dus

$$h_{n+1} = h_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{1}{2}\, h_n^2\, \frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}.$$

Ga dit na. Schrijf $B := \frac{1}{2}f''(\alpha)/f'(\alpha)$. Stel dat $x_n \approx \alpha$. Ga na dat dan $\frac{1}{2}f''(\xi)/f'(x_n) \approx B$ en concludeer dat $Bh_{n+1} \approx (Bh_n)^2$. Verklaar nu de 'razend snelle' convergentie in Voorbeeld 3,

(d) Beschouw nu de recursie

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{A}{x_n^2}\right)$$

met $A > 0$ en kies $x_0 > 0$. Interpreteer deze recursie als een Newton proces. Van welke functie? Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt[3]{A}$.

6. Beschouw de functie $f(x) = A(1-x)x^2$ met $0 \leq A \leq 27/4$ op het interval $[0,1]$.

   (a) Laat zien dat de waarden van f ook in $[0,1]$ liggen.

   Beschouw de recursie

   $$x_0 \in [0,1], \quad x_{n+1} = f(x_n), \qquad n \geq 0.$$

   (b) Bepaal voor willekeurige A de dekpunten van de recursie en ga na of ze stabiel of instabiel zijn.

7. Beschouw de recursie $x_{n+1} = f(x_n)$ waarin $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

   (a) Verzin een voorbeeld (d.m.v. formule/grafiek/programma/...) van een functie f die een dekpunt heeft dat attractief is, maar niet stabiel in de zin van Liapunov. *Hint: welke waarde zal de afgeleide in zo'n dekpunt moeten hebben?*

   (b) Bestaat een functie met de eigenschap als in (a) als we eisen dat f continu is?

   (c) Verzin een continue functie f met een stabiel dekpunt α zodat voor een zekere rij (x_n) van iteranden die naar α convergeert, geldt $|x_{2n+1} - \alpha| \geq 10\,|x_{2n} - \alpha|$ $(n \in \mathbb{N})$.

   (d) Bestaat een functie met de eigenschap als in (c) als we eisen dat f continu differentieerbaar is?

8. Beschouw de recursie $x_{n+1} = f(x_n)$ waarin f een continu differentieerbare functie is. Een oplossing van deze recursie van de gedaante $a, b, a, b, a, \ldots$ met $a \neq b$ noemen we een 2-*baan*. Blijkbaar geldt dat $a = f(b)$ en $b = f(a)$. De samengestelde functie $f(f(x))$ noteren we met $(f \circ f)(x)$. De constante rijen $a, a, a, \ldots$ en $b, b, b, \ldots$ zijn dus oplossingen van de recursie $x_{n+1} = (f \circ f)(x_n)$.

   (a) Bewijs met behulp van de kettingregel voor differentiatie dat $(f \circ f)'(a) = (f \circ f)'(b) = f'(a)f'(b)$.

   We noemen een 2-baan $a, b, a, b, \ldots$ stabiel als $|f'(a)f'(b)| < 1$ en instabiel als $|f'(a)f'(b)| > 1$. Kies nu $f(x) = A(1-x)x$ met $1 < A < 4$.

   (b) Schrijf de vergelijking $(f \circ f)(x) = x$ uit en merk op dat er al twee oplossingen bekend zijn (welke ??).

   (c) Bewijs dat voor $A = 2$ geen 2-baan bestaat en voor $A = 7/2$ wel. Bepaal de laatste en ga na of deze (in)stabiel is.

9. Beschouw de functie $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ gegeven door

   $$f(x) \;:=\; \begin{cases} 2x & \text{als} \quad x \in [0, \frac{1}{2}[\,, \\ 2-2x & \text{als} \quad x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

   (a) Laat zien dat f periodieke banen van willekeurig hoge perioden heeft.

(b) Ga na dat in elke omgeving $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ van een gegeven punt x een punt $y \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ bestaat waarvoor de baan $y, f(y), f^2(y), \ldots$ periodiek is. Waarom zijn deze banen instabiel? *Hint: hoe ziet de grafiek van f^n eruit, i.h.b. voor hoge waarden van n ?*

(c) Definieer een symbolische dynamica d.m.v. de binaire ontwikkeling van punten $x \in [0,1[$. Laat zien dat er een dichte baan bestaat. Beredeneer dat de door f gegeven dynamica gevoelig afhankelijk is van de beginwaarden en concludeer dat de dynamica chaotisch is.

10. Beschouw de recursie $x_{n+1} = 4(1-x_n)x_n$ met andere woorden, de Verhulst recursie met $A = 4$. Kies $\phi_0 \in [0,1]$ zó dat $x_0 = (\sin(\frac{1}{2}\pi\phi_0))^2$. Bewijs dat voor elke n geldt $x_n = (\sin(2^n\frac{1}{2}\pi\phi_0))^2$. Voor welke waarden van ϕ_0 kunnen we een periodieke baan verwachten? Zijn deze stabiel? Relateer dit proces aan dat in opgave 9.

11. Op een groot landgoed leeft een populatie herten. Het aantal herten aan het einde het n-de jaar geven we aan met N_n. Het blijkt dat de grootte van de hertenpopulatie in een bepaald jaar afhangt van de populatie in het voorgaande jaar volgens een recursie van de vorm

$$N_{n+1} = \kappa \left(1 - \frac{N_n}{1000}\right) N_n, \tag{5}$$

waarin κ een nader aan te geven constante is. Als we in een zeker jaar n op $N_n \leq 0$ terecht zouden komen, dan zeggen we dat de populatie is uitgestorven. Dit wil zeggen dat $N_k = 0$ voor alle $k \geq n$.

We normeren de recursie door de nieuwe variabele $x_n = N_n/1000$ in te voeren.

(a) Laat zien dat de getallen x_n voldoen aan de recursie

$$x_{n+1} = \kappa(1 - x_n)x_n. \tag{6}$$

Omdat x_n en N_n een factor 1000 schelen, is het, als we x_n weten, makkelijk te zien hoeveel herten er zijn in jaar n. Zo betekent $x_n = 0.14$ dat er 140 herten zijn.

We bekijken nu eerst de recursie (6) zelf, zonder daarbij aan herten- of zelfs maar dierpopulaties te denken.

(b) Bepaal voor elke waarde van κ met $0 \leq \kappa \leq 4$ de dekpunten van (6) en ga na of deze stabiel zijn of niet. Maak een grafiek waarin κ op de horizontale as is uitgezet tegen het/de (evt.) dekpunt(en) op de verticale as. Geef in het plaatje ook aan welke dekpunten stabiel zijn en welke niet.

Uit onderzoek is gebleken dat voor onze hertenpopulatie geldt dat $\kappa = 3/2$.

(c) Is er een stabiel dekpunt bij $\kappa = 3/2$ en zo ja, wat is de waarde?

Ons landgoed is niet zo vreedzaam als wij aanvankelijk dachten, de eigenaar en zijn vrienden jagen er namelijk op herten, deels uit populatieonderhoud, deels uit morbide vermaak. De eigenaar besluit dat er jaarlijks een vast aantal herten, zeg J, kunnen worden afgeschoten. Dit betekent dat de populatie zich nu ontwikkelt volgens de formule

$$N_{n+1} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{N_n}{1000}\right) N_n - J. \tag{7}$$

Hier nemen we aan dat de factor 3/2 niet is afgenomen door de grotere stress op de dieren.

(d) Laat zien dat de getallen $x_n = N_n/1000$ nu voldoen aan de recursie

$$x_{n+1} = \frac{3}{2} x_n(1 - x_n) - b, \tag{8}$$

waarin $b = J/1000$.

(e) De eigenaar van het landgoed besluit dat een constant aantal herten van 200 op zijn landgoed wenselijk zou zijn. Is het mogelijk om J, en dus b, zo kiezen dat er ieder jaar 200 herten zijn? Is dit aantal stabiel?

(f) Beantwoord deze vragen nogmaals voor een aantal van 100 herten.

(g) Onderzoek nu voor $0 \leq b \leq 0.05$ de recursie (8) op dekpunten. Onderzoek of deze stabiel zijn. Zet ten slotte in een grafiek de dekpunten uit tegen de waarden van b tussen 0 en 0.05 en geef aan waar we te maken hebben met stabiliteit en waar met instabiliteit.

12. In laboratoria kan men populaties van insecten bestuderen die geïsoleerd zijn van invloeden anders dan de grootte van de populatie. We gebruiken het model

$$N_{n+1} = \frac{\lambda N_n}{(1 + aN_n)^b} \tag{9}$$

met drie positieve parameters $\lambda, a, b > 0$. Hierbij is N_n de grootte (of de dichtheid) van de populatie op het n-de tijdstip, λ is de dichtheidsonafhankelijke groeifactor en a, b bepalen de dichtheidsafhankelijke mortaliteit. Voor $a = b = 1$ is (9) het model van Beverton en Holt.

tabel 1. Parameterwaarden voor drie snuitkever-populaties

	λ	a	b
A	22.5	0.0013	0.7–1.1
B	32.5	0.0006	1.9–2.5
C	37.5	0.0001	2.1–3.3

Terwijl λ in laboratoria vrij nauwkeurig bepaald kan worden door het aantal eitjes te tellen, moet men de functie in de noemer door curve fitting bepalen. Voor 3 populaties van snuitkevers levert deze onnauwkeurigheid de in tabel 1 opgenomen intervallen voor de waarden van b op.

Opdracht 1 *Gebruik het notebook* `iteratie.nb` *om een eerste indruk van de dynamica's van de* 3 *snuitkever-populaties te verkrijgen. Maak voor je verslag een verstandige keuze welke aspecten je d.m.v. een plaatje wilt verduidelijken en waar een beschrijving op z'n plaats is.*

De waarden van a in tabel 1 zijn gemunt op de middenwaarden van b, dus resp. $b = 0.9$, $b = 2.2$ en $b = 2.7$. Voor andere keuzes van b in de aangegeven intervallen moet de waarde van a woorden aangepast (immers, de functie $N \mapsto \frac{\lambda N}{(1+aN)^b}$ moet dezelfde meetgegevens blijven interpoleren). Toch is er hiermee in tabel 1 geen rekening gehouden, want a heeft op de dynamica alleen een kwantitatieve en geen kwalitatieve invloed.

Opdracht 2 *Gebruik de herschaling* $x = aN$ *om* (9) *om te vormen in de recursie*

$$x_{n+1} = \frac{\lambda x_n}{(1 + x_n)^b} \tag{10}$$

met dezelfde parameters λ *en* b *als* (9)*.*

Stabiliteitsanalyse. We bekijken nu eerst de recursie (10) zelf, zonder daarbij aan snuitkevers of andere insecten te denken.

Opdracht 3 *Bepaal (afhankelijk van* (λ, b)*) de dekpunten van* (10) *en hun stabiliteit. Kun je je bevindingen d.m.v. het notebook* `iteratie.nb` *en/of de in opdracht 1 verkregen inzichten bevestigen?*

In het positieve kwadrant van het (λ, b)-vlak staat elk punt voor een door (10) bepaalde dynamica. Hierover willen we een eerste overzicht verkrijgen.

Opdracht 4 *Bereken de afgeleide van de rechter kant van* (10) *in het niet-triviale dekpunt. Stel de zo verkregen uitdrukking (die van* λ *en* b *afhangt) gelijk aan de waarden* $1, 0$ *en* -1*, en teken de hierdoor gedefinieerde drie krommen in het* (λ, b)*-vlak.*

Wat houden deze resultaten in voor de populaties uit tabel 1 ?

Opdracht 5 *Markeer de waarden uit tabel 1 eveneens in het* (λ, b)*-vlak. Hoe verandert de dynamica als* λ *de aangegeven vaste waarde aanneemt en* b *binnen het aangegeven interval variëert? Vinden er bifurcaties plaats?*

Lucilia cuprina. De parameter b geeft aan hoe de middelen (in het laboratorium: voedsel) binnen de populatie worden verdeeld. Hoe kleiner de waarde hoe groter het verschil tussen 'succesvolle' insecten die wel voldoende voedsel weten te bemachtigen en hun minder succesvolle soortgenoten. In de limiet $b \to \infty$ worden de middelen zo evenredig verdeeld dat alleen nog de toevalligheden van de ruimtelijke distributie verhinderen dat een overgrote populatie in de volgende generatie compleet uitsterft.

Voor een schapenvleesvlieg populatie werd in een laboratorium-onderzoek $\lambda = 60$ gevonden en de geschatte waarden van b waren zo hoog dat het nemen van de limiet $b \to \infty$ zinvol lijkt.

Opdracht 6 *Laat zien dat de recursie* (9) *in de simultane limiet* $a \to 0\,,\ b \to \infty$, *met inachtneming van* $ab = \alpha \in \mathbb{R}$, *leidt tot de recursie*

$$N_{n+1} = \frac{\lambda N_n}{\mathrm{e}^{\alpha N_n}} \tag{11}$$

(het model van Ricker).

Ook hier heeft één parameter geen invloed op de dynamica.

Opdracht 7 *Vind een geschikte herschaling die* (11) *omvormt in de recursie*

$$x_{n+1} = \frac{\lambda x_n}{\mathrm{e}^{x_n}} = \mathrm{e}^{\ln(\lambda) - x_n} x_n \tag{12}$$

met dezelfde parameter λ *als in* (11).

Nu we met een 1-parameter familie van recursies te maken hebben kunnen we d.m.v. de procedure `bifurcatie` een globaal overzicht verkrijgen.

Opdracht 8 *Geef een bifurcatie-diagram van* (12). *Experimenteer hiervoor met de mogelijkheid om op de horizontale as* $\ln(\lambda)$ *i.p.v.* λ *te nemen en maak voor je verslag een verstandige keuze voor het interval van* λ*-waarden.*

Dit resultaat geeft aanleiding tot een vermoeden hoe het (λ, b)-vlak van (10) verder onderverdeeld moet worden (namelijk?). D.m.v. welgekozen 1-parameter onderfamilies langs krommen in het (λ, b)-vlak kun je dit vermoeden toetsen.

Opdracht 9 *Voor de schapenvleesvlieg populatie waren de geschatte waarden van* b *tussen* 8 *en* 12 *en lagen bovendien ver uit elkaar. Geef voor de vaste waarde* $\lambda = 60$ *een bifurcatie-diagram van* (10) *onder variatie van* b. *Kun je het laboratorium adviseren hoe ze bepaalde* b*-waarden kunnen uitsluiten d.m.v. extra experimenten?*

2 Lesliematrices en Markovketens

2.1 Inleiding

In het vorige hoofdstuk hebben we gekeken naar de groei van populaties bestaande uit één soort. In het algemeen is dit een te simpele voorstelling van zaken. In meer realistische modellen moeten we bijvoorbeeld rekening houden met het feit dat verschillende populaties met elkaar in interactie zijn (bijvoorbeeld roofdier-prooidier). Een ander effect is dat de individuen in één populatie zich verschillend kunnen gedragen, bijvoorbeeld, alleen geslachtsrijpe individuen kunnen reproduceren, terwijl de jongeren alleen maar opgroeien. We beginnen met een lineair model dat in feite beschouwd kan worden als een Malthus model, maar dan uitgesplitst naar leeftijdsgroepen.
Als concreet voorbeeld nemen we de populatie grote sterns in het Waddengebied. Deze populatie fluctueerde de afgelopen jaren sterk als gevolg van de vervuiling met gifstoffen, die voor een groot deel uit het Rijnmondgebied afkomstig bleken te zijn.

jaar	1940	1955	1960	1965	1966	1967	1968	1969	1970
broedparen	4000	2600	1200	65	170	100	150	200	250

Nadere bestudering leert dat er drie fasen in het leven van de stern onderscheiden kunnen worden. De fase tot het uitkomen van het ei, de fase waarin de jongen uitgroeien tot volwaardige sterns, en de fase van de volwassen stern. De tweede fase is de leerfase met alle risico's die daaraan verbonden zijn. We beperken ons model tot de eerste drie levensjaren en tot de vrouwtjes-populatie. Met dit laatste vermijden we enkele problemen zoals het boekhouden van de gemengde 2e/3e jaars-paren. In een gezonde populatie vindt het volgende plaats. Van het eerste jaar, uitkomen van het ei plus leerfase, overleeft een kwart. In het tweede levensjaar overleeft de helft. We kijken nu naar de populatie sterns aan het einde van het jaar n. Stel $N_n(1)$ is het aantal uitgekomen kuikens, $N_n(2)$ het aantal sterns dat de leerfase heeft overleefd, en $N_n(3)$ het aantal sterns dat het derde jaar haalt. We hebben nu $N_{n+1}(2) = N_n(1)/4$ en $N_{n+1}(3) = N_n(2)/2$. Voor het aantal eieren dat uitkomt en een vrouwelijk kuiken geeft stellen we $N_{n+1}(1) = 2N_n(2) + 4N_n(3)$. In matrixvorm,

$$\begin{pmatrix} N_{n+1}(1) \\ N_{n+1}(2) \\ N_{n+1}(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_n(1) \\ N_n(2) \\ N_n(3) \end{pmatrix}.$$

Een grote achteruitgang van het aantal levend geboren jongeren zou worden gegeven door de matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bij geringere vergiftiging van het milieu komen de jongen wel uit, maar blijken de jongen erg kwetsbaar. Dit kan beschreven kan worden met de matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1/16 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

De vraag is natuurlijk wat er in deze verschillende modellen met de sternpopulatie gebeurt als $n \to \infty$. De theorie hiervoor wordt in de volgende paragraaf besproken. We gaan nu van sterns over naar willekeurige populaties. We delen deze op in M leeftijdsgroepen genummerd van 1 tot en met M. Als éénheid van opdeling in deze leeftijdsgroepen nemen we het tijdvak waarover we onze populatie elke keer tellen. Als dit tijdvak een jaar is, dan zijn de leeftijdsgroepen de 1-jarigen, 2-jarigen etc. Het aantal individuen in de k-de leeftijdsgroep en aan het begin van het n-de tijdvak geven we aan met $N_n(k)$. Voor het opstellen van het model maken we twee aannamen. Allereerst, *gedurende elk tijdvak overleeft een fractie s_k van leeftijdsgroep k.* In de formulevorm, $N_{n+1}(k+1) = s_k N_n(k)$. Ten tweede, *het aantal individuen dat per tijdvak 'geboren' wordt, d.w.z. $N_n(1)$, hangt af van de vruchtbaarheid van de diverse leeftijdsgroepen volgens,*

$$N_{n+1}(1) = g_1 N_n(1) + g_2 N_n(2) + \cdots + g_M N_n(M).$$

De getallen g_i kunnen gezien worden als een maat voor de productiviteit van de verschillende leeftijdsgroepen. We hebben nu als model gevonden,

$$\begin{pmatrix} N_{n+1}(1) \\ N_{n+1}(2) \\ N_{n+1}(3) \\ \vdots \\ N_{n+1}(M) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_{M-1} & g_M \\ s_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & s_{M-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_n(1) \\ N_n(2) \\ N_n(3) \\ \vdots \\ N_n(M) \end{pmatrix} \tag{13}$$

of, afgekort, $\mathbf{N}_{n+1} = L\mathbf{N}_n$. Een matrix L van de gedaante zoals in (13) noemen we een *Lesliematrix*. Het is duidelijk dat bij gegeven beginpopulatie $\mathbf{N}(0)$ de populatie na het n-de tijdvak gegeven wordt door $\mathbf{N}_n = L^n\mathbf{N}_0$. Grote vraag is natuurlijk weer hoe L^n zich gedraagt als $n \to \infty$. Natuurlijk geldt ook hier dat het gebruik van Lesliematrices voor beschrijving van populatiegroei vele beperkingen heeft. Enerzijds ligt dit aan storende effecten die de toepasbaarheid kunnen beperken, anderzijds is er de impliciete aanname dat het model uitgaat van grote populaties. Zou onze populatie namelijk uit één of twee individuen bestaan dan is de toekomst van deze populatie natuurlijk sterk afhankelijk van toevallige gebeurtenissen. Eén van de dieren kan bijvoorbeeld verongelukken waardoor verdere voortzetting van de populatie uitgesloten is. Door statistische analyse moet eigenlijk nagegaan worden wanneer een model met een Lesliematrix betrouwbaar kan worden geacht in dit opzicht. Een ander mogelijkheid is dat men de invloed van statistische fluctuaties bekijkt door het uitvoeren van simulaties. Wij zullen dit tijdens het practicum doen. Deze opmerkingen lijken misschien wat overbodig, maar het zou niet de eerste keer zijn dat een model met Lesliematrices wordt toegepast op de bestudering van 0.1 beest!

Een ander voorbeeld van matrix iteraties wordt gegeven door *Markovketens*. Ter introductie geven we hier een fictief, maar niettemin instructief voorbeeld. Stel dat het weer op één dag slechts drie verschillende toestanden kent, zonnig (z), bewolkt (w) of regen (r). We maken nu het volgende model. Na een zonnige dag is de kans 1/2 dat de volgende dag wederom zonnig is en de kans op bewolking is ook 1/2. De kans op regen na een zonnige dag is dus 0, althans, in ons model. Na een bewolkte dag zijn de kansen 1/6, 1/3, 1/2 op een zonnige, bewolkte, respectievelijk regenachtige dag. Maar

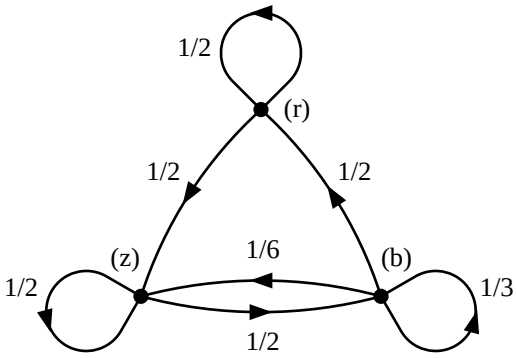
na regen komt zonneschijn, en de kans hierop zetten we op 1/2. Voor de kans dat het blijft regenen zetten we ook 1/2. Deze kansen kunnen we overzichtelijk in matrixvorm weergeven,

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Een matrix met niet-negatieve elementen en som van elke kolom gelijk aan 1 noemen we een *kansmatrix*. Niets is zo onzeker als het weer. Daarom stellen we de weersverwachting op dag n voor door een kolomvector $(p_n, q_n, r_n)^{\mathrm{T}}$, waarin de elementen de kansen op zonnig weer, bewolkt weer of regenachtig weer voorstellen. De som van p_n, q_n, r_n is natuurlijk 1. Een vector met niet-negatieve elementen en som van de componenten 1 noemen we een *kansvector*. De weersverwachting op dag $n+1$ wordt nu gegeven door

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}.$$

Starten we op dag 0 met weersverwachting $\mathbf{p}_0 = (p_0, q_0, r_0)^{\mathrm{T}}$, dan zal de weersverwachting op dag n worden gegeven door $P^n\mathbf{p}_0$. Grote vraag is natuurlijk wat er gebeurt als $n \to \infty$.
Een illustratieve voorstelling van ons weermodel is met behulp van een *gerichte graaf* welke hopelijk voor zichzelf spreekt,



Stel dat we op zekere dag zon hebben, wat is de kans dat drie dagen later weer de zon schijnt? Als we naar onze graaf kijken dan zien we dat er vijf mogelijke weersverlopen zijn die op de derde dag met zon eindigen, zzz, zbz, bzz, bbz, brz. De bijbehorende kansen zijn $1/2 \times 1/2 \times 1/2$, $1/2 \times 1/2 \times 1/6$, $1/2 \times 1/6 \times 1/2$, $1/2 \times 1/3 \times 1/6$, $1/2 \times 1/2 \times 1/2$. In totaal is dit 13/36. Een andere manier om deze kans te vinden is om het element op plaats $1,1$ in P^3 te bepalen. Er geldt,

$$P^3 = \begin{pmatrix} 13/36 & 47/108 & 5/12 \\ 11/36 & 7/27 & 1/3 \\ 1/3 & 11/36 & 1/4 \end{pmatrix},$$

in het bijzonder $(P^3)_{11} = 13/36$.

Bij Markovketens (preciezer, eindige Markovketens in discrete tijd) bekijken we een systeem dat zich in een eindig aantal verschillende toestanden kan bevinden, zeg 1 tot en met m. We bekijken dit systeem telkens na een vast gekozen tijdvak. Neem aan dat het systeem zich in zo'n tijdvak als volgt wijzigt. Als het systeem in toestand j is, dan is de kans dat het zich in het volgende tijdvak in toestand i bevindt gelijk aan p_{ij}. Deze kansen kunnen we in de zogenaamde *overgangsmatrix*

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix}$$

zetten. Er geldt $p_{ij} \geq 0$ voor alle i, j en de som van elke kolom is 1. De matrix P is dus een kansmatrix. Als we in tijdvak n weten dat het systeem een toestandsverwachting heeft, die wordt voorgesteld door de kansvector $(q_n(1), \ldots, q_n(m))^{\mathrm{T}}$, dan zal de toestandsverwachting in tijdvak $n+1$ gelijk zijn aan

$$\begin{pmatrix} q_{n+1}(1) \\ \vdots \\ q_{n+1}(m) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} q_n(1) \\ \vdots \\ q_n(m) \end{pmatrix}$$

of korter, $\mathbf{q}_{n+1} = P\mathbf{q}_n$. De oplossing is natuurlijk $\mathbf{q}_n = P^n\mathbf{q}_0$. Merk tevens op dat een kansmatrix losgelaten op een kansvector wederom een kansvector oplevert. We merken met nadruk op dat bij een Markovproces de toestandsverwachting van het systeem uitsluitend afhangt van de toestandsverwachting in het voorgaande tijdvak, en niet van de langere voorgeschiedenis van het systeem.

2.2 Matrixrecursies, theorie

In de vorige sectie zijn we problemen tegengekomen van het volgende type. Zij A een $m \times m$ matrix en beschouw de rij vectoren $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \ldots$ gegeven door de recursie $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n$, $n \geq 0$. De oplossing luidt natuurlijk, $\mathbf{x}_n = A^n\mathbf{x}_0$. Grote vraag is echter wat er gebeurt met $A^n\mathbf{x}_0$ als $n \to \infty$. Neem aan, dat A (eventueel over de complexe getallen) een basis van eigenvectoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ heeft met eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Schrijf nu $\mathbf{x}_0$ als lineaire combinatie van de eigenvectoren, $x_0 = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_m\mathbf{v}_m$ en merk op, dat

$$\mathbf{x}_n = A^n\mathbf{x}_0 = \alpha_1\lambda_1^n\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_m\lambda_m^n\mathbf{v}_m. \tag{14}$$

In het bijzonder, als $|\lambda_i| < 1$ voor alle i, dan geldt $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = 0$, ongeacht de startvector $\mathbf{x}_0$. Trouwens, ook als er geen basis van eigenvectoren bestaat dan blijft deze uitspraak waar.

Stelling 2.2.1 *Stel dat de $m \times m$ matrix A eigenwaarden heeft die allen kleiner dan 1 zijn in absolute waarde. Dan geldt dat $\lim_{n\to\infty} A^n = 0$ d.w.z., voor elke i, j gaat het element met index (i, j) in A^n naar 0 als $n \to \infty$.*

Een ander algemeen geval waarover we een uitspraak kunnen doen en dat ook in de praktijk voorkomt, is dat van de *dominante eigenvector*. De eigenwaarde λ van de $m \times m$ matrix A noemen we dominant als λ algebraïsche multipliciteit 1 heeft en als voor iedere andere eigenwaarde μ geldt dat $|\mu| < |\lambda|$.
In de volgende stelling maken we gebruik van het begrip *rij-eigenvector*. Een eigenvector $\mathbf{v}$ van een matrix A bij eigenwaarde λ is normaal gesproken een kolomvector. Echter, de getransponeerde van A heeft ook eigenwaarde λ en dus een bijbehorende eigenvector $\mathbf{w}$. Er geldt, $A^{\mathrm{T}}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$. Neem nu de getransponeerde hiervan, $\mathbf{w}^{\mathrm{T}}A = \lambda\mathbf{w}^{\mathrm{T}}$. De vector $\mathbf{w}^{\mathrm{T}}$ is een rijvector die gezien kan worden als (rij)-eigenvector van A. Een rij-eigenvector wordt ook wel *links eigenvector* genoemd en een kolom eigenvector *rechts eigenvector*.

Stelling 2.2.2 *Stel dat de $m \times m$ matrix A een dominante eigenwaarde λ heeft. Zij $\mathbf{v}$ een (kolom-)eigenvector en $\mathbf{w}^{\mathrm{T}}$ een rij-eigenvector bij λ. Dan geldt voor elke $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ dat*

$$\lim_{n\to\infty} (1/\lambda)^n A^n \mathbf{x}_0 = \alpha\,\mathbf{v} \quad \textit{met} \quad \alpha := (\mathbf{w}, \mathbf{x}_0)/(\mathbf{w}, \mathbf{v}).$$

Hierin is $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ het standaard inproduct op $\mathbb{R}^m$.

Indien A in bovenstaande stelling een basis van eigenvectoren heeft, dan is deze stelling gemakkelijk in te zien. Beschouw (14) en stel $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$ en $\lambda_1 = \lambda$. Omdat $|\lambda_1| > |\lambda_i|$ voor alle $i > 1$ zien we dat $\lim_{n\to\infty}(1/\lambda)^n A^n \mathbf{x}_0 = \alpha_1 \mathbf{v}$. Om α_1 te bepalen vermenigvuldigen we aan beide zijden van links met de rijvector $\mathbf{w}^{\mathrm{T}}$ en gebruiken dat $(1/\lambda)^n \mathbf{w}^{\mathrm{T}} A^n = (1/\lambda)^n \lambda^n \mathbf{w}^{\mathrm{T}} = \mathbf{w}^{\mathrm{T}}$. We vinden dan, $(\mathbf{w}, \mathbf{x}_0) = \alpha_1(\mathbf{w}, \mathbf{v})$. Hieruit volgt α_1 en onze stelling.
Hoe de rij vectoren $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots$ er in het algemeen uitziet illustreren we aan de hand van het *tweedimensionale geval* $m = 2$. We beschouwen eerst het geval $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ en nemen aan dat er een basis van eigenvectoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ bestaat. We maken gebruik van het feit dat iedere vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ te schrijven is in de vorm $\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{v}_1 + \xi_2\mathbf{v}_2$ voor zekere ξ_1, ξ_2, die we de $\mathbf{v}$-coördinaten van $\mathbf{x}$ zullen noemen. We beschrijven de volgende gevallen.

a) $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$. Stel $\mathbf{x}_0 = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2$ en merk op, dat $A^n\mathbf{x}_0 = \alpha_1\lambda_1^n\mathbf{v}_1 + \alpha_2\lambda_2^n\mathbf{v}_2$. Kies $0 < a < 1$ zó dat $\lambda_1^a = \lambda_2$. Merk nu op, dat de $\mathbf{v}$-coördinaten van $A^n\mathbf{x}_0$ gelijk zijn aan $\xi_1 = \alpha_1\lambda_1^n$, $\xi_2 = \alpha_2\lambda_2^n$ en voldoen aan $\alpha_2\xi_1^a = \alpha_1^a\xi_2$. Bovendien gaan beide coördinaten naar 0 als $n \to \infty$. Dus de punten $A^n\mathbf{x}_0$ convergeren naar $\mathbf{0}$ langs een kromme van de vorm $\xi_2 = \gamma\xi_1^a$.

b) $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$. We hebben wederom $A^n\mathbf{x}_0 = \alpha_1\lambda_1^n\mathbf{v}_1 + \alpha_2\lambda_2^n\mathbf{v}_2$. Echter, de ξ_1 coördinaat gaat naar 0 en de ξ_2 coördinaat naar ∞. Als $n \to \infty$ dan convergeert de richting van $A^n\mathbf{x}_0$ dus naar de richting van $\mathbf{v}_2$ (tenzij $\alpha_2 = 0$). Kies $a > 0$ zó dat $\lambda_2 = \lambda_1^{-a}$. Dan geldt voor de $\mathbf{v}$-coördinaten van $A^n\mathbf{x}_0$ dat $\xi_1^a\xi_2 = \alpha_1^a\alpha_2$.

c) $1 < \lambda_1 < \lambda_2$. Wederom geldt $A^n\mathbf{x}_0 = \alpha_1\lambda_1^n\mathbf{v}_1 + \alpha_2\lambda_2^n\mathbf{v}_2$. Zowel de ξ_1 als de ξ_2-coördinaat gaan nu naar ∞ als $n \to \infty$. Kies $a > 1$ zó dat $\lambda_1^a = \lambda_2$. Dan geldt voor de $\mathbf{v}$-coördinaten van $A^n\mathbf{x}_0$ dat $\alpha_2\xi_1^a = \alpha_1^a\xi_2$. Dus de punten $A^n\mathbf{x}_0$ gaan naar ∞ langs een kromme van de vorm $\xi_2 = \gamma\xi_1^a$.

Beschouw nu het geval dat $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ en $\bar{\lambda}_1 = \lambda_2$. Er is nu een basis $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ ten opzichte waarvan de matrix van A de vorm

$$R \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

heeft. Hierin is $R = |\lambda_1| = |\lambda_2|$ en $\phi = \arg\lambda_1$. Laten we de coördinaten t.o.v. $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ **w**-coördinaten noemen. In **w**-coördinaten heeft A^n de gedaante

$$R^n \begin{pmatrix} \cos n\phi & \sin n\phi \\ -\sin n\phi & \cos n\phi \end{pmatrix}.$$

Het gedrag van $A^n\mathbf{x}_0$ is nu gemakkelijk af te lezen. Als $R < 1$ dan convergeert de rij punten $A^n\mathbf{x}_0$ in een spiraalvorm naar $\mathbf{0}$. Als $R = 1$ dan liggen de punten $A^n\mathbf{x}_0$ op een cirkel in **w**-coördinaten. Als $R > 1$ dan gaan de punten $A^n\mathbf{x}_0$ naar ∞ via een spiraalvormige baan.

2.3 Stelling van Perron–Frobenius

We hebben bij Lesliematrices en Markovketens gezien dat we te maken krijgen met lineaire recursies $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n$ waarbij de matrix A niet-negatieve coëfficiënten heeft. Voor dergelijke matrices blijkt dat er altijd een positieve eigenwaarde bestaat, groter of gelijk aan de absolute waarde van alle andere eigenwaarden. Bovendien blijkt deze eigenwaarde onder een aantal niet al te strenge eisen dominant te zijn. Dit is de inhoud van de stelling van Perron-Frobenius. Eerst hebben we een aantal begrippen nodig.
Stel A is een $m \times m$ matrix. Naar aanleiding van A gaan we een *gerichte graaf* maken. Geef de getallen $1, 2, \ldots, m$ aan met punten in het vlak. Als het matrix element A_{ij} niet nul is, verbinden we punt j en punt i met een boog die van j naar i gericht is. Als $A_{ii} \neq 0$, dan verbinden we i door een klein boogje met zichzelf. Op deze wijze krijgen we een gerichte graaf, d.w.z een collectie punten die verbonden worden door bogen met een gegeven wandelrichting. Onder een *pad* van j naar i verstaan we een opeenvolging van bogen, die samen een wandeling van j naar i geven. Een pad heet *gesloten* als $i = j$. Het aantal bogen dat in een pad voorkomt noemen we de *lengte* van het pad. Grafen van matrices met niet-negatieve elementen geven ons vaak op zeer eenvoudige wijze informatie over de matrix A zelf. We hebben bijvoorbeeld de volgende stelling.

Stelling 2.3.1 *Zij A een $m \times m$ matrix met niet-negatieve elementen. Dan geldt dat alle eigenwaarden van A nul zijn dan en slechts dan wanneer de graaf van A geen gesloten paden bevat.*

Paden van lengte l in de graaf van A spelen een belangrijke rol bij de berekening van A^l. Stel $A = (A_{ij})$ heeft alleen niet-negatieve elementen: $A_{ij} \geq 0$. Het element (i, j) van A^l is een som van een groot aantal termen van de vorm $A_{ii_{l-1}}A_{i_{l-1}i_{l-2}} \cdots A_{i_2i_1}A_{i_1j}$. Een dergelijke term correspondeert met het pad $j \to i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_{l-1} \to i$. Bij de berekening van het element (i, j) in A^l nemen we voor elk pad van j naar i het product van de matrix elementen van A behorend bij de bogen van het pad, en nemen vervolgens de som over alle paden van j naar i. Met deze interpretatie wordt ook bovenstaande

stelling duidelijk. Als er geen gesloten paden zijn, dan heeft elk pad lengte hoogstens m. Immers, de graaf heeft m punten en een pad van lengte $> m$ zou meerdere keren door een zelfde punt moeten gaan, in tegenspraak met het feit dat er geen gesloten paden zijn. Dus $A^{m+1} = 0$, d.w.z. A is *nilpotent* en alle eigenwaarden zijn nul. Op analoge wijze zien we ook dat als er wel een gesloten pad bestaat, de machten van A niet nul kunnen zijn. Dus A is niet nilpotent en dat betekent dat er eigenwaarden $\neq 0$ zijn.
We noemen A *irreducibel* als voor elk geordend paar i, j in de graaf van A een pad van j naar i bestaat en *reducibel* als er i, j bestaan zó dat er geen pad van j naar i is.

Voorbeeld. De volgende matrices zijn allen reducibel,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Merk op dat het voor het nagaan van (ir)reducibiliteit voldoende is om na te gaan of er voor elk punt $i \neq 1$ een pad van en naar het punt 1 is.
We noemen een irreducibele matrix A *a-periodiek* als de grootste gemeenschappelijke deler d van de lengtes van alle gesloten paden precies 1 is. Als $d > 1$ dan noemen we A *periodiek* (met periode d). In het bijzonder als A een diagonaal element ongelijk nul heeft dan is A meteen a-periodiek.

Voorbeeld. De volgende matrices zijn irreducibel en periodiek,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Het bewijs van de volgende stelling zullen we niet geven, omdat dit buiten het bestek van ons college valt.

Stelling 2.3.2 (Perron–Frobenius) *Zij A een $m \times m$ matrix met niet-negatieve elementen. We nemen aan dat niet alle eigenwaarden nul zijn. Dan is er een positieve eigenwaarde r zó dat $r \geq |\lambda|$ voor iedere eigenwaarde λ. Bovendien is er een bijbehorende eigenvector met niet-negatieve elementen. Als A irreducibel en a-periodiek is, dan is r een dominante eigenwaarde.*

2.4 Lesliematrices en Markovketens, theorie

In paragraaf 2.1 hebben we Lesliematrices en Markovketens geïntroduceerd, in deze sectie zullen we enkele uitspraken doen over de bijbehorende eigenwaarden.

Stelling 2.4.1 *Beschouw de Lesliematrix* (13) *en definieer de getallen h_i door $h_1 = -g_1$, $h_2 = -s_1 g_2$, $h_3 = -s_1 s_2 g_3$, ..., $h_M = -s_1 \dots s_{M-1} g_M$. Als $h_i = 0$ voor alle i dan zijn alle eigenwaarden van L nul. Stel nu dat de verzameling I van alle i met $h_i \neq 0$ niet leeg is. Als $\mathrm{ggd}_{i \in I}(i) = 1$ dan heeft L een positieve dominante eigenwaarde.*

Bewijs. Door inductie naar M kunnen we laten zien dat de eigenwaardevergelijking van L de vorm

$$\lambda^M + h_1\lambda^{M-1} + \cdots + h_{M-1}\lambda + h_M = 0$$

heeft. Als $h_i = 0$ voor alle i dan is het duidelijk dat alle eigenwaarden nul zijn. Stel $h_i \neq 0$ voor minstens één i en kies m zó dat $h_m \neq 0$ en $h_i = 0$ voor alle $i > m$. Dan hebben we de ontbinding

$$(\lambda^m + h_1\lambda^{m-1} + \cdots + h_m)\lambda^{M-m} = 0.$$

De vergelijking $\lambda^m + h_1\lambda^{m-1} + \cdots + h_m = 0$ kan gezien worden als eigenwaardevergelijking van de (eventueel) kleinere Lesliematrix

$$L' = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_{m-1} & g_m \\ s_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & s_{m-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Omdat $h_m \neq 0$ moet gelden dat $s_i \neq 0$ voor alle $i < m$ en $g_m \neq 0$. Inspectie van de graaf van L' laat zien, dat L' irreducibel is. Verder geldt voor alle $i < m$ dat $h_i = 0 \iff g_i = 0$. Inspectie van de graaf leert ook dat de i waarvoor $g_i \neq 0$ precies lengtes van gesloten paden zijn. Als de grootste gemene deler van deze i nu 1 is, dan is L' a-periodiek. Uit de stelling van Perron-Frobenius volgt nu dat L' en dus ook L een positieve dominante eigenwaarde heeft. □

Stelling 2.4.2 *Zij P een $m \times m$ kansmatrix. Dan is 1 een eigenwaarde en voor alle andere eigenwaarden λ geldt dat $|\lambda| \leq 1$.*

Bewijs. Vermenigvuldig de rijvector $(1, 1, \ldots, 1)$ met P. Omdat P een kansmatrix is, krijgen we weer $(1, 1, \ldots, 1)$. Dus 1 is een eigenwaarde van P. Zij λ een willekeurige eigenwaarde en $(q_1, \ldots, q_m)$ een bijbehorende rij-eigenvector. Kies i zó dat $|q_i|$ maximaal is. Uit $\lambda(q_1, \ldots, q_m) = (q_1, \ldots, q_m)P$ volgt, $\lambda q_i = \sum_{j=1}^m q_j p_{ji}$. Gebruikmakend van het feit dat $\sum_{j=1}^m p_{ji} = 1$ vinden we dat

$$|\lambda q_i| = |\sum_{j=1}^m q_j p_{ji}| \leq \sum_{j=1}^m p_{ji}|q_j| \leq \sum_{j=1}^m p_{ji}|q_i| = |q_i|.$$

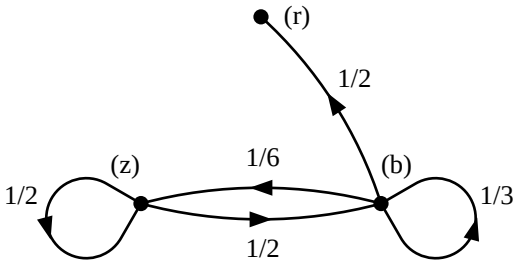
Na deling van de uiterste termen links en rechts door $|q_i|$ krijgen we $|\lambda| \leq 1$. □

Opmerking. Uit de stelling van Perron-Frobenius volgt, dat als P irreducibel en a-periodiek is, de eigenwaarde 1 dominant is. Uit deze stelling volgt ook dat, na eventuele vermenigvuldiging met -1, de eigenvector $\mathbf{v}$ bij 1 niet-negatieve elementen heeft. We kunnen dus een kansvector $\mathbf{v}$ als eigenvector bij 1 nemen. Zij $\mathbf{x}_0$ een beginvector. Uit Stelling (2.2.2) volgt dat er een α is, zó dat $\lim_{n\to\infty} P^n\mathbf{x}_0 = \alpha\mathbf{v}$. Omdat zowel $\mathbf{v}$ als $\mathbf{x}_0$ kansvectoren zijn, moeten we $\alpha = 1$ nemen, en we hebben $\lim_{n\to\infty} P^n\mathbf{x}_0 = \mathbf{v}$.

Beschouw ons voorbeeld

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Uit de graaf behorend bij P zien we dat deze matrix irreducibel en a-periodiek is. De kanseigenvector bij 1 is $(0.4, 0.3, 0.3)^{\mathrm{T}}$. Dus, $\lim_{n\to\infty} P^n \mathbf{x}_0 = (0.4, 0.3, 0.3)^{\mathrm{T}}$ bij elke stochastische begintoestand $\mathbf{x}_0$.
Een nuttige variant op de kansmatrices vormen de *defectieve kansmatrices*. Dat zijn $m \times m$ matrices met niet-negatieve elementen, waarvan de som van de elementen in elke kolom kleiner of gelijk 1 is.
Neem weer ons voorbeeld van de weermatrix (15). Stel dat we op dag 0 zon hebben. De kans dat we op dag n regen hebben kunnen we bepalen door het element in de eerste kolom, derde rij, d.w.z. plaats (3,1) van de matrix P^n te berekenen. Stel nu, dat we willen weten wat de kans is dat het op de n-de dag *voor het eerst* regent sinds dag 0. Hiertoe bekijken we de defectieve kansmatrix $\tilde{P}$ die we uit P krijgen door alle elementen in de derde kolom door nullen te vervangen. De gevraagde kans is gelijk aan het element op plaats (3,1) in de matrix $\tilde{P}^n$. Bekijk de graaf behorend bij $\tilde{P}$,



De bogen die uit (r) vertrekken zijn nu allemaal uitgewist. Dit heeft als effect dat een weersontwikkeling waarin al eerder dan dag n regen is voorgekomen, nu niet wordt meegeteld. Er is immers geen gesloten pad meer dat van (r) naar (r) loopt. De overige elementen in $\tilde{P}^n$ hebben nu ook een andere betekenis gekregen. Het element op plaats (2,1) is nu bijvoorbeeld de kans dat het bewolkt is op dag n zonder dat het daarvoor heeft geregend.
We kunnen nu ook andere vragen stellen zoals, gegeven dat we op dag 0 zon hebben, hoe lang duurt het gemiddeld voordat het gaat regenen? Intuïtief kunnen we dit gemiddelde uitrekenen met de formule

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \times \text{kans dat het op dag } n \text{ regent en niet eerder}$$

ofwel, het element op plaats (3,1) in de matrix $\sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{P}^n$. Dat deze laatste som convergeert blijkt uit het volgende Lemma.

Lemma 2.4.3 *Zij A een $m \times m$ matrix en stel dat alle eigenwaarden in absolute waarde*

kleiner dan 1 *zijn. Dan zijn de reeksen*

$$\sum_{n=1}^{\infty} A^n \text{ en } \sum_{n=1}^{\infty} nA^n$$

convergent en hun som bedraagt respectievelijk $A(I-A)^{-1}$, $A(I-A)^{-2}$.

Voor 1×1 matrices, d.w.z. gewone getallen, was dit Lemma reeds lang bekend. Het Lemma zelf kan gezien worden als generalisatie.
In ons voorbeeld heeft $\tilde{P}$ de eigenwaarden 0, 0.1162, 0.7171 en dus

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{P}^n = \tilde{P}(I-\tilde{P})^{-2} = \begin{pmatrix} 52/9 & 22/9 & 0 \\ 66/9 & 30/9 & 0 \\ 42/9 & 24/9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusie, gemiddeld duurt het $42/9 = 4.666\ldots$ dagen voor het gaat regenen na zonneschijn.

2.5 Markovketens, voorbeelden

We bestuderen nu een aantal grotere voorbeelden van Markovketens.

Voorbeeld 1. Beschouw het volgende spel. Twee spelers A en B beginnen ieder met een bedrag van s_A, respectievelijk s_B Euro. Stel $s_A + s_B = s$. Het spel bestaat uit het herhaald opgooien van een eerlijke munt. Eerlijk wil zeggen dat de kans op kop even groot is als de kans op munt. Bij 'kop' betaalt A een Euro aan B, bij 'munt' betaalt B een Euro aan A. Het spel gaat net zolang door tot één van de spelers blut is. De ander heeft dan gewonnen en kan het geld houden. Natuurlijke vragen die hierbij opkomen zijn, 'wat is de kans van A, of B, om te winnen?' of, 'hoe lang duurt een spel gemiddeld?' dit alles afhankelijk van de beginverdeling s_A, s_B. Hoewel er iets simpeler directe wegen zijn, zullen we deze vragen via Markovketens oplossen. Als toestanden van het spel nemen we het bedrag dat A in zijn bezit kan hebben, dus $0, 1, 2, \ldots, s$. De toestanden 0, s zijn natuurlijk de eindtoestanden van het spel waarbij A verloren respectievelijk gewonnen heeft. We stellen het spel voor als een Markovketen met $(s+1) \times (s+1)$ matrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & & 0 & 0 \\ & \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Als beginvector $\mathbf{x}_0$ nemen we de vector met overal nullen, behalve op plaats s_A, waar een 1 staat. We zien direct dat de vectoren $(1, 0, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$ en $(0, 0, \ldots, 0, 1)^{\mathrm{T}}$ eigenvectoren zijn bij 1. Dus 1 heeft multipliciteit groter dan 1 en is geen dominante eigenwaarde.

Het is echter wel duidelijk, althans af te leiden uit opgave 16 in 2.6, dat $P^n\mathbf{x}_0$ convergeert naar een vector van de vorm $(p_B, 0, \ldots, 0, p_A)^{\mathrm{T}}$ die we kunnen interpreteren als toestand waarin het spel is afgelopen en waarin A, B met kansen p_A respectievelijk p_B hebben gewonnen. We hoeven alleen nog p_A en p_B te bepalen. Merk hiertoe op, dat bij eigenwaarde 1 behalve de rij-eigenvector $(1, 1, \ldots, 1)$ ook de rij-eigenvector $(0, 1, 2, \ldots, s)$ bestaat (controleer!). Vermenigvuldig deze rijvector van rechts met de relatie $\lim_{n\to\infty} P^n\mathbf{x}_0 = (p_B, 0, \ldots, 0, p_A)^{\mathrm{T}}$. We vinden dan,

$$(0, 1, 2, \ldots, s)\mathbf{x}_0 = (0, 1, 2, \ldots, s)(p_B, 0, \ldots, 0, p_A)^{\mathrm{T}}$$

en dus $s_A = sp_A$, waaruit volgt $p_A = s_A/s$ en $p_B = s_B/s$.
We geven nu aan wat de gemiddelde tijdsduur van een spel zal zijn. Hiertoe beschouwen we de defectieve kansmatrix $\tilde{P}$ die uit P ontstaat door de enen door nullen te vervangen. Als we beginnen met een toestand $\mathbf{v}$, dan is de component op plaats 0 van de vector $\tilde{P}^n\mathbf{v}$ precies de kans dat A op de n-de stap verliest, de component op plaats s is precies de kans dat A op de n-de stap wint. De kans dat het spel eindigt bij de n-de stap is dus de som van deze twee componenten, met andere woorden, gelijk aan $(1, 0, \ldots, 0, 1)\tilde{P}^n\mathbf{v}$. De gemiddelde tijdsduur van een spel is gelijk aan de som

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(1, 0, \ldots, 0, 1)\tilde{P}^n\mathbf{v}$$

en dit is gelijk aan

$$(1, 0, \ldots, 0, 1)(I - \tilde{P})^{-2}\tilde{P}\mathbf{v}.$$

Neem bijvoorbeeld $s = 4$ en kies als startvector $(0, 0, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ met andere woorden, zowel A als B begint met twee Euro. We hebben

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

en eenvoudige berekening levert $(1, 0, 0, 0, 1)(I-\tilde{P})^{-2}\tilde{P}(0, 0, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}} = 4$. De gemiddelde spelduur bij een startbedrag van twee Euro voor elke speler is dus 4 muntworpen. Het is een interessante opgave om deze berekening ook in het algemeen uit te voeren. Het blijkt dat het verwachtte aantal muntworpen precies s_As_B is. Met andere woorden, als A met 1 Euro start en B met 100 Euro dan kan er gemiddeld gezien opvallend lang gespeeld worden, namelijk 100 keer.
Tenslotte merken we op dat het met de matrix $\tilde{P}$ ook mogelijk is de winstkans van bijvoorbeeld A te bepalen. Dat is namelijk precies de som van de kansen dat A in precies de eerste, precies de tweede, ..., precies de n-de, ... stap wint, dus de component op plaats s in de som

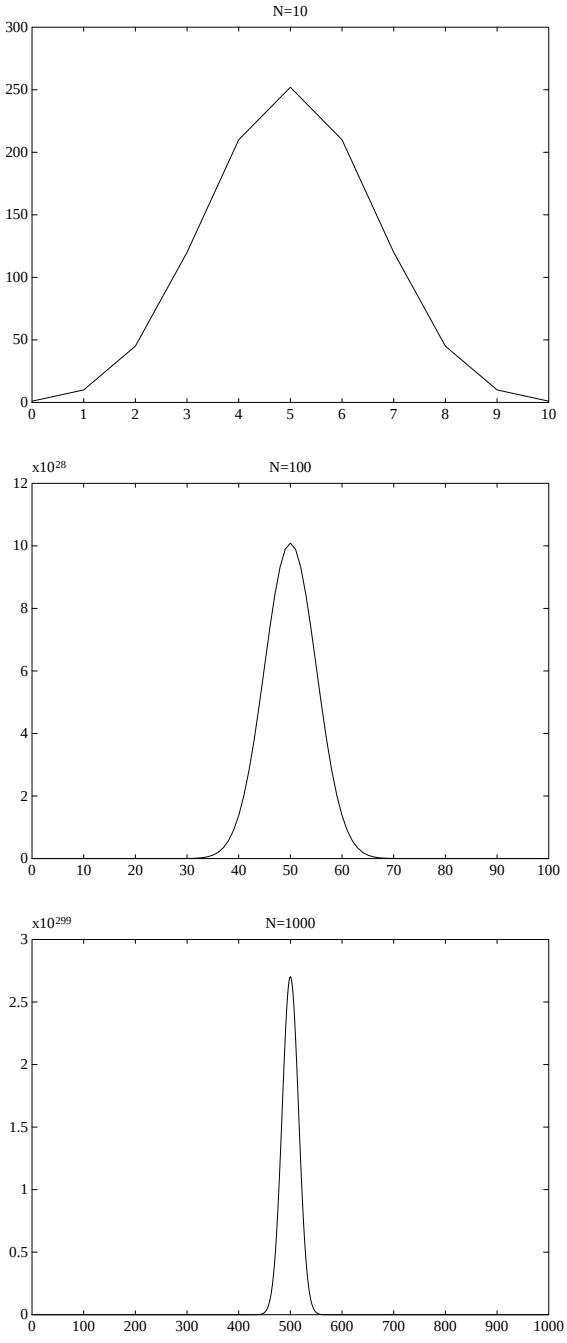
$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}^n\mathbf{v} = (\mathrm{Id} - \tilde{P})^{-1}\mathbf{v}$$

welke in praktische gevallen kan worden berekend.

Voorbeeld 2. Het volgende voorbeeld staat bekend als het *urnenmodel* of *diffusiemodel* van Ehrenfest. Stel we hebben twee identieke vaten I en II. Vat I bevat een vacuüm en vat II bevat een gas. We verbinden de vaten door een slang en openen de kraan. Het is een bekend feit dat het gas zich gelijkelijk zal verdelen over de twee vaten. Deze verdeling is een irreversibel of onomkeerbaar proces. We zouden namelijk zeer vreemd opkijken als na enige tijd al het gas zich weer in het oorspronkelijke vat II zou bevinden. Het merkwaardige is echter dat de bewegingswetten van de gasmoleculen wel reversibel zijn met betrekking tot de tijd. Van twee moleculen die volgens een zekere baan bewegen, botsen en weer verdergaan is het heel goed voorstelbaar dat deze volgorde ook omgekeerd doorlopen wordt met precies tegengestelde snelheden. Als we dus op zeker moment de snelheid van onze moleculen in de vaten tegengesteld zouden maken aan wat ze zijn, dan moet na enige tijd al het gas zich weer in vat II bevinden. Vanuit de mechanica bezien is het dus heel goed mogelijk dat het gas zich weer in één vat bevindt! De gangbare uitweg uit deze paradox is door te zeggen dat het weliswaar mechanisch mogelijk is dat al het gas zich weer in vat II bevindt, maar dat de kans hierop zó astronomisch klein is, dat we dat nooit zullen meemaken.
Naar aanleiding van dit probleem stelde Ehrenfest een (fictief) model voor, waarvan we hier de volgende variant presenteren. Stel dat er in totaal N gasmoleculen zijn, die we van 1 tot en met N genummerd denken. De mogelijke toestanden van ons systeem kunnen we kenmerken door het aantal gasmoleculen k in vat I. Het systeem ontwikkelt zich volgens de volgende regel. Elk tijdvak roepen we een willekeurig nummer tussen 1 en N af en gooien tevens een zuivere munt op. We kijken in welk vat het molecuul met dat nummer zich bevindt en als we 'kop' hebben, brengen het naar het andere vat. Bij 'munt' doen we niets. De duur van ons tijdvak doet er niet zo veel toe, het is toch een fictief model. Stel dat het systeem zich in toestand k bevindt (k moleculen in vat I). Dan is de kans dat we daarna weer in toestand k zitten gelijk aan $1/2$ (=kans op 'munt'). De kans dat een willekeurig molecuul zich in vat I bevindt is gelijk aan k/N. Dus de kans dat we in het volgende tijdvak toestand $k-1$ aantreffen is $k/2N$. De kans dat we toestand $k+1$ aantreffen is dan $(N-k)/2N$. We hebben nu te maken met een Markovketen met overgangsmatrix $P = (p_{ij})$ waarin $p_{kk} = 1/2$, $p_{k-1,k} = k/2N$, $p_{k+1,k} = (N-k)/2N$ voor alle $k = 0, 1, \ldots, N$ en $p_{ij} = 0$ voor alle andere indices.
Met behulp van de bijbehorende graaf (teken deze!) is het gemakkelijk in te zien dat P irreducibel en a-periodiek is. Wij beweren nu dat de eigenvector bij 1 gegeven wordt door $(b_0, b_1, \ldots, b_N)^{\mathrm{T}}$ waarin $b_i = \binom{N}{i}$ de i-de binomiaalcoëfficiënt is. Het bewijs gaat als volgt, voor alle i geldt dat

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{N} p_{ij}\binom{N}{j} &= p_{i,i-1}\binom{N}{i-1} + p_{ii}\binom{N}{i} + p_{i,i+1}\binom{N}{i+1} \\
&= \frac{N-(i-1)}{2N}\binom{N}{N-(i-1)} + \frac{1}{2}\binom{N}{i} + \frac{i+1}{2N}\binom{N}{i+1} \\
&= \frac{1}{2}\binom{N-1}{i-1} + \frac{1}{2}\binom{N}{i} + \frac{1}{2}\binom{N-1}{i} \\
&= \frac{1}{2}\binom{N}{i} + \frac{1}{2}\binom{N}{i} = \binom{N}{i}.
\end{aligned}$$

Hier is een (geschaalde) grafiek van $\binom{N}{k}$ als functie van k voor de gevallen $N = 10$, 100, 1000.



Als we N groter maken zien we dat de piek in deze grafiek steeds scherper wordt. Stellen we de lengte van het interval $[0, N]$ op 1, dan blijkt de breedte van de piek ongeveer $1/\sqrt{N}$ te zijn.

De som van al deze binomiaalcoëfficiënten $b_i = \binom{N}{i}$ is gelijk aan

$$\sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} = (1+1)^N = 2^N$$

en de toestanden van onze Markovketen convergeren naar de kansvector

$$\left(\frac{1}{2^N}\binom{N}{0}, \frac{1}{2^N}\binom{N}{1}, \ldots, \frac{1}{2^N}\binom{N}{k}, \ldots, \frac{1}{2^N}\binom{N}{N}\right)^{\mathrm{T}}.$$

In het bijzonder zien we dat in deze *stationaire toestand* de kans op toestand 0, alle moleculen in vat II, gelijk is aan $1/2^N$. Als N gelijk is aan het getal van Avogadro, ongeveer 6×10^{23}, dan is dit inderdaad een astronomisch kleine kans.

2.6 Oefeningen

0. In deze opgave zijn γ_1 en γ_2 complexe getallen en $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} + i\mathbf{w}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v} - i\mathbf{w}$ met $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$ reële lineair onafhankelijke vectoren (van dimensie ≥ 2).

   (a) Bewijs dat de vector $\mathbf{y} := \gamma_1\mathbf{v}_1 + \gamma_2\mathbf{v}_2$ reëel-waardig is precies dan als $\gamma_1 = \overline{\gamma_2}$.

   (b) Schrijf $\gamma_1 = a + ib = r\exp(i\delta)$ voor geschikte reële getallen a, b, r, δ (kan dat? Wat is de relatie tussen γ_1, a, b, r en δ?). Stel $\gamma_2 = \overline{\gamma_1}$.
   Laat zien dat $\mathbf{y} = a\mathbf{v} - b\mathbf{w} = r\cos(\delta)\mathbf{v} - r\sin(\delta)\mathbf{w}$.

   (c) Stel voor de reële 2×2 matrix $\mathbf{A}$ geldt $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$ met, voor $R, \phi \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \overline{\lambda}_2 = R\exp(i\phi)$. Bewijs dat voor reële vectoren $\mathbf{x}_0$ geldt

   $$\mathbf{A}^n\mathbf{x}_0 = rR^n\cos(n\phi + \delta)\mathbf{v} - rR^n\sin(n\phi + \delta)\mathbf{w},$$

   waarbij de reële getallen r en δ bepaald zijn door $\mathbf{x}_0$ (neem $n = 0$ om r en δ te vinden). Weet je nu op welke basis gedoeld wordt in de laatste alinea van §2.2?

1. De overlevingsfractie $s > 0$ voor nieuwgeborenen in een dierpopulatie is afhankelijk van de strengheid van de winter. We bestuderen een model dat alleen de eerste drie levensjaren omvat. We delen onze populatie op in 1, 2 en 3-jarigen en tellen de populatie om het jaar. De éénheid van opdeling van onze populatie moet immers gelijk zijn aan het tijdvak waarover we kijken. Het aantal k-jarige dieren in tijdvak n geven we aan met $N_n(k)$. Zij L de bijbehorende Lesliematrix

   $$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ s & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Onze populatie wordt beschreven door het model

   $$\mathbf{N}_{n+1} = L\mathbf{N}_n, \qquad \mathbf{N}_n = \begin{pmatrix} N_n(1) \\ N_n(2) \\ N_n(3) \end{pmatrix}$$

   waarbij de beginpopulatie $\mathbf{N}_0$ gegeven is.

(a) Teken de bij L horende gerichte graaf en onderzoek deze op irreducibiliteit en periodiciteit.

(b) Toon aan dat L een positieve dominante eigenwaarde heeft.

(c) Stel $\lambda \neq 0$ is een eigenwaarde van L. Bepaal een eigenvector bij λ in termen van s en λ.

(d) Stel de eigenwaardevergelijking van L op.

(e) Bepaal m.b.v. het vorige onderdeel de kleinste overlevingsfactie s_0 zó dat de populatie kan blijven voortbestaan in de tijd. Is er bij deze s_0 een stationaire populatieverdeling mogelijk? Zo ja, bepaal deze dan.

2. Een populatie dieren is verdeeld in drie leeftijdsgroepen met bijbehorende Lesliematrix gegeven door

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 12 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Op $t = 0$ is de samenstelling van de dierpopulatie $(4, 3, 1)$.

(a) Bepaal de samenstelling van populatie op de tijdstippen $t = 1$, 2, 3.

(b) Bepaal de eigenwaarden van de Lesliematrix L.

(c) Bepaal de onderlinge verhouding van de aantallen in elke leeftijdsgroep als $t \to \infty$. En bereken $\lim_{n\to\infty} \dfrac{L^n}{2^n} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Bepaal $\lim_{n\to\infty} A^n \mathbf{v}$ waarin

$$A = \begin{pmatrix} 3/2 & -1 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Een keverpopulatie verdeeld in drie leeftijdsgroepen heeft de bijbehorende Lesliematrix

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Toon aan dat L periodiek is en bepaal de bijbehorende periode.

(b) Heeft L een dominante eigenwaarde?

5. We keren weer even terug naar de sternpopulatie uit het begin van ons hoofdstuk en wijzen op een subtiel punt. Mogen we uit de relatie

$$N_{n+1}(1) = 2N_n(2) + 4N_n(3)$$

concluderen dat een twee-jarig vrouwtje gemiddeld zorgt voor 2 vrouwelijke nakomelingen? Zo nee, wat is dan het werkelijke gemiddelde aantal?

6. We beschouwen een plantenpopulatie waarvan elke plant in augustus een hoeveelheid zaden produceert. Deze zaden kunnen het volgend jaar in mei ontkiemen, maar het kan ook gebeuren dat ze in mei van het jaar daarop ontkiemen of zelfs nog later. De kans op ontkiemen vermindert echter met de jaren. Stel een model op in de vorm van een twee bij twee Lesliematrix waarmee het voortbestaan van de populatie bestudeerd kan worden. Onze aannames zijn de volgende,

   γ = het aantal zaden per plant in augustus geproduceerd.
   α = fractie van de éénjarige zaden dat in mei ontkiemt.
   β = fractie van de tweejarige zaden dat in mei ontkiemt.
   σ = fractie van de zaden dat de winter overleeft.
   Zaden ouder dan twee jaar zijn niet meer levensvatbaar.

   Laat in het bijzonder zien dat de conditie voor het voortbestaan van de populatie luidt: $\sigma\gamma\alpha\frac{1+\sqrt{1+\delta}}{2} \geq 1$ waarin $\delta = 4\beta(1-\alpha)/\gamma\alpha^2$. Geef een interpretatie van de factor $\sigma\gamma\alpha$.

7. In 1202 stelde Fibonacci het volgende probleem dat hij tevens oploste. Stel dat elk konijnenpaar slechts twee keer nakomelingen kan krijgen, als ze één en twee maanden oud zijn. Bij elk zo'n blijde gebeurtenis wordt er één nieuw paar konijnen geproduceerd. Stel dat alle konijnen overleven. Hoeveel paar zullen er na n generaties zijn? Om dit probleem op te lossen stellen we

$$\begin{aligned} R_n^0 &= \text{aantal nieuwgeboren paren in generatie } n \\ R_n^1 &= \text{aantal 1-maand oude paren in generatie } n \\ R_n^2 &= \text{aantal 2-maand oude paren in generatie } n \end{aligned}$$

   Stel een Lesliematrix op. Laat in het bijzonder zien dat $R_{n+1}^0 = R_n^0 + R_{n-1}^0$. En geef een expliciete uitdrukking van R_n^0 als functie van n door middel van een basis van eigenvectoren. Stel dat Fibonacci oorspronkelijk één konijnenpaar had, m.a.w. $R_0^0 = R_1^0 = 1$. Schrijf de aantallen R_n^0 voor de eerste paar generaties op. Hoe hangen deze samen met de *rij van Fibonacci* ?

8. Een systeem kan in drie toestanden verkeren en gedraagt zich volgens een Markov keten met overgangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Geef de gerichte graaf bij P.
   (b) Bepaal de stationaire toestandsvector
   (c) Gegeven is dat het systeem zich in toestand 3 bevindt. Wat is de kans dat toestand 1 na 2 stappen wordt aangenomen? En dat in twee stappen het systeem weer in toestand 3 is?
   (d) Gegeven is dat het systeem zich in toestand 1 bevindt. Hoeveel stappen duurt het gemiddeld opdat toestand 3 voor het eerst bereikt wordt?

9. Twee honden hebben samen last van 4 vlooien. Tussen tijdstip n en $n+1$ springt een willekeurig gekozen vlo van de ene hond op de andere over.

   (a) Laat zien dat dit proces gemodelleerd kan worden als Markovketen met het aantal vlooien op één van de honden als toestanden en de volgende overgangsmatrix,
   $$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

   (b) Laat zien dat de matrix irreducibel is.

   (c) Bepaal de periode van de matrix.

   (d) Laat zien dat er precies één stationaire toestand is en bepaal deze.

   (e) Geef een voorbeeld voor een beginverdeling $\mathbf{p}$ zo dat $P^n\mathbf{p}$ geen limiet heeft als $n \to \infty$.

   (f) Kun je een stationaire verdeling aangeven in het geval van n vlooien?

   (Dit hond-vlo model is een variant op het urnenmodel van Ehrenfest).

10. Stel
    $$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

    (a) Bepaal alle stationaire verdelingen van P (d.w.z. de eigenvectoren bij 1).

    (b) Bepaal P^n als $n \to \infty$.

    (c) Bepaal $\lim_{n\to\infty} P^n\mathbf{p}$ voor willekeurige startverdelingen $\mathbf{p}$. Is deze limiet onafhankelijk van $\mathbf{p}$?

11. Een muis heeft een simpele woning: drie kamers naast elkaar met een doorgang tussen 1 en 2 en tussen 2 en 3. Als de muis in kamer 1 of 3 zit gaat hij in het volgende tijdvak naar 2. Als hij in 2 zit gooit de muis een munt op (is dit een plausibel model?) en gaat met kans p naar kamer 1 en met kans $1-p$ naar kamer 3. De muis blijft nooit in dezelfde kamer.

    (a) Modelleer deze situatie als Markovketen met overgangsmatrix P.

    (b) Laat zien dat de keten irreducibel is.

    (c) Bepaal de periodiciteit.

    (d) Bereken P^n voor willekeurige n.

    (e) Laat zien dat er precies één stationaire kansverdeling is.

12. Een docent vertelt student 1 in goed vertrouwen dat er een som over Markovketens op het tentamen komt. De student kan haar/zijn mond niet houden en vertelt het aan student 2, die het weer doorvertelt aan student 3, enzovoorts. Door het lawaai in de kantine is de kans dat het bericht goed doorkomt gelijk aan p en verkeerd met kans $q = 1 - p$ per stap.

    (a) Modelleer deze situatie met een Markovketen met 2×2-overgangsmatrix P.

    (b) Bereken P^n voor willekeurige n.

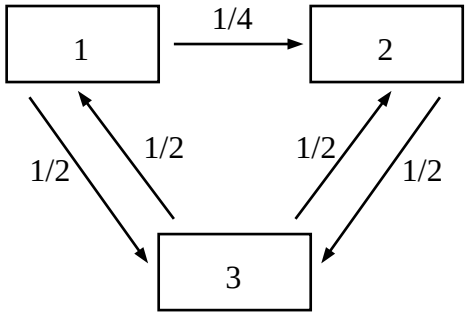
    (c) Laat zien dat de kansverdeling voor het bericht dat doorkomt uiteindelijk onafhankelijk is van wat de docent gezegd heeft.

13. Beschouw een drietal communicerende vaten waarbij uitwisseling van een fysische of chemische substantie plaatsvindt. Laat $x_n(i)$ de hoeveelheid materiaal (in gram) in vat i zijn op tijdstip n in minuten gemeten. De toestand van het systeem wordt beschreven door de toestandsvector $\mathbf{x}_n = (x_n(1), x_n(2), x_n(3))^{\mathrm{T}}$. Als model nemen we aan dat voor elk geordend paar i, j er in de n-de minuut een hoeveelheid $a_{ij}x_n(j)$ van vat j naar i stroomt. Hierin is a_{ij} een coëfficiënt die onafhankelijk van het tijdstip is. Merk op dat er natuurlijk een tegenstroom van i naar j is ter grootte $a_{ji}x_n(i)$.

    (a) Definiëer $a_{ii} = -\sum_{j\neq i} a_{ji}$, $i = 1, 2, 3$. Toon aan dat

$$x_{n+1}(i) = x_n(i) + \sum_{k=1}^{3} a_{ik}x_n(k), \qquad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

    Definiëren we $A = (a_{ij})$ dan geldt in matrixvorm de lineaire relatie $\mathbf{x}_{n+1} = (I + A)\mathbf{x}_n$. Merk op dat $I + A$ een stochastische matrix is. Beschouw het volgende overdrachtsdiagram voor de drie vaten,



    (b) Bepaal de matrix A en toon aan dat $I + A$ een dominante eigenwaarde heeft.

    (c) Bepaal het gedrag van $\mathbf{x}_n$ voor $n \to \infty$ als gegeven is dat $\mathbf{x}_0 = (10, 0, 10)^{\mathrm{T}}$.

    (d) Gegeven is dat

$$I + A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Schets het bijbehorende diagram van de communicerende vaten. Toon aan dat $I+A$ periodiek is en bepaal de periode. Bepaal $(I+A)^n\mathbf{x}_0$ voor willekeurige n.

14. (Moeilijk) Zij $A = (a_{ij})$ en $B = (b_{ij})$ een tweetal $m \times m$ matrices met niet-negatieve coëfficiënten. Zij λ_A, λ_B de bijbehorende grootste positieve eigenwaarden. Stel dat voor elk paar i, j geldt dat $a_{ij} \geq b_{ij}$. Bewijs dat $\lambda_A \geq \lambda_B$.

15. Zij A een symmetrische $m \times m$ matrix met dominante eigenwaarde 1. Zij λ het maximum van de absolute waarden van de overige eigenwaarden. Zij gegeven de vector $\mathbf{v}_0$. We weten dat er een $\mathbf{v}$ is, zó dat $\mathbf{v} = \lim_{n\to\infty} A^n\mathbf{v}_0$. Bewijs dat voor alle $n \geq 0$ geldt, $|A^n\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}| \leq \lambda^n|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}|$. (Hint: gebruik het feit dat A een orthonormale basis van eigenvectoren heeft).

16. Bekijk de matrix M die je krijgt door in voorbeeld 1 in 2.5 de eerste en laatste kolom en rij van P te schrappen. Laat zien dat een voldoende hoge macht van M kolomsommen kleiner dan 1 heeft, en kijk dan naar het bewijs van Stelling 2.4.2 om in te zien dat $\lim_{n\to\infty} M^n = 0$. Generaliseer.

17. De drie supermarkten in een dorp, supermarkt 1, 2 en 3, zijn verwikkeld in een felle prijzenoorlog. De inwoners van het dorp blijken niet erg trouwe klanten te zijn: er zijn er aardig wat die per week vaststellen waar ze hun boodschappen gaan doen.

    We definiëren, voor $1 \leq i \leq 3$,
    $k_n(i)$ = het aantal klanten dat in week n (sinds het begin van de prijzenoorlog) zijn boodschappen doet in supermarkt i, en

    $$\mathbf{k}_n = (k_n(1), k_n(2), k_n(3))^{\mathrm{T}}.$$

    Er geldt

    $$\mathbf{k}_{n+1} = P\mathbf{k}_n,$$

    met

    $$P = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

    (a) Geef de bij de overgangsmatrix P horende gerichte graaf. Is P a-periodiek? Irreducibel? Is P een kansmatrix? (Geef toelichting)

    (b) Wat is de kans dat een klant die in week 0 zijn boodschappen deed in supermarkt 2 voor het eerst in supermarkt 1 winkelt in week 3?

    (c) Heeft P een dominante eigenwaarde?

    (d) Wat is, voor $k = (k_1, k_2, k_3)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$ met $k_1, k_2, k_3 \geq 0$,

    $$\lim_{n\to\infty} P^n k?$$

Supermarkt 1 maakt veel reclame buiten het dorp, en trekt daardoor wekelijks tien klanten van buiten het dorp die eerder hun boodschappen in hun eigen dorp deden. Neveneffect hiervan is, dat het zo druk wordt in supermarkt 1 dat een deel van de klanten besluit zijn boodschappen voortaan niet meer in het dorp te doen. In deze nieuwe situatie geldt:

$$\mathbf{k}_{n+1} = A\mathbf{k}_n + \mathbf{b}, \tag{16}$$

met

$$A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6-\alpha & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

met $0 < \alpha \leq 6$.

(e) Geef de stationaire oplossing van (16). Is de stationaire oplossing stabiel als $\alpha = 4$?

18. In deze opgave bestuderen we een populatie schapen. Deze worden elk jaar rond Kerst geboren. Van de lammetjes overleeft $\frac{5}{6}$ de eerste 2 jaar, waarna ze zelf beginnen lammetjes te werpen, eerst gemiddeld $\frac{3}{5}$ en in het volgende jaar (als ze dus zelf drie jaar zijn) gemiddeld 1. Alle tweejarige schapen worden ook drie jaar oud. De herder zorgt ervoor dat geen enkel schaap vier jaar oud wordt, en hij bepaalt eveneens de parameter $p \in]0,1[$ —de fractie van gezondgeboren lammetjes die nog voor Pasen naar de slachtbank worden afgevoerd. (Deze fractie p is in bovenstaande $\frac{5}{6}$ nog niet verwerkt, en we gaan voor het gemak ervan uit dat de slachtbank tussen kerst en Pasen de enige doodsoorzaak is.)

(a) Stel een model op. Laat hiervoor $\mathbf{s}_n \in \mathbb{R}^4$ het aantal schapen in jaar n zijn, gesorteerd op leeftijd, en stel de 4×4 matrix $\mathbf{L}$ op die de dynamica

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{L}\,\mathbf{s}_n$$

bepaalt. Hoe bepaal je gegeven de overgangsmatrix $\mathbf{L}$ in het algemeen de overgang van staat i naar staat j over n jaar?

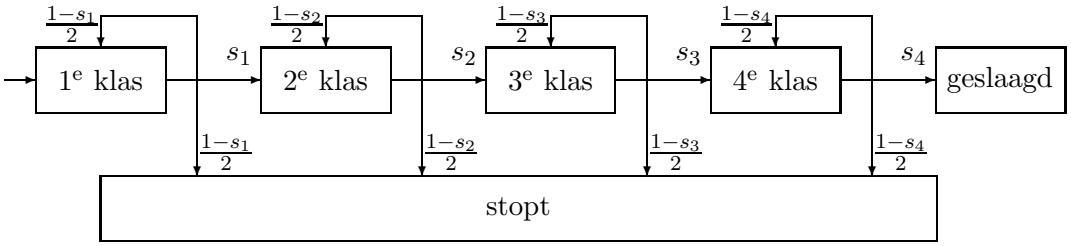
(b) Geef de bijbehorende gerichte graaf. Is $\mathbf{L}$ aperiodiek? Heeft $\mathbf{L}$ een dominante eigenwaarde?

(c) Stel de eigenwaardevergelijking op voor $\mathbf{L}$.

(d) Bereken de waarde van p waarvoor 1 een eigenwaarde is van $\mathbf{L}$ en laat zien dat 1 dan de dominante eigenwaarde is. *Hint: laat zien dat voor de tweede reële oplossing λ van de eigenwaardevergelijking $-1 < \lambda < 0$ is. Waarom moeten de complex geconjugeerde eigenwaarden dan eveneens in absolute waarde echt kleiner dan 1 zijn?*

(e) Als $p = \frac{1}{4}$ en $\mathbf{s}_0 = (600, 300, 250, 50)$, wat is dan de limiet $\lim_{n\to\infty} \mathbf{L}^n\mathbf{s}_0$?

19. In onderstaand diagram is het verwachte studieverloop voor een student aan een vierjarige opleiding fysiotherapie weergegeven. De kans dat een student in de i^e klas aan het eind van het jaar overgaat naar klas $i+1$ ($1 \leq i \leq 3$) of slaagt ($i = 4$) is s_i, waarbij $0 \leq s_i \leq 1$. De kans dat een student in klas i blijft zitten en de kans dat een student in klas i de studie staakt, zijn beide gelijk aan $\frac{1-s_i}{2}$.



Onderzoek heeft uitgewezen dat er jaarlijks behoefte is aan 100 nieuwe fysiotherapeuten. Er zijn echter jaarlijks meer dan 1000 mensen die deze studie willen gaan volgen. Om de markt niet te overspoelen, wordt er een studiestop ingesteld. Het bestuur van de opleiding wil weten hoeveel studenten er jaarlijks tot de opleiding kunnen worden toegelaten. Daarnaast is het bestuur geïnteresseerd in mogelijke maatregelen om op de kosten van de opleiding te besparen.

We bekijken twee modellen voor bovenstaand probleem.

Voor ons eerste model zij $x_1(n)$, $x_2(n)$, $x_3(n)$, $x_4(n)$ het aantal eerste-, tweede-, derde- en vierdejaars studenten in jaar n, en $\mathbf{x}_n := (x_1(n), x_2(n), x_3(n), x_4(n))^{\mathrm{T}}$. Veronderstel dat er jaarlijks een instroom van I nieuwe eerstejaars studenten is.

Opdracht 1 *Geef een recursie die $\mathbf{x}_{n+1}$ uitdrukt in $\mathbf{x}_n$ en I.*

Opdracht 2 *Laat zien dat bovenstaande recursie een evenwichtsoplossing heeft, en bepaal deze.*

Opdracht 3 *Bewijs dat iedere oplossing naar deze stationaire oplossing convergeert.*

Om de waarden van de s_i te bepalen, is het studieverloop van alle studenten fysiotherapie gedurende vijf jaar gevolgd. Het resultaat is

$$s_1 = \frac{1}{2}, \quad s_2 = \frac{2}{3}, \quad s_3 = \frac{3}{4}, \quad s_4 = \frac{4}{5}. \tag{17}$$

Opdracht 4 *Hoeveel studenten kunnen er elk jaar toegelaten worden om uiteindelijk een jaarlijkse uitstroom van 100 nieuwe fysiotherapeuten te garanderen?*

De opleiding krijgt een vergoeding voor elke afgestudeerde fysiotherapeut, maar investeert natuurlijk ook in studenten die niet afstuderen.

Opdracht 5 *Wat zijn de kansen dat een student de studie met een diploma afsluit, respectievelijk stopt zonder diploma?*

De opleiding moet bezuinigen, en wil het effect van een aantal verschillende scenario's bestuderen. Daartoe vatten we het in het diagram beschreven systeem op als een Markovketen met zes toestanden, namelijk student in het eerste jaar,..., student in het vierde jaar, geslaagd en gestopt zonder diploma. De waarden van de parameters s_i worden nog steeds gegeven door (17).

Opdracht 6 *Geef de overgangsmatrix P. Is deze irreducibel?*

Opdracht 7 *Bepaal met defectieve kansmatrices afgeleid van P de kansen dat een student zijn opleiding uiteindelijk met een diploma afsluit, respectievelijk stopt zonder diploma.*

Opdracht 8 *Gebruik* `Mathematica` *om te bepalen hoe lang een student* die zijn diploma haalt *gemiddeld heeft gestudeerd.*

Opdracht 9 *Gebruik* `Mathematica` *om te bepalen hoe lang een student* die de studie voortijdig staakt *gemiddeld heeft gestudeerd.*

Opdracht 10 *Per jaar kost een student fysiotherapie €(10.000). Wat zijn de gemiddelde totale kosten van deze opleiding per aankomende student? Wat zijn dus de gemiddelde totale kosten voor elke geslaagde fysiotherapeut?*

In het kader van bezuinigingen wordt voorgesteld om een strenge selectie toe te passen in het eerste jaar: dit jaar mag niet meer overgedaan worden, d.w.z. iedereen die dit jaar niet meteen haalt, moet stoppen. Verder verandert er niets aan de opleiding, zodat de kans dat een student overgaat naar het volgende jaar onveranderd is.

Opdracht 11 *Wat zijn nu de antwoorden op bovenstaande vragen? Is door deze bezuiniging een grotere efficiëntie bereikt, d.w.z. zijn de totale kosten afgenomen? Geef een verklaring, en geef commentaar op het gebruikte model.*

Opdracht 12 *Bewijs dat, gegeven een studieduur van vier jaar en een uitstroom van 100 geslaagden per jaar, de totale kosten minstens 4 miljoen zijn. In welke situatie wordt dit bereikt? Is dit wenselijk?*

De strenge selectie in het eerste jaar wordt niet ingevoerd, en alles blijft bij het oude, tot van hogerhand opdracht wordt gegeven het rendement van de opleiding (d.w.z. de kans dat een student de opleiding met een diploma verlaat) te verhogen. Men besluit hierbij zich te richten op een bepaald jaar: door studenten in jaar j van de opleiding intensiever te begeleiden, hoopt men s_j te verhogen.

Opdracht 13 *Op welk jaar kan men zich het beste concentreren?*

De opleiding moet nog steeds bezuinigen. Het bestuur besluit wiskundigen in te schakelen om tot een succesvol bezuinigingsplan te komen.

Opdracht 14 *Bedenk een mogelijke bezuinigingsmaatregel, en beantwoord Opdracht* 7 *t/m* 10 *opnieuw voor de door jou voorgestelde nieuwe situatie. Geef voor- en nadelen van je plan.*

20. We beschouwen een populatie neushoorns in Kenia. Voor de eenvoud, beperken we ons tot de vrouwtjes. De populatie bestaat uit 96 dieren in 5 leeftijdsklassen:

klasse	1	2	3	4	5
aantal	40	24	16	12	4

Uit onderzoek van dergelijke populaties (in andere, maar soortgelijke gebieden) zijn de volgende gegevens naar voren gekomen over de gemiddelde overlevingskansen van de ene naar de andere leeftijdsklasse:

$1 \to 2$	$2 \to 3$	$3 \to 4$	$4 \to 5$
3/5	2/3	3/4	1/3

en over het gemiddeld aantal (vrouwelijke) neushoorns dat per periode per dier in een bepaalde leeftijdsklasse gebaard wordt:

1	2	3	4	5
0	1/6	5/4	1	1

(a) Bepaal de Leslie-matrix A behorende bij deze gegevens.

(b) Ga na dat $(10\ 6\ 4\ 3\ 1)^t$ een eigenvector van A is met eigenwaarde 1.

(c) Ga na dat voor alle andere eigenwaarden λ van A geldt $|\lambda| < 1$.

Het lijkt er dus op, dat we te maken hebben met een tamelijk stabiele populatie. Voor we dit echter kunnen concluderen, moeten we nagaan of de aannamen, die gemaakt zijn bij het opstellen van het model, hier vervuld zijn. Een van de aannamen bij het model van Leslie-matrices voor de beschrijving van populaties is, dat het grote populaties betreft. De reden voor deze aanname was, dat in A gemiddeldes staan en gemiddeldes worden slechts aangenomen in de limiet van hele grote populaties. Het is echter maar de vraag of een populatie van 96 dieren hiervoor groot genoeg is. We kunnen dit controleren door het proces te simuleren. Dit doen we als volgt: Voor elk dier van een gegeven populatie (geheeltallig!!!), berekenen we:

- Hoeveel nakomelingen het baart in deze periode. Gebruik hiervoor de functie `poisson` uit het noteboek `Neushoorns.nb`. Deze functie heeft als parameter het gemiddeld aantal nakomelingen (dochters) dat het dier in deze periode krijgt. De functie geeft terug het werkelijk aantal nakomelingen dat het dier in deze periode krijgt. Probeer maar een aantal keren het commando `poisson[1.5]`.
- Of het deze periode overleeft. Gebruik hiervoor de functie `survive`. Deze functie heeft als parameter de kans dat het dier de periode overleeft. De functie geeft terug 1 als het dier het heeft overleefd en 0 als het dier is gestorven. Probeer een aantal keren het commando `survive[0.5]`.

De functies `poisson` en `survive` gebruiken een toevalsproces om, uitgaande van een kans, te bepalen (simuleren) wat er werkelijk gebeurt met een bepaald dier. Deze gegevens leveren ons de volgende populatie. Merk op dat we als parameters voor `poisson` en `survive` de elementen van A moeten gebruiken, en dat de nieuwe populatie weer geheeltallig is. Als we dit proces itereren, krijgen we een idee van het gedrag op langere termijn.

(d) Het moduul `lesliesim` stelt je in staat om het bovenbeschreven kansproces te simuleren. Bekijk wat dit moduul precies doet.

(e) Schrijf een functie waarmee we over een langere periode het populatieverloop van de neushoorns te zien krijgen.

(f) Onderzoek, m.b.v. dit simulatieproces, het gedrag van de populatie neushoorns op de middellange termijn. Herhaal het proces enige malen om een indruk te krijgen van de toevalsfactor. Is onze populatie groot genoeg om het model van de Leslie-matrices te gebruiken? Geef voor verschillende populatiegrootten bij aanvang een schatting voor de gemiddelde afwijking in populatie-aantal. Geef een schatting van de minimale grootte van de populatie opdat het model van de Leslie-matrices redelijk betrouwbaar is.

21. **Tennis.** We bekijken een partij tennis tussen 2 speelsters A en B. We nemen aan dat A op ieder punt van de wedstrijd een kans p heeft om op dat punt te winnen, en B een kans $q = 1 - p$.

In een *game* zijn de volgende standen mogelijk: 0–0, 0–15, 15–0, 0–30, 15–15, 30–0, 0–40, 15–30, 30–15, 40–0, 15–40, 30–30, 40–15, 30–40, 40–30, Advantage B, Deuce, Advantage A, Game B, Game A. Voor het doel van onze opgave kunnen we een aantal standen bij elkaar nemen: {30–30, Deuce}, {30–40, Advantage B} en {40–30, Advantage A}. Deze mogelijkheden hebben we in de figuur hieronder aangegeven.

Kijkend naar de figuur merken we op dat het spelverloop twee fasen kent. De eerste fase bestaat uit vier slagen als één van de speelsters in precies vier slagen wint of uit 5 slagen als dit niet het geval is. De tweede fase is een proces met vijf toestanden waarvan de lengte van tevoren niet vaststaat en die we kunnen zien als een Markovketen. Deze vijf toestanden zijn de vijf bovenin de figuur, verbonden door de horizontale pijlen. We nummeren de toestanden van 1 tot 5. Zij $P = (p_{ij})$ de 5×5-matrix bestaande uit de overgangskansen: p_{ij} is de kans om van toestand j naar toestand i over te gaan.

(a) Geef de matrix P.

Van het aanvangsstadium kunnen we met de hand uitrekenen wat de kans is om in toestand i terecht te komen. De kansen zijn:

$$\mathbf{v} := (q^4 + 4pq^4,\ 10p^2q^3,\ 0,\ 10p^3q^2,\ p^4 + 4qp^4)^{\mathrm{T}}.$$

De kans dat A wint na vier slagen is natuurlijk p^4. De kans dat A wint na precies 5 slagen is $4qp^4$. Dit is te berekenen door in de figuur alle mogelijke paden van

lengte 5 naar "Game A" te volgen, en elk van de kansen dat zo'n pad doorlopen wordt op te tellen: $4qp^4 = qp^4 + pqp^3 + p^2qp^2 + p^3qp$. Samen leveren deze kansen de eerste coëfficiënt van $\mathbf{v}$. Ga zelf na dat de andere coëfficiënten van $\mathbf{v}$ correct zijn.

Zij $\tilde{P}$ de substochastische matrix die we uit P krijgen door de enen in nullen te veranderen. De kans dat A wint na precies $n > 5$ slagen, is de vijfde coëfficiënt van de vector $\tilde{P}^{n-5}\mathbf{v}$. Ga dit na.

(b) Bewijs dat de kans dat speelster A een game wint gelijk is aan de vijfde component van $(I - \tilde{P})^{-1}\mathbf{v}$.

(c) Zij g de som van de eerste en vijfde component in $5\tilde{P}(I-\tilde{P})^{-1}\mathbf{v}+\tilde{P}(I-\tilde{P})^{-2}\mathbf{v}$. Bewijs dat een game gemiddeld $4(p^4+q^4)+5\cdot 4(pq^4+qp^4)+g$ slagen duurt.

Maak een mfile die de formules van (21b) en (21c) kan uitvoeren. Geef de listing. Voer de opgaven (21d) en (21e) uit voor de volgende waarden van p: 0.5, 0.51, 0.55 en 0.6.

(d) Bereken de kans dat speelster A een game wint.

(e) Bereken de gemiddelde duur van een game.

Om een *set* te winnen, moeten minstens zes games worden gewonnen, maar altijd met een minimaal verschil van 2 games. Degene die uit drie sets het beste resultaat behaalt, wint.

(f) Maak net zo'n figuur als hierboven voor de games in een set. Stel P, Q de kansen dat speelster A respectievelijk B een game wint. Wat is de kans dat een set met $6-2$ voor A eindigt?

Om de kansen voor setwinst te bepalen kunnen we weer op dezelfde manier te werk gaan als bij de kansen op gamewinst. De berekeningen worden echter ingewikkeld en we gaan de mfile `tennis` gebruiken. Lees de `help`-info. Voer de opgaven (21g), (21h) en (21i) uit voor de volgende waarden van p: 0.5, 0.51, 0.55 en 0.6. Controleer tevens de antwoorden van (21d) en (21e).

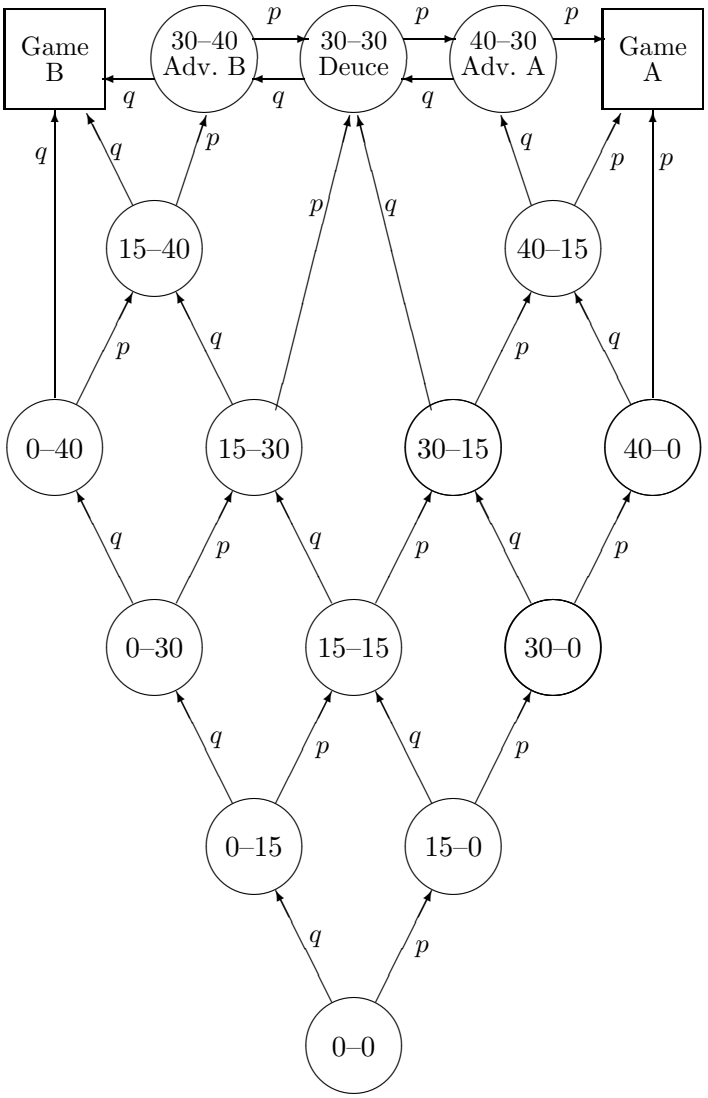
(g) Bepaal de kans dat A een set wint.

(h) Bepaal de kans dat A de hele partij wint.

(i) Hoe lang duurt gemiddeld een set?

De beste manier om bovenstaande voorspellingen te bevestigen is door inderdaad een aantal tennispartijen te spelen. Hiertoe bestaat het programma `match` dat de computer een gegeven aantal partijen tegen zichzelf laat spelen.

(j) Lees de `help`-info en laat het programma voor bovenstaande p-waarden tennissen. Noteer de resultaten en vergelijk ze met de boven gevonden voorspellingen. Vergeet niet ook het aantal matches te variëren, bijv. kies 100 resp. 1000 matches, of eventueel andere waarden.



(k) Geef een aantal punten aan waarop het bovenstaande model nog realistischer gemaakt zou kunnen worden.

3 Algemene recursies in $\mathbb{R}^m$

3.1 Parasiet-gastheer modellen

Gegeven een verzameling $V \subset \mathbb{R}^m$ en een functie $f : V \to V$. Beschouw een oneindige rij vectoren $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \ldots$ met $\mathbf{x}_i \in V$ gegeven door

$$\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n) \text{ voor } n = 0,\ 1,\ 2, \ldots \tag{18}$$

Een relatie van de vorm (18) noemen we wederom een *recursie relatie*, een rij $\{\mathbf{x}_n\}$ die voldoet aan (18) noemen we een *recursieve rij*. Een recursieve rij wordt vastgelegd door f en de keuze van $\mathbf{x}_0$. De vraag is nu,

Hoe gedraagt $\mathbf{x}_n$ *zich als* $n \to \infty$ *?*

Voorbeeld. Een model waarin niet-lineaire recursies op natuurlijke wijze tevoorschijn komen is dat voor een gecombineerde populatie sluipwespen en rupsen. De sluipwesp heeft als gewoonte zijn eitjes op een rups te leggen. De uitgekomen larven gebruiken dan de rups als levende voedselvoorraad, hetgeen de rups op den duur niet overleeft. In ons model zien we dus dat de voortplanting van de sluipwesp volledig afhankelijk is van de aanwezigheid van rupsen. We kijken elk jaar naar de populaties rupsen r_n en wespen w_n. We nemen aan dat de rupsenbevolking groeit volgens een Verhulst model met groeifactor $(a - r_n/R)$ voor zekere a, R. De aanwezigheid van de sluipwesp geeft een extra rem op de groeifactor en we kiezen als model

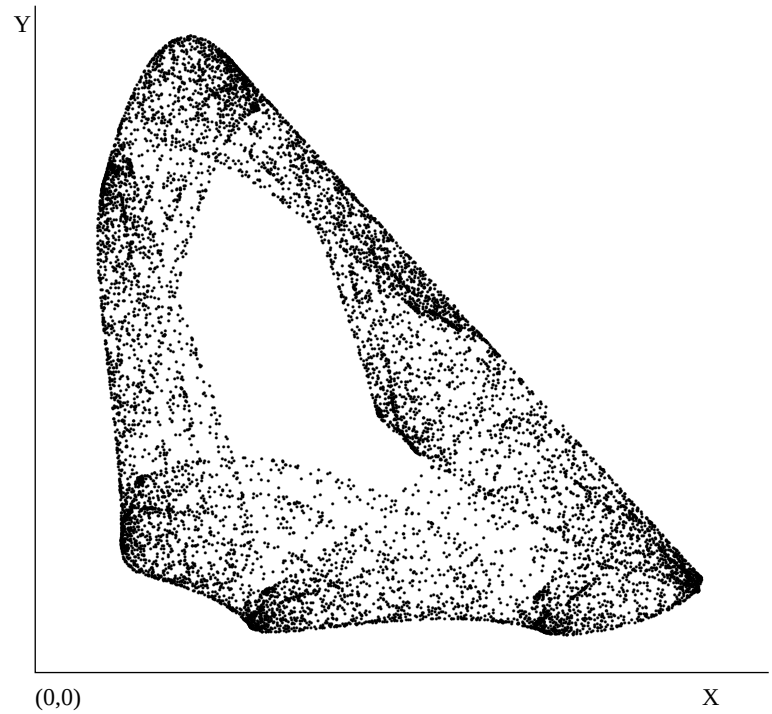
$$\begin{aligned} r_{n+1} &= (a - r_n/R - w_n/W)r_n \\ w_{n+1} &= \gamma r_n w_n \end{aligned}$$

Door hernormaliseren kunnen we R, W uit deze vergelijkingen elimineren. Stel namelijk $x_n = r_n/R$ en $y_n = w_n/W$. Onze recursie gaat dan over in

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (a - x_n - y_n)x_n \\ y_{n+1} &= b x_n y_n \end{aligned} \tag{19}$$

waarin $b = R\gamma$.

Om aan te geven dat niet-lineaire recursies zeer grillig kunnen zijn geven we in de figuur hieronder de baan bij $a = 3.35$, $b = 1.1$ en startpunt $(1, 1)$. Dit model is een voorbeeld van gastheer-parasiet interactie. Het is voornamelijk bekend door de mooie plaatjes die het geeft.



In de theoretische biologie worden echter realistischer modellen voorgesteld. In principe hebben ze de vorm

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= \lambda G_n f(G_n, P_n) \\ P_{n+1} &= \mu G_n (1 - f(G_n, P_n)) \end{aligned}$$

Hierin staan G en P voor de gastheer- respectievelijk parasiet populaties. De factor λ kan geïnterpreteerd worden als de groeifactor van de gastheerpopulatie bij afwezigheid van parasieten en $f(G_n, P_n)$ als de fractie gastheren die per tijdseenheid ontsnappen aan parasitisme. Een klassieke keuze is $f = e^{-aP_n}$, het Nicholson-Bailey model (1935). De keuze van f volgt hier uit simpele statistische argumenten.

3.2 Stabiliteit

Net als in het ééndimensionale geval is het begrip dekpunt weer van cruciaal belang. Een punt $\mathbf{a} \in V$ heet *dekpunt* van de recursierelatie $\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n)$ als $\mathbf{a} = f(\mathbf{a})$. De constante rij $\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}, \ldots$ is een oplossing van onze recursierelatie. Een dekpunt $\mathbf{a}$ noemen we *attractief*, als er een omgeving U van $\mathbf{a}$ bestaat, zodat voor elke $\mathbf{b} \in U \cap V$ geldt dat $\lim_{n\to\infty} f^n(\mathbf{b}) = \mathbf{a}$. In het meerdimensionale geval is het begrip *instabiliteit* lastiger te omschrijven. Bij de matrixrecursies hebben we al gezien dat er sprake kan zijn van zowel attractieve als repulsieve richtingen rond het triviale dekpunt $\mathbf{0}$. Definitie 1.2.1 kunnen we gelukkig letterlijk overnemen.

Stelling 3.2.1 *Zij $V \subset \mathbb{R}^m$ en $f : V \to V$. Stel $\mathbf{a}$ is een inwendig punt van V, $\mathbf{a} = f(\mathbf{a})$ en stel f differentieerbaar in $\mathbf{a}$. De Jacobi-matrix van f in het punt $\mathbf{a}$ geven we aan met*

$D(f)(\mathbf{a})$. Als alle eigenwaarden van $D(f)(\mathbf{a})$ absolute waarde kleiner dan 1 hebben, dan is het dekpunt $\mathbf{a}$ stabiel.

Bewijsschets. Het bewijs verloopt volkomen analoog aan dat van St 1.2.2 en we geven hier de analoge schets. We gaan weer *lineariseren*. Voer de nieuwe variabele $\Delta\mathbf{x}$ in door $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \Delta\mathbf{x}$. Als $\Delta\mathbf{x}$ voldoende klein is, dan geldt $f(\mathbf{a} + \Delta\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + D(f)(\mathbf{a})\Delta\mathbf{x} +$ hogere orde termen in $\Delta\mathbf{x}$. We schrijven nu onze recursie om als recursie in $\Delta\mathbf{x}_n$ en verwaarlozen daarbij de hogere orde termen. Dat geeft $\mathbf{a} + \Delta\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{a} + \Delta\mathbf{x}_n) \approx f(\mathbf{a}) + D(f)(\mathbf{a})\Delta\mathbf{x}_n$. De termen $\mathbf{a}$ en $f(\mathbf{a})$ vallen tegen elkaar weg (want $f(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$) en we houden over,

$$\Delta\mathbf{x}_{n+1} \approx D(f)(\mathbf{a})\Delta\mathbf{x}_n$$

waarbij deze benadering goed is voor $\Delta\mathbf{x}_n$ voldoende klein. Merk op dat dit een lineaire recursie voor $\Delta\mathbf{x}_n$ is. Stel dat alle eigenwaarden van $D(f)(\mathbf{a})$ in absolute waarde kleiner dan 1 zijn. Uit het lineaire geval weten we dat de oplossingen van matrixrecursies met een dergelijke matrix altijd naar nul convergeren. Dus, als $\Delta\mathbf{x}_0$ voldoende klein is, convergeert de rij $\{\Delta\mathbf{x}_n\}$ naar nul. Met andere woorden $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{a}$ voor alle $\mathbf{x}_0$ voldoende dicht bij $\mathbf{a}$, en dus is $\mathbf{a}$ stabiel. □

Voorbeeld 1. Zij A een $m \times m$ matrix, $B \in \mathbb{R}^m$ en beschouw de lineaire inhomogene recursie

$$\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n + B$$

in $\mathbb{R}^m$. Stel dat A geen eigenwaarde 1 heeft. De vergelijking $\mathbf{a} = A\mathbf{a} + B$ heeft dan de unieke oplossing $\mathbf{a} = (I - A)^{-1}B$. De Jacobi-matrix van $A\mathbf{x} + B$ is precies A en dus is $(I - A)^{-1}B$ een stabiel dekpunt als alle eigenwaarden van A in absolute waarde kleiner dan 1 zijn. Dit hadden we ook direct kunnen zien. Trek $\mathbf{a} = A\mathbf{a} + B$ van (3.2) af. We vinden dan $\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{a} = A(\mathbf{x}_n - \mathbf{a})$. Als alle eigenwaarden van A kleiner dan 1 zijn, dan geldt dat $\mathbf{x}_n - \mathbf{a} \to \mathbf{0}$ als $n \to \infty$, met andere woorden $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = (I - A)^{-1}B$, onafhankelijk van de keuze van $\mathbf{x}_0$.

Voorbeeld 2. Kies $a > 0$ vast. Beschouw in $\mathbb{R}^2$ de recursie

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay_n + x_n - x_n^2 \\ ax_n + y_n - y_n^2 \end{pmatrix}$$

Eerst bepalen we de dekpunten. Deze volgen uit de vergelijkingen $x = ay + x - x^2$ en $y = ax + y - y^2$. Dus, $0 = ay - x^2$ en $0 = ax - y^2$ en hieruit vinden we de oplossingen $(0, 0)$ en (a, a). De Jacobi-matrix van onze functie is $\begin{pmatrix} 1 - 2x & a \\ a & 1 - 2y \end{pmatrix}$. In het punt $(0, 0)$ zijn de eigenwaarden $1 \pm a$, dus $(0, 0)$ is niet stabiel. In het punt (a, a) zijn de eigenwaarden $1 - a$, $1 - 3a$. Als $0 < a < 2/3$ dan is (a, a) dus stabiel. Het is duidelijk dat stabiliteit alleen iets zegt over het lokale gedrag rond de dekpunten. Als x_0 en y_0 in ons voorbeeld erg groot zijn is het niet moeilijk in te zien dat de punten (x_n, y_n) naar $(-\infty, -\infty)$ divergeren. Voor welke punten (x_0, y_0) dit precies gebeurt is niet duidelijk, evenals de vraag voor welke startpunten er convergentie naar een stabiel dekpunt optreedt. Voor dergelijke vragen over de recursie kunnen we tot op heden alleen experimenteel te werk gaan en de zaak op het computerscherm observeren.

Voorbeeld 3. Zij z de parameter van het complexe vlak, $c \in \mathbb{C}$ een vast getal en beschouw de recursie $z_{n+1} = z_n^2 + c$. Omdat de z_n complexe getallen zijn kunnen we de recursie zien als recursie in het platte vlak. De dekpunten zijn snel uitgerekend, $z_{eq} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 - c}$. De Jacobiaan van $z^2 + c$ heeft twee geconjugeerde complexe eigenwaarden en hun absolute waarde is $|2z_{eq}| = |1 \pm \sqrt{1 - 4c}|$. Het is duidelijk dat niet beide dekpunten stabiel kunnen zijn. We kunnen wel aangeven in welk bereik van c minstens één van de dekpunten stabiel is. Dat is namelijk het binnengebied van de kromme $|1 \pm \sqrt{1 - 4c}| < 1$ in het complexe c-vlak. Nadere bestudering leert dat dit het binnengebied is van de hartkromme $r = \sin(\phi/2)^2$ die met $1/4$ in de x-richting verschoven is.
Het punt ∞ kunnen we ook opvatten als een attractief punt. Als we z_0 namelijk groot ten opzichte van c kiezen dan is het duidelijk dat $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$. Het attractiegebied van ∞ blijkt een zeer spectaculaire structuur te hebben. Het bestaan van deze rijke structuur werd vermoed door de Fransman Gaston Julia in het begin van de 20er jaren, maar werd pas zichtbaar met de komst van het computerbeeldscherm.

Voorbeeld 4. Recursies in $\mathbb{R}^m$ kunnen ook gebruikt worden om *meerstapsrecursies* in één variabele te bestuderen. Beschouw bijvoorbeeld een rij getallen $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ die voldoet aan

$$u_{n+2} = Au_{n+1}(1 - u_n).$$

Dit is een modificatie van het model van Verhulst waarin we de remmende invloed van populatietoename slechts merken na de tweede generatie. Deze recursie kan als volgt worden omgevormd tot éénstaps recursie in $\mathbb{R}^2$. Stel $x_n = u_n$, $y_n = u_{n+1}$ voor alle $n \geq 0$. Dan geldt,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_n \\ Ay_n(1 - x_n) \end{pmatrix}.$$

Dekpunten van deze recursie volgen dus uit de vergelijkingen $x = y$ en $y = Ay(1 - x)$. De dekpunten zijn $(0, 0)$ en $(1 - 1/A, 1 - 1/A)$. De Jacobi-matrix van de recursiefunctie is nu $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -Ay & A(1 - x) \end{pmatrix}$. De eigenwaarden in $(0, 0)$ zijn 0 en A, de eigenwaarden in $(1 - 1/A, 1 - 1/A)$ zijn $1/2 \pm \sqrt{5/4 - A}$. Het is duidelijk dat $(0, 0)$ stabiel is voor $A < 1$ en na iets meer werk zien we dat $(1 - 1/A, 1 - 1/A)$ stabiel is voor $1 < A < 2$.

Onder parametervariatie kunnen bifurcaties optreden, voorbeelden zijn de waarden $A = 1$ en $A = 2$ hierboven. Dan leiden kleine veranderingen in de parameterwaarde tot een kwalitatief verschillende dynamica. Om hiervoor criteria te kunnen formuleren, i.h.b. ook om zulke catastrofale veranderingen uit te kunnen sluiten, zijn we naast de generalisatie 3.2.1 van stelling 1.2.2 ook geïnteresseerd in een generalisatie van stelling 1.2.3.

Stelling 3.2.2 *Zij $V \subseteq \mathbb{R}^m$ open en*

$$f \;:\; \mathbb{R} \times V \;\longrightarrow\; V$$

een continu differentieerbare functie die we als parameterafhankelijke familie $f_\lambda(\mathbf{x}) = f(\lambda, \mathbf{x})$ van afbeeldingen op V beschouwen. Voor $\lambda = 0$ zij het punt $\mathbf{a} \in V$ een dekpunt

van $f_0 : V \longrightarrow V$ waarvoor geen eigenwaarde van $Df_0(\mathbf{a})$ gelijk is aan 1. Dan heeft f_λ voor voldoende kleine λ in $\mathbf{b}_\lambda$ dichtbij $\mathbf{a}$ eveneens een dekpunt.

Bewijsschets. De afgeleide $DF_\lambda(\mathbf{a})$ van de afbeelding $F_\lambda(\mathbf{x}) = f_\lambda(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$ heeft voor $\lambda = 0$ geen eigenwaarde 0 en is daarom inverteerbaar. In één dimensie konden we nog de monotoniciteit van inverteerbare functies gebruiken om het bewijs van stelling 1.2.3 te schetsen, hiervoor moeten we in hogere dimensies $m \geq 2$ de impliciete functie stelling[1] inschakelen. We schrijven hiervoor $F(\lambda, \mathbf{x}) = F_\lambda(\mathbf{x})$, dan heeft het systeem

$$\begin{aligned} F_1(\lambda, x_1, \ldots, x_m) &= 0 \\ F_2(\lambda, x_1, \ldots, x_m) &= 0 \\ &\vdots \\ F_m(\lambda, x_1, \ldots, x_m) &= 0 \end{aligned}$$

van vergelijkingen de determinant

$$\Delta \;=\; \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \end{pmatrix} \;\neq\; 0$$

en definieert dichtbij $(\lambda_0, \mathbf{x}_0) = (0, \mathbf{a})$ de functie $\mathbf{b}_\lambda = (x_1(\lambda), \ldots, x_m(\lambda))$ (waar $\mathbf{b}_0 = \mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$ continu differentieerbaar van λ afhangt). Hieruit volgt $\mathbf{b}_\lambda = f_\lambda(\mathbf{b}_\lambda)$. □

3.3 Hoefijzer van Smale

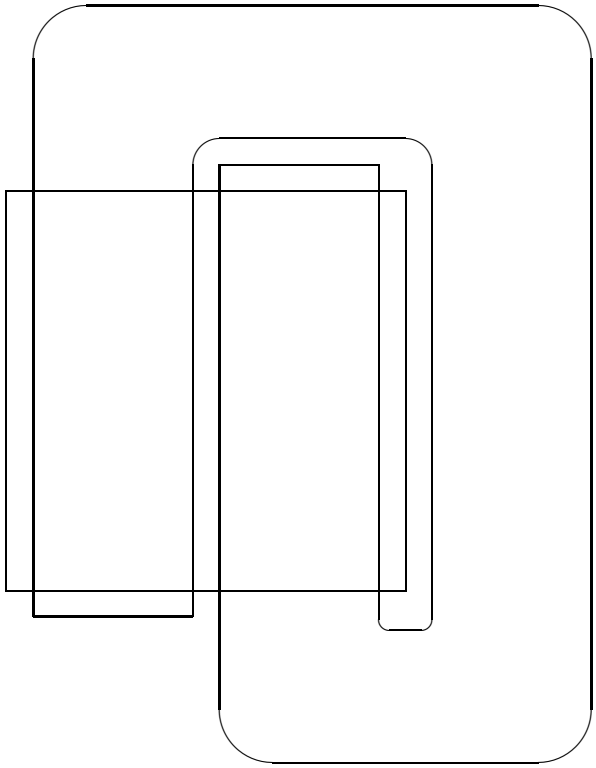
Definieer $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ zodanig, dat het vierkant $Q = [0,1] \times [0,1]$ d.m.v. rekken en vouwen zoals in ommezijdig plaatje aangegeven (gedeeltelijk) op zichzelf wordt afgebeeld. Wij zijn alleen geïnteresseerd in de dynamica op Q, en het is gemakkelijk om voor het gedeelte van f met beeld in Q een expliciete lineaire formule aan te geven, voor de situatie in het plaatje is dat bv.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (\frac{2}{5}x + \frac{1}{15}, 5y - \frac{1}{15}) \qquad \text{als } \tfrac{1}{75} \leq y \leq \tfrac{16}{75} \\ f(x,y) &= (\frac{2}{5}x + \frac{8}{15}, 5y - \frac{59}{15}) \qquad \text{als } \tfrac{59}{75} \leq y \leq \tfrac{74}{75} \;. \end{aligned}$$

We zien dat de doorsnede $Q \cap f(Q)$ uit twee verticale rechthoeken bestaat en na verdere iteratie bestaat $Q \cap f(Q) \cap f^2(Q)$ uit vier verticale rechthoeken, $Q \cap f(Q) \cap f^2(Q) \cap f^3(Q)$ uit acht verticale rechthoeken en algemeen $Q \cap \ldots \cap f^n(Q)$ uit 2^n verticale rechthoeken. De breedte van deze rechthoeken krimpt sterk naarmate n groeit en is voor bovenstaand voorbeeld $(\frac{2}{5})^n$. In de limiet $n \to \infty$ nadert deze naar 0 en bestaat

$$\Lambda^+ \;:=\; \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} f^k(Q)$$

[1] Zie Sectie 3.5 in *Vector Calculus* van J.E. Marsden en A.J. Tromba.



uit verticale lijnstukken. Om na te gaan dat het om overaftelbaar veel verticale lijnstukken gaat geven we aan lijnstuk ℓ een label $a(\ell) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, en wel als volgt. Elk lijnstuk $\ell \in \Lambda^+$ zit ook in een van de verticale rechthoeken uit de eindige doorsnede $Q \cap \ldots \cap f^n(Q)$, zeg de m-de verticale rechthoek, en de binaire ontwikkeling

$$m-1 \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_k 2^{n-k}$$

levert het beginstuk ter lengte n van $a(\ell)$ op (waarom werkt deze manier van definiëren?). Omdat er voor ieder lijnstuk precies één rijtje $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ is zijn er hiervan net zo veel als elementen van $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, d.w.z. overaftelbaar veel. In het beeld $f(\ell)$ liggen twee verticale lijnstukken, namelijk de lijnstukken met label $(0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ en met label $(1, a_1, a_2, a_3, \ldots)$.

De verzameling $f^{-1}(Q) \cap Q$ van punten die in Q liggen en na toepassen van f in Q blijven bestaat uit twee horizontale rechthoeken. Voor bovenstaand voorbeeld zijn dit de rechthoeken $[0,1] \times [\frac{1}{75}, \frac{16}{75}]$ en $[0,1] \times [\frac{59}{75}, \frac{74}{75}]$. Ook dit kunnen we tot 2^n (nu horizontale) rechthoeken $f^{-n}(Q) \cap f^{-n+1}(Q) \cap \ldots \cap f^{-1}(Q) \cap Q$ itereren, dit leidt in de limiet

$$\Lambda^- \;:=\; \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} f^{-k}(Q)$$

tot overaftelbaar vele horizontale lijnstukken met labelling $(b_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

De doorsnede

$$\Lambda \;:=\; \bigcap_{k\in\mathbb{Z}} f^k(Q) \;=\; \Lambda^- \cap \Lambda^+$$

bestaat uit alle punten die Q nooit verlaten en er ook altijd al in hebben gezeten. Een gegeven punt $x \in \Lambda$ zit op precies één verticaal lijnstuk en op precies één horizontaal lijnstuk, met labels $a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ en $b \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Definieer de afbeelding

$$T \;:\; \Lambda \;\longrightarrow\; \Sigma := \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$$

d.m.v. $T(x) = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ met $c_i = b_i$ voor alle $i \in \mathbb{N}$ en $c_j = a_{1-j}$ voor alle $j \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$, dus i.h.b. $c_0 = a_1$.
De afbeeldig T is een bijectie, dus Λ bevat net zo veel punten als het vierkant Q waarmee we begonnen zijn. De deelverzameling Λ van Q heeft de volgende topologische eigenschappen.

- Λ is gesloten, d.w.z. alle limietpunten van Λ zijn ook elementen van Λ.
- Λ heeft geen geïsoleerde punten, d.w.z. elk punt $x \in \Lambda$ is een limietpunt van $\Lambda\backslash\{x\}$.
- Λ is totaal onsamenhangend. Tussen elk tweetal punten van Λ is er een scheidend verticaal of horizontaal rechthoek dat wél in Q maar niet in Λ ligt. I.h.b. bevat Λ geen inwendige punten.
- Samengevat: Λ is een Cantor-verzameling.

De verzameling Λ is zo gedefinieerd dat de restrictie

$$f|_\Lambda \;:\; \Lambda \;\longrightarrow\; \Lambda$$

van f tot Λ deze verzameling invariant laat. De dynamica van deze restrictie is een belangrijk (deel)aspect van de dynamica van f op het hele vierkant Q. Als we op Σ de shift-operator

$$\sigma \;:\; \Sigma \;\longrightarrow\; \Sigma$$

met $(\sigma((c_k)_k))_l = c_{l+1}$ bekijken, d.w.z. de operator die rijtjes 1 plaats naar links opschuift, dan is

$$f|_\Lambda \;=\; T^{-1} \circ \sigma \circ T$$

en dus ook

$$f^k|_\Lambda \;=\; T^{-1} \circ \sigma^k \circ T$$

voor alle $k \in \mathbb{Z}$. M.b.v. de door σ gedefinieerde symbolische dynamica kunnen we voor de restrictie $f|_\Lambda$ van de afbeelding f concluderen:

- periodieke banen liggen dicht,
- de dynamica hangt gevoelig af van de beginwaarde,
- er is een dichte baan.
- Samengevat: het systeem gedraagt zich (op Λ!) chaotisch.

Deze conclusie is zeer robuust, we hadden hiervoor niet de in het begin gegeven expliciete formules nodig, en zelfs voor (lichtelijk) niet-lineair gedrag van f op $f^{-1}(Q) \cap Q$ blijft de conclusie waar.

3.4 Oefeningen

1. (a) Neem $A = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 1 & 25 \end{pmatrix}$. Bereken de eigenwaarden van A en onderzoek het gedrag van het recursieproces $x(n+1) = A \cdot x(n)$.

   (b) Neem $A = \frac{1}{a}\begin{pmatrix} 25 & -1 \\ 1 & 25 \end{pmatrix}$. Bereken de eigenwaarden van A en onderzoek het gedrag van het recursieproces $x(n+1) = A \cdot x(n)$.

   (c) Om beide bovenstaande recursies te visualiseren gebruiken we de procedure `tweediscr` uit het noteboek `Iteratie.nb`. Onderzoek de bovenstaande twee matrixrecursies. Om redelijke plaatjes te zien moet a in de buurt van 25 worden gekozen (Waarom?).

2. Beschouw de niet-lineaire recursie

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (a - x_n - y_n)x_n \\ y_{n+1} &= bx_n y_n \end{aligned}$$

   die voor bepaalde waarden van $a > 0$ en $b > 0$ een (naïeve) modellering geeft van een rups-sluipwesp populatie (zie college).

   (a) Bepaal voor willekeurige a, b de dekpunten.

   (b) Stel $b = 1$. Bepaal voor welke waarden van a de dekpunten stabiel zijn.

   (c) Volgens bovenstaande berekening zou in het geval $a = 2.9$, $b = 1$ het punt $(1, 0.9)$ een stabiel evenwicht zijn. Controleer deze stabiliteit met door naburige punten als startpunt te kiezen. Wat kun je zeggen over de eigenwaarden die bij dit evenwicht horen?

   (d) Onderzoek wat er gebeurt als we a in kleine stappen van bijv. 1/10 laten toenemen. Is bovengenoemd evenwichtspunt nog steeds stabiel? Bekijk ook enkele waarden van a kleiner dan 2.9.

   (e) Dezelfde vraag als boven, maar dan met $b = 1.2$.

3. Zoals in het dictaat besproken geeft de recursie

$$\begin{aligned} G_{n+1} &= \lambda G_n e^{-aP_n} \\ P_{n+1} &= \mu G_n (1 - e^{-aP_n}) \end{aligned}$$

   een klassieke beschrijving van een gastheer-parasiet model.

   (a) Laat zien dat we door herschaling van P_n en G_n dit model kunnen vereenvoudigen tot

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \lambda x_n e^{-y_n} \\ y_{n+1} &= x_n (1 - e^{-y_n}) \end{aligned}$$

(b) Stel $\lambda > 1$. Naast $(0,0)$ is er nog een evenwichtspunt. Bepaal dit en bepaal ook de aard van $(0,0)$. Voer een stabiliteitsanalyse uit op het niet-triviale punt en laat zien dat we de eigenwaardevergelijking

$$X^2 - (1 + \frac{\log \lambda}{\lambda - 1})X + \frac{\lambda \log \lambda}{\lambda - 1} = 0$$

krijgen. Bewijs dat de constante term > 1 is als $\lambda > 1$. Wat volgt hieruit voor de aard van het evenwichtspunt?

De instabiliteit van het Nicholson-Bailey model is de reden dat het niet als realistisch beschouwd wordt. Een wat betere variant hierop krijgen we door de factor λx_n te vervangen door de logistische $x_n \exp(r(1 - x_n/k))$. We krijgen

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n \exp(r(1 - x_n/k) - y_n) \\ y_{n+1} &= x_n(1 - e^{-y_n}) \end{aligned}$$

(c) Expliciete bepaling van de evenwichtspunten is nu lastig, probeer maar! Daarom halen we de computer erbij. Onderzoek het gedrag van het systeem voor zelf te kiezen waarden $0 < r < 5$ en $0 < k < 5$. Enkele suggesties: $r = 0.5$ en $k = 3$, $r = 2$ en $k = 4$, $r = 2.5$ en $k = 5$. Als vuistregel kunnen we als plotgebied nemen: $0 < x < 1.5k$ en $0 < y < 1.5r$.

4. (Ontleend aan I.Hoveijn, Symplectic reversible maps, tiles and chaos, preprint 665, 1991, RUU Utrecht.) Beschouw de niet-lineaire recursie

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \sin u_n \begin{pmatrix} -\sin a \\ \cos a \end{pmatrix}.$$

(a) Laat zien dat $(0,0)$ een dekpunt is.

(b) Geef de linearisatie van deze recursie rond het punt $(0,0)$. Bepaal de eigenwaarden van de bijbehorende matrix.

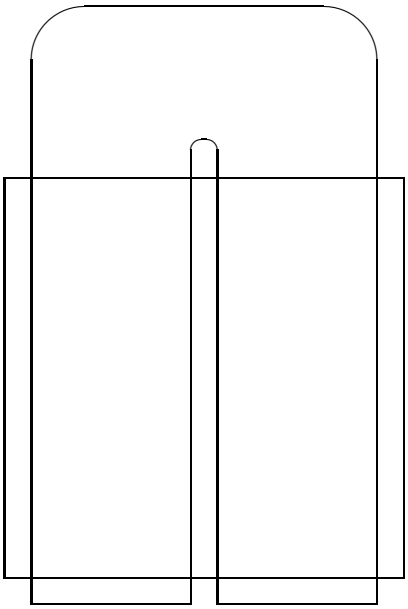
(c) Neem $a = 3\pi/10$. Probeer een goed beeld te krijgen van de banen in het vlak door verschillende verspreid liggende startwaarden te kiezen.

(d) Zelfde opgave voor $a = 7\pi/10$.

(e) Zelfde opgave voor $a = 9\pi/10$. Wat is er met het punt $(0,0)$ gebeurd?

(f) Onderzoek de recursie voor $a = \pi/2$. Neem ondermeer $(3,0)$ als startpunt. Kun je een baan met periode vier aangeven?

5. **Hoefijzer van Smale.** Definiëer $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ zodanig, dat het vierkant $Q = [0,1] \times [0,1]$ zoals in het plaatje aangegeven (gedeeltelijk) op zich zelf wordt afgebeeld.



(*i*) Definieer een symbolische dynamica op de doorsnede

$$\Lambda \;=\; \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(Q)$$

en laat zien dat f periodieke banen van willekeurig hoge perioden heeft.

(*ii*) Ga na dat er een dichte baan bestaat. Beredeneer dat de door f gegeven dynamica gevoelig afhankelijk is van de beginwaarden en concludeer dat de door f gedefinieerde dynamica chaotisch is.

6. **De stuiterende bal.** We laten een bal op een tafel vallen, waarvandaan hij wordt teruggekaatst. De tijd tot de daarop volgende impact is dan

$$\tau = \frac{2v}{g}$$

waar g de gravitatie-versnelling is. De snelheid zal tijdens de vlucht geleidelijk afnemen, totdat in het bovenste punt van de baan de kinetische energie volledig is omgezet in potentiële energie en de bal vervolgens weer naar beneden valt. Bij de volgende impact is de potentiële energie weer omgezet in kinetische energie; in termen van de j-de impact is de $(j+1)$-de impact gegeven door tijdstap $t_{j+1} = t_j + \tau_j$ (waar de index j aangeeft dat de tussenliggende tijd τ van de beginsnelheid v_j afhangt) en nieuwe beginsnelheid $v_{j+1} = \alpha v_j$, waar $\alpha \in [0,1]$ het energieverlies tijdens vlucht en terugkaatsen meet. Luchtwrijving verwaarlozen we verder. Voor $\alpha = 1$ is er geen energieverlies en stuitert de bal volledig elastisch; voor $\alpha = 0$ blijft de bal meteen liggen.

We kiezen eenheden waarin $g = 2$ en modelleren de stuiterende bal d.m.v. de afbeelding

$$f_\alpha : \begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} \;\mapsto\; \begin{pmatrix} t+v \\ \alpha v \end{pmatrix} \;.$$

We zijn geïnteresseerd in het gedrag in voor (licht) energieverlies bij terugkaatsing, dus $\alpha < 1$ maar tegelijk $\alpha > 0$.

Opdracht 1 *Gebruik het notebook* `stuitbal.nb` *om een overzicht te verkrijgen over de door f_α gedefinieerde dynamica voor verschillende waarden van α in het open interval $]0,1[$. Bepaal vervolgens de dekpunten van f_α en hun stabiliteit. Wat betekent dit voor de stuiterende bal? Kun je ook een interpretatie voor de eigenwaarde 1 geven?*

Aandrijving. Om de dynamica wat spannender te maken gaan we de tafel periodiek aandrijven; het tafelblad blijft altijd loodrecht op de verticale as maar beweegt volgens $-\beta \sin t$ op en neer (we kiezen tijdseenheden waarin de periode van tafeltrilling 2π is). We nemen aan dat $\beta \ll v$. (De weg, en daarmee de de tijd, die de teruggekaatste bal aflegt, wordt iets langer of korter door het bewegen van het tafelblad. Dit effect is verwaarloosbaar en wordt dan ook verwaarloosd in de formules in deze opdracht).

Opdracht 2 *Stel $\gamma = (1+\alpha)\beta$ en beredeneer hoe je aan het volgende model voor de stuiterende bal komt:*

$$f_{\alpha,\gamma} : \begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t+v \\ \alpha v - \gamma \cos(t+v) \end{pmatrix} .$$

Hierbij is $\gamma > 0$ en nog steeds $0 < \alpha < 1$.

In de meeste gevallen zul je de waarde van α vast houden en alleen γ variëren.

Opdracht 3 *Bereken de Jacobi-determinant, dat is* $\det Df(t,v)$ *waar*

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix} .$$

Een constante Jacobi-determinant betekent dat f de oppervlakte uniform laat krimpen (en voor $\alpha = 1$ zelfs behoudt).[2] Het is daarom ook niet mogelijk de parameter α overbodig te maken door altijd γ geschikt te kiezen. Omdat Df voor alle (t,v) inverteerbaar is verwachten we dat ook f zelf inverteerbaar is.

Opdracht 4 *Laat zien dat f inverteerbaar is door de inverse f^{-1} expliciet aan te geven.*

Voor elke $n \in \mathbb{Z}$ wordt door

$$\begin{array}{rccc} \psi_n : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (t,v) & \mapsto & (t+2n\pi, v) \end{array} \tag{20}$$

een coördinatentransformatie gedefinieerd.

[2] De determinant van een matrix is de grootte (oppervlak in geval van een 2×2 matrix) van het beeld onder de matrix van het eenheidsvierkant.

Opdracht 5 *Ga na dat de afbeelding f invariant is onder toepassing van ψ_n, d.w.z. $\psi_n(f(t,v)) = f(\psi_n(t,v))$ voor alle $(t,v) \in \mathbb{R}^2$.* [3] *Kun je hiervoor en interpretatie geven?*

Deze constructie kunnen we omzeilen door f in de variabele t tot $[0, 2\pi[$ te beperken en van $f(t,v)$ een zodanig veelvoud van 2π af te trekken dat we weer in $[0, 2\pi[$ terecht komen. De zo geherdefinieerde f lijkt dan in punten (t,v) met $t = 0$ niet meer continu (laat staan differentieerbaar) te zijn, maar als we $[0, 2\pi[$ tot een cirkel aan elkaar plakken, dus op $S^1 \times \mathbb{R}$ i.p.v. $[0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ werken, is f wél in elk punt differentieerbaar.

Opdracht 6 *Beredeneer dat* $\det Df$ *niet verandert voor deze geherdefinieerde afbeelding. Hoe moet men de formule voor de inverse f^{-1} aanpassen?*

Voor sommige oplossingen wordt v negatief, en dan is er natuurlijk geen sprake meer van een weerkaatsende bal. De afbeelding f blijft wel goed gedefinieerd.

Opdracht 7 *Bereken de dekpunten van (de geherdefinieerde) f in afhankelijkheid van de parameters α en γ. Geef ook een grafische oplossing. Kun je een interpretatie geven voor dekpunten (t,v) met $v < 0$? Wat betekent $f(t,0) = (t,0)$?*

De door $f : [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \longrightarrow [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ gedefinieerde dynamica is i.h.a. vrij ingewikkeld en we proberen er d.m.v. de dekpunten enig begrip te ontwikkelen.

Opdracht 8 *Voor welke parameterwaarden zijn er stabiele dekpunten?* (Hint: Met $\mu := \gamma \sin(t)$ wordt de stabiliteit van een dekpunt (t,v) bepaald door de voorwaarde $-2(1+\alpha) < \mu < 0$). *Hoe verliezen dekpunten hun stabiliteit?*

De stabiele dekpunten ondergaan voor groeiende waarden van γ uiteindelijk een periodeverdubbeling, het begin van een reeks van periodeverdubbelingen.

Opdracht 9 *Geef voor welgekozen parameterwaarden faseportretten aan waarin een stabiele baan van periode 2 te zien is. Verhoog γ verder opdat deze naar een stabiele baan van periode 4 bifurqueert. Lukt dit ook voor periode 8 (of 16)?*

Chaotisch gedrag. Net als in de logistische afbeelding leidt de reeks van periodeverdubbelingen uiteindelijk tot chaos. Dit laten we zien door een Smale hoefijzer in de afbeelding te construeren.

Opdracht 10 *Geef (voor welgekozen parameterwaarden) een korte brede vierhoek Q aan dat door f tot een lange smalle vierhoek wordt gerekt en dan dubbelgevouwen op Q komt te liggen.*

We zijn geïnteresseerd in de verzameling $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(Q)$.

Opdracht 11 *Beredeneer waarom f beperkt tot Λ chaotisch is. Kun je dit chaotisch gedrag in faseportretten terug vinden? Heeft het betekenis voor de dynamica van de stuiterende bal?*

[3] In het college Groepentheorie zullen we later leren dat de afbeelding f equivariant is onder de door (20) gedefinieerde groepsactie van $\mathbb{Z}$ op $\mathbb{R}^2$. Hierdoor wordt een equivalentierelatie op $\mathbb{R}^2$ gedefinieerd, de quotiëntruimte kan met de cilinder $S^1 \times \mathbb{R}$ worden geïdentificeerd en f induceert een afbeelding van de cilinder op zichzelf.

7. **Terugkerende epidemieën.** In een *New Scientist* artikel uit 1982 stelden Anderson en May een simpel discreet model voor dat een verklaring zou kunnen geven voor de regelmatige cycli in de verspreiding van besmettelijke ziekten. Voor het tijdsinterval nemen we de duur van een besmetting. Het aantal zieken in tijdvak n stellen we op $Z(n)$ en het aantal voor de ziekte vatbare individuen $V(n)$. Anderson en May maken de volgende aannamen:

   i) Het aantal nieuwe ziektegevallen in tijdvak $n+1$ is een fractie f van het product van $Z(n)$ en $V(n)$.

   ii) Een ziekte duurt slechts één tijdvak.

   iii) Het aantal vatbaren neemt elk tijdvak toe met een vast aantal geboorten B en neemt af met het aantal nieuwe ziektegevallen.

   iv) Individuen die hersteld zijn van de ziekte zijn er verder immuun voor.

   (a) Verklaar aanname (i).

   (b) Geef vergelijkingen voor $Z(n+1)$ en $V(n+1)$ op grond van bovenstaande aannamen.

   (c) Laat zien dat $\bar{V} = 1/f$, $\bar{Z} = B$ een evenwichtsoplossing is.

   (d) We vereenvoudigen het model door de substituties $Z(n) = Bx(n)$ en $V(n) = y(n)/f$. Ga na dat nu fB de enige overgebleven parameter is. Het evenwichtspunt is nu uiteraard $(1, 1)$. Onderzoek de stabiliteit van dit evenwicht.

   (e) Schrijf een mfile voor deze situatie die met `tweediscr` geïtereerd kan worden. Bestudeer het gedrag van de recursie voor waarden van fB tussen 0 en 2. Kies daarbij ook een aantal zeer kleine waarden, bijvoorbeeld $fB = 0.01$, 0.001, 0.0001.

   (f) Typische parameters die Anderson en May geven: B=12 geboorten per 1000 mensen voor het Verenigd Koninkrijk en 36 geboorten per 1000 voor derde wereld landen, $f = 3 \times 10^{-5}$. Typische begindata zijn $Z_0 = 20$, $V_0 = 2000$. Wat geven deze data voor gedrag?

   (g) Het is mogelijk om pasgeborenen tegen de ziekte in te enten. Stel dat een fractie v van de pasgeborenen wordt ingeënt. Modificeer het model zodat vaccinatie erin wordt meegerekend. Wat is het effect op het gedrag van ons model?

4 Differentiaalvergelijkingen van orde 1, 2

4.1 Eerste orde differentiaalvergelijkingen

In de modellen voor populatiegroei hebben we ons tot nu toe beperkt tot *discrete modellen*. Ten eerste zijn de tijdvakken waarover we populaties bekeken discreet van aard en ten tweede zijn de grootheden waarvan we de groei bekeken, de populatie aantallen, in principe geheel en dus ook discreet. Er zijn veel situaties waarin deze discreetheid er eigenlijk niet toe doet. Beschouw bijvoorbeeld een radioactief preparaat van Co^{60}. In werkelijkheid bestaat een dergelijk preparaat uit vele quadriljoenen Co^{60} atomen, die elk per tijdseenheid een zekere kans hebben om te vervallen tot Ni^{60}. In de praktijk werken we echter met gewichtshoeveelheden Co^{60}, grammen of milligrammen, en in onze ogen zijn het percentages van deze gewichtshoeveelheid die in Ni^{60} overgaan ten gevolge van radioactief verval. De hoeveelheid Co^{60} wordt dus gemeten door de continue variabele 'gewicht' en niet door het werkelijke aantal atomen. Voor de praktijk is dit meer dan voldoende. Verder is radioactief verval een continu doorgaand proces zonder duidelijke cyclus. Ten behoeve van de modelvorming bestaat er dus geen voorkeur voor een bepaald tijdvak, zoals bij een aantal modellen met recursies. In een dergelijk geval laten we het tijdvak naar nul gaan en gebruiken de afgeleide van het gewicht naar de tijd in ons model.
Stel, dat ons preparaat ten tijde t een hoeveelheid $q(t)$ aan Co^{60} bevat. De waarde $q(0)$ is gegeven. De vraag is om $q(t)$ te bepalen. Het model dat we gebruiken bestaat slechts uit de volgende aanname: *de afname van de hoeveelheid radioactief materiaal per tijdseenheid is evenredig met de totale hoeveelheid materiaal*. Dit kunnen we explicieter met symbolen formuleren,

$$\frac{dq}{dt}(t) = -\alpha q(t)$$

waarin $\alpha > 0$ de genoemde evenredigheidsconstante is. Deze differentiaalvergelijking lossen we als volgt op. Deel aan beide zijden door $q(t)$ en integreer van 0 tot t,

$$\int_0^t \frac{1}{q}\frac{dq}{dt}dt = -\int_0^t \alpha dt.$$

We vinden $\log q(t) - \log q(0) = -\alpha t$, en dus $q(t) = q(0)e^{-\alpha t}$. De hoeveelheid radioactief materiaal neemt dus exponentieel af. Voor de volledigheid geven we het verband tussen α en de halveringstijd T. Per definitie (van T dus) geldt namelijk, $q(0)e^{-\alpha T} = q(T) = q(0)/2$. Gevolg, $\alpha T = \log 2$, waaruit volgt $\alpha = \log 2/T$. Onze functie q kan dus herschreven worden als $q(t) = q(0)2^{-t/T}$.

Kalium-Argon methode. Een fraaie toepassing van radioactief verval is de ouderdomsbepaling van gesteenten door de K-Ar methode. In de natuur bestaat een klein deel ($\approx$ 0.012%) van het element kalium uit de radioactieve isotoop K^{40} met een zeer lange vervaltijd. Dit verval kan ofwel door uitzending van een elektron gebeuren, waarbij het stabiele Ca^{40} ontstaat, of door elektronenvangst waaruit het stabiele edelgas Ar^{40} gevormd wordt. De kansen per jaar voor een K^{40}-atoom op deze vervalmogelijkheden zijn $c = 4.72 \times 10^{-10}$ respectievelijk $a = 0.585 \times 10^{-10}$. De hoeveelheid K^{40} in een

steenmonster voldoet daarmee aan

$$N'(t) = -(a+c)N(t)$$

met als oplossing $N(t) = N(0)e^{-(a+c)t}$. De totale ontstane hoeveelheid Ca^{40} en Ar^{40} is $N(0)-N(t)$. Helaas is de gevormde calcium niet meer te achterhalen omdat Ca^{40} ook op natuurlijke wijze veel in gesteenten voorkomt. De argon heeft zich sinds de stolling van het gesteente opgehoopt in holten en poriën en kan door smelting worden teruggewonnen en gemeten. De totale hoeveelheid argon is gelijk aan

$$\frac{a}{a+c}(N(0) - N(t))$$

en dus vinden we

$$Q = \frac{\text{hoeveelheid } Ar^{40} \text{ op tijdstip } t}{\text{hoeveelheid } K^{40} \text{ op tijdstip } t} = \frac{a}{a+c}\frac{1-e^{-(a+c)t}}{e^{-(a+c)t}}.$$

In een gebied in midden-Zweden werd $Q = 0.043$ gevonden. Omrekening met bovenstaande formule geeft een ouderdom van 622 miljoen jaar. Soortgelijke methoden (U-Pb, Th-Pb, Rb-Sr), indien ze kunnen worden toegepast, geven over het algemeen resultaten die redelijke overeenstemming vertonen.

Radioactief afval. Stel dat we in een afvalvat een hoeveelheid $q(t)$ radioactief materiaal hebben. Per tijdseenheid wordt er een constante hoeveelheid b bijgestort. Nu bestaat dq/dt uit twee bijdragen, het verval $-\alpha q$ en het gedumpte materiaal b. Dus,

$$q' = -\alpha q + b.$$

Deze d.v. kan op dezelfde manier als boven worden opgelost,

$$\int_0^t \frac{1}{-\alpha q + b}\frac{dq}{dt} = \int_0^t dt$$

en dus $-[\log(-\alpha q(t) + b) - \log(-\alpha q(0) + b)]/\alpha = t$. Na een kleine berekening volgt,

$$q(t) = \frac{b}{\alpha} + \left(q(0) - \frac{b}{\alpha}\right)e^{-\alpha t}.$$

Merk op, dat $\lim_{t\to\infty} q(t) = b/\alpha$, de hoeveelheid afval stabiliseert zich op de waarde $b/\alpha = bT/\log 2$. Dit is met name van belang voor afvalmateriaal met een korte halveringstijd. Stel nu, dat in plaats van een constante afvalstroom b er een periodiek variërende afvalstroom is door bijvoorbeeld dagelijks of wekelijks terugkerende activiteiten. Als voorbeeld nemen we aan dat er per tijdseenheid een hoeveelheid $b + a\sin\omega t$ gedumpt wordt. De waarde $2\pi/\omega$ is de *periode* van de dumping, $\omega/2\pi$ is de *frequentie* en ω zelf wordt de *hoekfrequentie* genoemd. De d.v. wordt,

$$q' = -\alpha q + b + a\sin\omega t.$$

De oplossingsmethode gaat nu anders. Breng de term αq naar links en vermenigvuldig met $e^{\alpha t}$,

$$e^{\alpha t}q' + e^{\alpha t}\alpha q = (b + a\sin\omega t)e^{\alpha t}.$$

Merk nu op dat door deze truc links precies de afgeleide van $qe^{\alpha t}$ staat. Integreer aan beide zijden van 0 tot t en los $q(t)$ uit de gevonden uitdrukking op. We vinden,

$$q(t) = Ae^{-\alpha t} + \frac{b}{\alpha} + a\frac{\alpha\sin\omega t - \omega\cos\omega t}{\alpha^2+\omega^2}$$

waarin A een constante is, gegeven door

$$A = \frac{a\omega}{\alpha^2+\omega^2} + q(0) - \frac{b}{\alpha}.$$

Dit antwoord kan iets sprekender gemaakt worden door de hoek δ in te voeren, vastgelegd door $\cos\delta = \alpha/\sqrt{\alpha^2+\omega^2}$ en $\sin\delta = \omega/\sqrt{\alpha^2+\omega^2}$. Dan geldt, $\alpha\sin\omega t - \omega\cos\omega t = \sqrt{\alpha^2+\omega^2}\sin(\omega t - \delta)$ en dus,

$$q(t) = Ae^{-\alpha t} + \frac{b}{\alpha} + \frac{a\sin(\omega t-\delta)}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}.$$

De term met $e^{-\alpha t}$ gaat exponentieel naar nul als $t\to\infty$. Als t dus groot is ten opzichte van de halveringstijd T, dan draagt deze term vrijwel niets bij en kan verwaarloosd worden. Dit is met name van belang voor afvalmateriaal met een korte halveringstijd. Verder herkennen we weer de constante term b/α en tenslotte heeft de periodieke dumping een respons in $q(t)$ die een *fase* δ achterloopt bij de dumping zelf.

De differentiaalvergelijkingen (afgekort met d.v.) die we gezien hebben zijn van de eerste orde, hooguit de eerste afgeleide van de onbekende functie komt in de vergelijking voor. De algemene gedaante van een d.v. van eerste orde luidt,

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

waarin $y(t)$ de te bepalen functie is. Als f niet expliciet van t afhangt noemen we de vergelijking *autonoom*, in andere gevallen *niet-autonoom*. Onze eerste twee voorbeelden zijn autonoom, het derde is niet-autonoom. In de praktijk zijn de meeste d.v.'s niet zo eenvoudig op te lossen als hierboven. Bijvoorbeeld, $y' = -y^2 + ty + 2$ is een d.v. waarvan de oplossingen totaal nieuwe functies zijn, die geen enkel verband hebben met de ons bekende 'klassieke' functies zoals $\log, \cos$ of $\sin$. In dergelijke gevallen moeten we onze toevlucht nemen tot *numerieke berekeningen* op de computer of *kwalitatieve methoden* die alleen maar een globale indruk van het gedrag van de oplossingen geven. Beide methoden zullen we in latere paragrafen behandelen. Soms hebben we geluk en kunnen we de d.v. expliciet oplossen, d.w.z. de oplossingen uitdrukken in 'klassieke' functies en hun integralen. In deze paragraaf behandelen we twee van dergelijke typen.
De eerste methode die men kan proberen is die van de *scheiding van variabelen*. Stel dat de d.v. de speciale gedaante

$$y'(t) = \frac{f(t)}{g(y(t))}$$

heeft. Stel dat F een primitieve van f is en G een primitieve van g. Vermenigvuldig aan beide zijden met dt en $g(y)$. We krijgen $g(y)dy = f(t)dt$. Wiskundig gezien is dit onzin (althans met de wiskunde die we hier bekend veronderstellen), maar als formele tussenstap erg nuttig. Neem aan beide zijden een primitieve en we vinden $G(y) = F(t) + C$, waarin C een willekeurige constante is. Zoals gezegd is bovenstaande oplossingsmethode zeer slordig, maar het antwoord is wel juist (vul maar in!) en dus bruikbaar. Hoe het op de nette manier zou moeten gaan, hebben we in de eerste twee voorbeelden over radioactief verval gezien. Bij deze voorbeelden was de constante C gelijk aan $q(0)$. Met andere woorden, C kan worden vastgelegd door nadere eisen aan de oplossing $y(t)$ op te leggen, zoals een gegeven waarde in 0. Dergelijke eisen noemen we *randvoorwaarden* of *beginvoorwaarden*.

Voorbeeld. Bepaal de functie $y(t)$ die voldoet aan $y' = t(1-y^2)$ en $y(0) = 0$. Scheiding van variabelen levert $dy/(1-y^2) = tdt$ en na integratie, $\log|\frac{1+y}{1-y}| = t^2 + C$. Oplossing van y geeft

$$y(t) = \frac{C_1 e^{t^2} - 1}{C_1 e^{t^2} + 1}$$

waarin $C_1 = e^C$. De beginvoorwaarde $y(0) = 0$ impliceert dat $C_1 = 1$.

Een tweede klasse van oplosbare vergelijkingen is die van de *lineaire vergelijkingen*, d.w.z. vergelijkingen van de vorm

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = r(t).$$

Lineariteit slaat op het feit dat zowel y als y' als term voorkomen met een macht die hooguit 1 is. Merk op dat al onze voorbeelden over het radioactief verval, met name het derde, van dit type zijn. Als $r(t) \equiv 0$ dan noemen we de vergelijking *homogeen*, indien niet, *inhomogeen*. De oplossingsmethode bestaat uit vermenigvuldiging met een slim gekozen *integrerende factor* namelijk $\exp(\int p dt)$,

$$e^{\int p dt}\frac{dy}{dt} + p(t)e^{\int p dt}y = r(t)e^{\int p dt}.$$

Links staat precies de afgeleide van $\exp(\int p dt)y$. Primitiveer aan beide zijden en we vinden als algemene oplossing

$$y(t) = Ce^{-\int p dt} + e^{-\int p dt}\int e^{\int p dt} r(t)dt$$

waarin C weer een willekeurige integratieconstante is die door beginvoorwaarden kan worden vastgelegd.

Voorbeeld. Bepaal de algemene oplossing van $(t^2+1)y' + ty = t^3$. Breng eerst deze vergelijking in de standaardvorm $y' + ty/(t^2+1) = t^3/(t^2+1)$. De integrerende factor is $\exp(\int tdt/(t^2+1)) = \sqrt{t^2+1}$. Vermenigvuldiging hiermee en integratie levert $y\sqrt{t^2+1} = \int t^3 dt/\sqrt{t^2+1} = C + \frac{1}{3}(t^2-2)\sqrt{t^2+1}$. Dus,

$$y(t) = \frac{C}{\sqrt{t^2+1}} + \frac{1}{3}(t^2-2).$$

4.2 Lineaire d.v.'s met constante coëfficiënten

Onder een d.v. van *orde* k verstaan we een d.v. van de vorm

$$\frac{d^k y}{dt^k} = F\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \ldots, \frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}\right).$$

Onder een *lineaire d.v.* van orde k verstaan we een vergelijking van de vorm

$$\frac{d^k y}{dt^k} + p_1(t)\frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}} + \cdots p_{k-1}(t)\frac{dy}{dt} + p_k(t)y = r(t).$$

Als $r(t) \equiv 0$ noemen we de vergelijking *homogeen* anders *inhomogeen*. Voor onze doeleinden is zelfs de klasse van lineaire d.v.'s te uitgebreid en we beperken ons tot tweede orde lineaire d.v.'s waarvan de coëfficiënten p_1, p_2 constante functies zijn. Dus,

$$y'' + py' + qy = r(t) \tag{21}$$

waarin $p, q \in \mathbb{R}$. Eerst bekijken we het homogene geval $r(t) \equiv 0$.

Stelling 4.2.1 *Beschouw de d.v.* (21) *en stel* $r(t) \equiv 0$. *Dan vormt de oplossingsverzameling een lineaire vectorruimte over* $\mathbb{R}$ *van dimensie* 2. *Met andere woorden, er bestaan twee oplossingen* $y_1(t)$ *en* $y_2(t)$ *zó dat elke oplossing op unieke wijze in de vorm* $Ay_1(t) + By_2(t)$, $A, B \in \mathbb{R}$ *geschreven kan worden.*

Uit de lineaire algebra weten we ook dat we voor de basis y_1, y_2 ieder tweetal lineair onafhankelijke oplossingen kunnen nemen. Anders gezegd, ieder tweetal niet-triviale oplossingen $y_1(t)$, $y_2(t)$ zó dat y_1/y_2 niet-constant is voldoet als basis.

Opmerking. Bovengenoemde stelling gaat ook op voor willekeurige homogene lineaire d.v.'s van orde k. De oplossingsverzameling is dan een vectorruimte van dimensie k. Omdat een precieze formulering nog wat extra notatie vergt en we er verder niet naar kijken, laten we deze algemenere stelling achterwege.

We geven voor d.v. (21) met $r(t) \equiv 0$ een basis y_1, y_2. Stel eerst de *karakteristieke vergelijking* op, $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. De nulpunten geven we aan met λ_1, λ_2. We onderscheiden drie gevallen.

i) λ_1, λ_2 reëel en verschillend. We kunnen dan $y_1 = e^{\lambda_1 t}$ en $y_2 = e^{\lambda_2 t}$ nemen.

ii) $\lambda_1 = \lambda_2$. We kunnen $y_1 = e^{\lambda_1 t}$ en $y_2 = te^{\lambda_1 t}$ nemen.

iii) λ_1, λ_2 verschillend en complex, niet reëel. Dan geldt $\lambda_{1,2} = \rho \pm \sigma i$. We kunnen nu $y_1 = e^{\rho t}\cos(\sigma t)$ en $y_2 = e^{\rho t}\sin(\sigma t)$ nemen.
(In feite is de oplossing y van (21) met $r(t) \equiv 0$ net als in i) van de vorm $y(t) = \gamma_1 e^{\lambda_1 t} + \gamma_2 e^{\lambda_2 t}$ maar nu met $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{C}$. De γ_i moeten zo zijn dat $y(t)$ reëel is. Omdat $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ is $y(t)$ reëel precies dan als $\gamma_1 = \overline{\gamma_2}$ en dan is $y(t) = \mathrm{Re}(\gamma_1 e^{\lambda_1 t})$. Met $\gamma_1 = A - iB$ vinden we $y(t) = A\,e^{\rho t}\cos(\sigma t) + B\,e^{\rho t}\sin(\sigma t)$, conform Stelling 4.2.1.)

We beschouwen nu de inhomogene vergelijking

$$y'' + py' + qy = r(t).$$

Oplossing hiervan gaat als volgt. Bepaal op de één of andere manier een oplossing die we de *particuliere* oplossing $y_{\text{part}}(t)$ noemen. (Vergelijk het Engelse woord *particular*.) Er geldt dus $y''_{\text{part}} + py'_{\text{part}} + qy_{\text{part}} = r(t)$. Trek dit af van onze vergelijking. We vinden,

$$(y - y_{\text{part}})'' + p(y - y_{\text{part}})' + q(y - y_{\text{part}}) = 0.$$

Het verschil $y - y_{\text{part}}$ voldoet dus aan de homogeen gemaakte d.v. $y'' + py' + qy = 0$, waarvoor we reeds de algemene oplossing hebben. Noem deze oplossing $y_{\text{hom}}(t)$. De algemene oplossing van onze inhomogene d.v. luidt dus $y_{\text{hom}}(t) + y_{\text{part}}(t)$.

Voorbeeld. We lossen de vergelijking $y'' + 3y' + 2y = r(t)$ op voor diverse $r(t)$. De algemene oplossing van de homogeen gemaakte vergelijking is eenvoudig. De karakteristieke vergelijking luidt $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$ en dus $y_{\text{hom}} = Ae^{-t} + Be^{-2t}$.

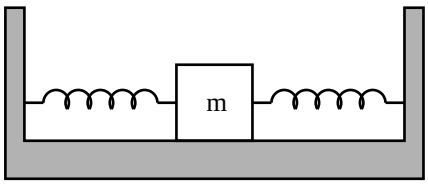
$r(t) = t$. Probeer als particuliere oplossing $y = at + b$ voor nader te bepalen a, b. Dan geldt $y'' + 3y' + 2y = 2at + 2b + 3a$. Opdat dit gelijk is aan t moet gelden $2a = 1$ en $2b + 3a = 0$ en dus $a = 1/2$, $b = -3/4$.

$r(t) = e^t$. Probeer als particuliere oplossing $y = ae^t$. Dan geldt $y'' + 3y' + 2y = 6ae^t$ en dus moeten we $a = 1/6$ nemen.

$r(t) = \cos t$. Probeer als particuliere oplossing $a\cos t + b\sin t$. Dan geldt $y'' + 3y' + 2y = (-a + 3b + 2a)\cos t + (-b - 3a + 2b)\sin t$. Dus $a + 3b = 1$ en $b - 3a = 0$, waaruit volgt $a = 1/10$, $b = 3/10$.

4.3 Harmonische oscillator, resonantie

We beschouwen het mechanische systeem bestaande uit een massa m die in één richting over een grondvlak kan bewegen en aan weerszijden door een veer aan een muur is bevestigd



De oorsprong van de x-as, $x = 0$, zetten we op de evenwichtstoestand van het systeem. Vraag is nu hoe de positie $x(t)$ van de massa zich als functie van de tijd t gedraagt.
Stel eerst dat de massa zich wrijvingsloos over het grondvlak beweegt. De kracht die m ondervindt is gelijk aan $F_{\text{veer}} = -kx$, waarin $k > 0$ de zogenaamde *veerconstante* is. Voor niet al te grote afwijkingen is dit een redelijke aanname die bekend staat als de *wet van Hooke* (Robert Hooke, Engels fysicus en uitvinder van het draagbare uurwerk,

1635-1702). De massa m beweegt zich onder invloed van deze kracht volgens de *tweede wet van Newton*, $F = mx''$. We vinden dus de d.v.

$$mx'' = -kx.$$

De algemene oplossing luidt $a\cos(\sqrt{k/m}\,t)+b\sin(\sqrt{k/m}\,t)$, met a en b willekeurige integratieconstanten. We hebben dus een periodieke beweging met periode $2\pi\sqrt{m/k}$. Kies δ zó dat $\cos\delta = a/\sqrt{a^2+b^2}$, $\sin\delta = b/\sqrt{a^2+b^2}$ en stel $A = \sqrt{a^2+b^2}$. Onze oplossing kunnen we herschrijven als $A\sin(\omega t - \delta)$, $\omega = \sqrt{k/m}$. Dit is de algemene gedaante van een *harmonische trilling* met *amplitude* A, *hoekfrequentie* ω en *faseverschuiving* δ. Het mechanische systeem zelf noemen we een *harmonische oscillator*.
We nemen nu aan dat er wel wrijving optreedt bij de beweging over het grondvlak. Als modellering van de wrijvingskracht kiezen we $F_{\text{wrijving}} = -cx'$ waarin $c > 0$ de *wrijvingscoëfficiënt* is. We merken hier wel nadrukkelijk op dat er vele andere mogelijkheden zijn voor de wrijvingsterm, afhankelijk van de situatie. Zo is er bijvoorbeeld de *statische wrijving*, de kracht die overwonnen moet worden om een voorwerp van zijn plaats te trekken. In onze situatie nemen we aan dat de statische wrijving verwaarloosbaar is en dat we alleen *dynamische wrijving* hebben. Onder de dynamische wrijvingskrachten zijn er ook diverse mogelijkheden. De luchtremming die een parachutespringer ondervindt, of de spaceshuttle bij terugkeer in de dampkring, is evenredig met een macht van x' die ongeveer 2 is. Zou dit niet het geval zijn, dan was parachutespringen een zeer hachelijke onderneming en zouden er bij terugkeer van de spaceshuttle geen problemen met hitteontwikkeling zijn. Hoe interessant ook, we gaan hier verder niet op in en keren terug naar onze situatie. De d.v. luidt

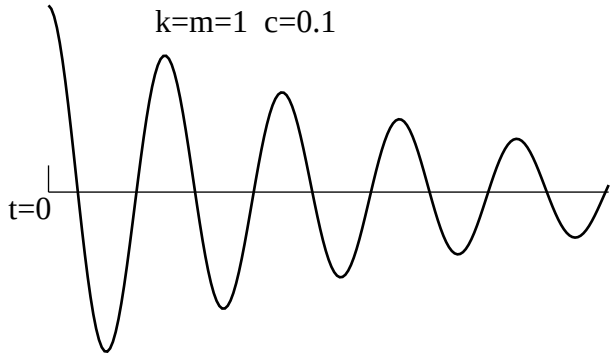
$$mx'' = -cx' - kx. \tag{22}$$

Dit is een lineaire, homogene d.v. met constante coëfficiënten. De karakteristieke vergelijking luidt $m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$ met de oplossingen $\lambda_{1,2} = -(c \pm \sqrt{c^2 - 4km})/2m$. We onderscheiden drie gevallen naar toenemende c.

a) $c^2 < 4km$. Dan zijn $\lambda_{1,2}$ complex en de algemene oplossing luidt

$$x(t) = e^{-ct/2m}(a\cos\omega t - b\sin\omega t), \qquad \omega = \frac{1}{2m}\sqrt{-c^2+4km}.$$

De grafiek van x ziet er globaal uit als

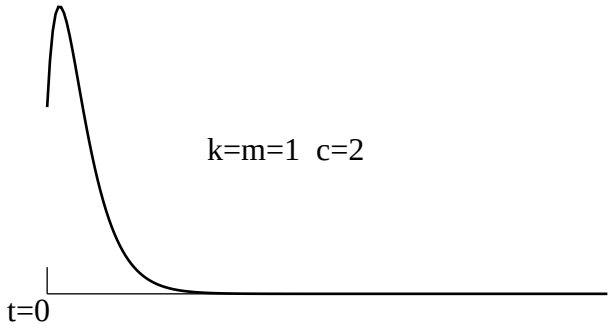


en we noemen dit geval de *gedempte trilling*.

b) $c^2 = 4km$. Dan geldt $\lambda_1 = \lambda_2$ en de algemene oplossing luidt

$$x(t) = (at + b)e^{-ct/2m}.$$

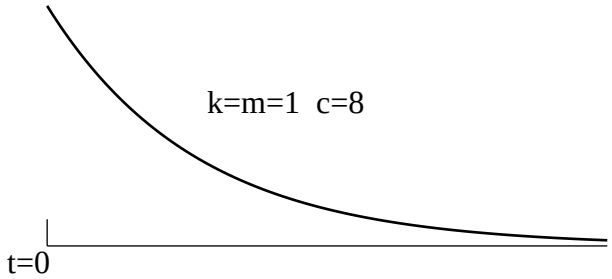
Dit geval staat bekend onder de naam *kritische demping*. Een typische grafiek,



c) $c^2 > 4km$. Dan zijn $\lambda_{1,2}$ reëel en negatief. De algemene oplossing luidt

$$x(t) = ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t}.$$

Dit is het geval van *overdemping*. Een grafiek,



In alle drie gevallen geldt voor iedere oplossing dat $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. Stel dat we k, m vasthouden en c variëren. Dan blijkt dat de convergentie naar nul van de algemene oplossing het snelst is bij $c^2 = 4km$ (Ga na!). Dit verklaart de benaming kritische demping.

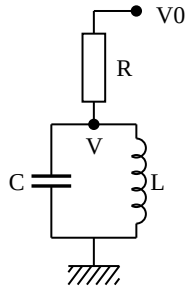
Het verschijnsel (gedempte) harmonische trilling is een universeel begrip in de natuurwetenschap en komt in vele gedaanten voor. Dat deze gedaante niet mechanisch hoeft te zijn blijkt uit het volgende voorbeeld. Beschouw een elektrische schakeling met een weerstand R, een condensator C en een spoel L, zie figuur 1.

De spanning V_0 is extern en kan al of niet ingeschakeld zijn. De spanning $V(t)$ voldoet aan de volgende d.v.

$$V'' + \frac{1}{RC}V' + \frac{1}{LC}V = \frac{1}{RC}V_0'.$$

Als V_0 constant wordt gehouden hebben we weer te maken met een gedempte harmonische oscillator waarvan de demping door $1/RC$ bepaald wordt. Het gedrag van dergelijke schakelingen wordt interessant als we V_0 periodiek laten variëren.

Laten we daarom eens kijken naar een harmonische oscillator die door een uitwendige kracht wordt aangedreven. In het bijzonder speelt het begrip *resonantie* hierbij een grote



Figuur 1: Voorbeeld van een elektronische schakeling

rol. Voor de modellering van het begrip resonantie voeren we aan onze mechanische harmonische oscillator een periodieke uitwendige kracht van de vorm $F_{\text{uit}} = f \sin \nu t$ toe. De totale kracht die op m werkt is nu $F_{\text{uit}} + F_{\text{veer}} + F_{\text{wrijving}} = -cx' - kx + f \sin \nu t$. De d.v. wordt,

$$mx'' + cx' + kx = f \sin \nu t. \tag{23}$$

Dit is een inhomogene lineaire d.v. en we moeten dus een particuliere oplossing zien te vinden. Probeer hiervoor $x_{\text{part}} = \alpha \cos \nu t + \beta \sin \nu t$ met nader te bepalen α, β. Enig rekenwerk levert

$$\alpha = \frac{-cf\nu}{c^2\nu^2 + (k - m\nu^2)^2} \qquad \beta = f\,\frac{k - m\nu^2}{c^2\nu^2 + (k - m\nu^2)^2}. \tag{24}$$

Kies nu δ zó dat

$$\sin \delta = \frac{c\nu}{\sqrt{c^2\nu^2 + (k - m\nu^2)^2}} \qquad \cos \delta = \frac{k - m\nu^2}{\sqrt{c^2\nu^2 + (k - m\nu^2)^2}}. \tag{25}$$

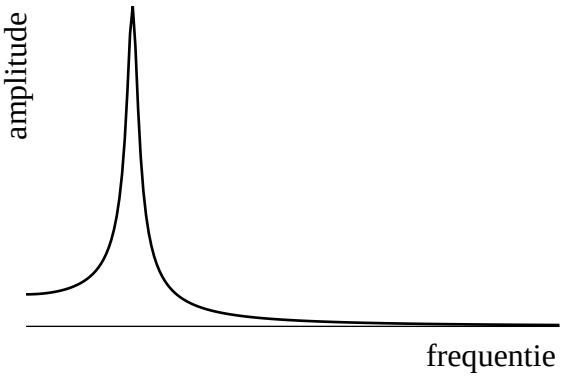
De algemene oplossing van de inhomogene d.v. wordt

$$x(t) = x_{\text{homogeen}}(t) + \frac{f \sin(\nu t - \delta)}{\sqrt{c^2\nu^2 + (k - m\nu^2)^2}} \tag{26}$$

waarin x_{homogeen} de algemene oplossing van de homogeen gemaakte d.v. is. We hebben al gezien dat, zodra $c > 0$, de term x_{homogeen} op den duur naar 0 toe gaat. We noemen dit de *uitdemping* van de eigentrillingen van de oscillator. Op den duur krijgen we alleen met de tweede term van onze oplossing te maken. Deze laatste term, de respons van de oscillator op F_{uit}, beschrijft een harmonische trilling die een fase δ bij F_{uit} achterloopt en amplitude

$$\rho = \frac{f}{\sqrt{(k - m\nu^2)^2 + (c\nu)^2}}$$

heeft. Zetten we deze amplitude uit tegen ν, de aandrijffrequentie, dan krijgen we een grafiek die grofweg de volgende gedaante heeft,



Deze functie heeft een maximum bij $\nu_0 = (2m)^{-1}\sqrt{4mk - 2c^2}$. De eigenfrequentie van de oscillator is $\nu_{\text{eig}}/2\pi = (4m\pi)^{-1}\sqrt{4mk - c^2}$. Neem aan dat c klein is. Verwaarlozen we termen van orde c^2 dan zien we dat de piek optreedt bij $\nu_0 \approx \sqrt{k/m} \approx \nu_{\text{eig}}$. De respons van de oscillator is dus het hevigst als de aandrijffrequentie in de buurt van de eigenfrequentie van de oscillator ligt. Dit verschijnsel staat bekend als resonantie. De piek heeft bij benadering de hoogte $f/c\nu$. Als $c \downarrow 0$ dan zien we dat deze piek zelfs willekeurig hoog gemaakt kan worden.is de versnelling van de cabine relevant Een interessant detail is dat bij resonantie, d.w.z. $\nu^2 \approx k/m$, de faseverschuiving δ ongeveer $\pi/2$ bedraagt, de respons loopt vrijwel $\pi/2$ achter bij de aandrijving.

Opmerking. De afleiding van de particuliere oplossing x_{part} van (23) loopt wat soepeler als we met complexe getallen werken. Merk op dat het imaginaire deel van een complex-waardige functie u (op $\mathbb{R}$) die voldoet aan

$$mu'' + cu' + ku = f\exp(i\nu t) \tag{27}$$

een (reëel-waardige) oplossing x is van (23). Proberen we als particuliere oplossing $u_{\text{part}} = \gamma\exp(i\nu t)$ van (27) met nader te bepalen complexe γ dan vinden we onmiddellijk dat $-\nu^2 m\gamma + i\nu c\gamma + k\gamma = f$. Dus

$$\gamma = \frac{f}{\tau} \quad \text{met} \quad \tau = ic\nu + k - m\nu^2. \tag{28}$$

Het complexe getal τ kan geschreven worden als $\tau = |\tau|\exp(i\delta)$ met δ zodat $\sin(\delta)$ en $\cos(\delta)$ is als in (25) en $|\tau| = \sqrt{c^2\nu^2 + (k - m\nu^2)^2}$. Daarom is $x_{\text{part}} = \text{Im}(u_{\text{part}}) = \text{Im}(\gamma\exp(i\nu t)) = \text{Im}(\frac{f}{|\tau|}\exp(i(\nu t - \delta)))$. Dit leidt tot de uitdrukking in (26).

Het is interessant te zien dat er situaties zijn waarin resonanties vermeden dienen te worden, en situaties waarin er juist gebruik van wordt gemaakt. Van de eerste soort is de ramp met de *Tacoma-brug*, een hangbrug, de bekendste. Op 1 juli 1940 werd de Tacoma Narrows Bridge by Puget Sound in de staat Washington voor het verkeer geopend. De daarop volgende dagen begon de brug een merkwaardig gedrag te vertonen door in verticale oscillatie te geraken. Deze beweging bleef enkele maanden aanhouden en de brug werd al gauw een toeristische attractie. Tot 7 november 1940. In de ochtend, 7 uur, begon de brug te golven met uitwijkingen die tot een meter op konden lopen.

Om ongeveer 10 uur knapte er iets en de oscillaties werden heviger. Op het ene moment was één eind van de weg acht meter hoger dan het andere, het volgende moment acht meter lager. Om 10u30 traden de eerste scheuringen op en om 11u10 stortte de brug in. De verklaring die uiteindelijk werd gevonden is de volgende. Als een object in een luchtstroom wordt geplaatst treden er onder zekere condities wervelstromen achter het object op. Deze wervels raken vervolgens los van het object en worden met de luchtstroom meegevoerd. Als de frequentie waarmee deze wervels loslaten dicht bij de eigenfrequentie van de brug ligt, en de brug ook nog slecht gestroomlijnd is, treedt er resonantie op die in het geval van de Tacoma-brug fataal was.
Een voorbeeld waarbij juist gebruikt wordt gemaakt van resonantie is het elektrische circuit dat we hierboven zagen. Stel dat $V_0(t) = V_0 \sin \nu t$. Een eenvoudige berekening leert dat, na uitdemping van de eigentrillingen, geldt

$$V(t) = \frac{V_0}{\sqrt{1 + (RC)^2 \left(\nu - \frac{1}{LC\nu}\right)^2}} \sin(\nu t - \delta)$$

voor zekere δ. Bij geschikte keuze van R, C, L vertoont de amplitude van deze trilling een scherpe piek ter hoogte V_0 bij $\nu = 1/\sqrt{LC}$. Blijkbaar worden dus trillingen met hoekfrequentie $1/\sqrt{LC}$ door deze schakeling uitgefilterd, de rest wordt als het ware kortgesloten. Van dit principe wordt gebruik gemaakt bij afstemcircuits voor radios, waarin we een bepaalde frequentie uit het gehele radiospektrum willen selecteren.

4.4 Oefeningen

0. In deze opgave zijn γ_1 en γ_2 complexe getallen en $\lambda_1 = \rho + i\sigma$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \rho - i\sigma$ met $\rho, \sigma \in \mathbb{R}$.

   (a) Bewijs dat de functie $y(t) := \gamma_1 \exp(\lambda_1 t) + \gamma_2 \exp(\lambda_2 t)$ reëel-waardig is precies dan als $\gamma_1 = \overline{\gamma_2}$.

   (b) Schrijf $\gamma_1 = a + ib = r \exp(i\delta)$ voor geschikte reële getallen a, b, r en δ (kan dat? Wat is de relatie tussen γ_1, a, b, r en δ?). Stel $\gamma_2 = \overline{\gamma_1}$.
   Laat zien dat $y(t) = ae^{\rho t} \cos(\sigma t) - be^{\rho t} \sin(\sigma t) = re^{\rho t} \cos(\sigma t + \delta)$.

1. Bepaal de algemene oplossingen van

   (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1+2y}{4-x}$

   (b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{\sin y}$

   (c) $\frac{dy}{dx} = -(1 + y^2) \cdot \ln x$

   (d) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2-3x+2}$

   (e) $\frac{dy}{dx} = \frac{yx}{x^2-3x+2}$

2. Bepaal de algemene oplossing van

   (a) $x' = x + e^t$

   (b) $x' = \sqrt{t}\, x + t^2$

(c) $x' = 2x + e^{-t}$

(d) $x' = x + \cos t$

(e) $x' = tx + 2t$

(f) $x' = -(1 + \sin t)(x - 2)$

(g) $x' = \frac{1}{1+t}\, x + \sin t$

(voor het laatste onderdeel van deze opgave heb je de definities van de functies $\mathrm{Si}(x)$ en $\mathrm{Ci}(x)$ nodig:

$$\mathrm{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t \quad \text{resp.} \quad \mathrm{Ci}(x) := -\int_x^\infty \frac{\cos(t)}{t}\mathrm{d}t.$$

De oplossing is

$$x(t) = (1 + t)(C + \mathrm{Si}(t + 1)\cos 1 - \mathrm{Ci}(t + 1)\sin 1),$$

met willekeurige integratieconstante C).

3. *De levensduur van een gloeidraad.* We beschouwen een gloeidraad in een lamp als een dunne rechte cilinder-vormige draad. Door de draad loopt een elektrische stroom waardoor de draad een constante hoge temperatuur heeft. We nemen verder nog aan dat de lengte ℓ van de draad constant is. Ten gevolge van de hoge temperatuur verdampt er voortdurend materiaal van de draad. Per tijdseenheid verdampt er een hoeveelheid materiaal evenredig met het oppervlak van de draad. Op een tijdstip $t = 0$ is de dikte van de draad d_0. De draad knapt als hij minder dik is dan $0.1d_0$.

   (a) Geef een differentiaalvergelijking voor de dikte d van de draad.

   (b) Los deze differentiaalvergelijking op.

   (c) Bepaal nu de levensduur van de draad als gegeven is dat op $t = 0$ de dikte 0.1mm is en op $t = 100$ de dikte 0.09mm is.

4. Een bekende methode om archeologische vondsten te dateren is de C^{14}-methode ontdekt door Willard Libby rond 1949. Het idee is verbluffend eenvoudig maar zeer effectief. De aardatmosfeer vangt continu kosmische straling op die neutronen produceert en die op hun beurt weer met stikstof combineren tot de radioactieve koolstof-isotoop C^{14}. De halfwaardetijd van deze isotoop is 5568 jaar. Hierdoor bestaat een klein percentage van de kooldioxide in de atmosfeer uit radioactieve CO_2. Een belangrijke aanname is dat dit percentage constant is over perioden van duizenden jaren. Zolang een organisme leeft zal, door voortdurende koolstof-uitwisseling met de omgeving, zijn C^{12}/C^{14} verhouding gelijk zijn aan die van de atmosfeer. Nadat een organisme gestorven is stopt de uitwisseling en vervalt de aanwezige radioactieve koolstof. Hierdoor zal in bijvoorbeeld hout, dat enkele duizenden jaren oud is, veel minder C^{14} voorkomen dan in nog levend hout.

   (a) Houtskool gevonden in de woonruimten van de beroemde grotten van Lascaux, Frankrijk, vertoonde 0.97 C^{14} desintegraties per minuut per gram. Levend hout vertoont 6.68 desintegraties. Bereken hoelang geleden de Lascaux grotten bewoond werden.

(b) Bij opgravingen in Nippur, Babylonië, gaf houtskool afkomstig uit een dakbalk 4.09 desintegraties per minuut per gram te zien. Levend hout vertoont 6.68 desintegraties. Aannemende dat de houtskool werd gevormd in Hammurabi's tijd, vind een schatting voor de tijd van Hammurabi's opvolging.

Er moet aan toegevoegd worden dat er in werkelijkheid nog fluctuaties optreden van de C^{14}-fractie in de atmosfeer. De C^{14}-methode moet daarom voortdurend geijkt worden tegen andere tijdsschalen. Vooral na de atoomproeven in de vijftiger jaren is de C^{14}-fractie toegenomen.

5. Een mottenbal is een bolletje kamfer dat snel verdampt. Door dit verdampen nemen omvang en gewicht van het bolletje af. Het gewichtsverlies is evenredig met de oppervlakte van het bolletje. Het gewicht G (in gram) van het bolletje is een functie van de tijd t (in weken).

   (a) Laat zien dat er een positieve constante c bestaat zodat geldt:

   $$G' = -cG^{2/3}.$$

   (b) Stel dat het bolletje aanvankelijk 10 gram woog en na tien weken nog maar 1 gram. Na hoeveel weken is het bolletje geheel verdampt?

6. We beschouwen een meer met constante inhoud V in km^3 waarin zich een hoeveelheid chemisch afval bevindt. Het afval is voortdurend gelijk verdeeld over het hele meer. Op tijdstip t is de concentratie $c(t)$. Een vervuilde rivier komt uit in het meer, de concentratie van chemisch afval in de rivier is constant k en per tijdseenheid komt een hoeveelheid s rivierwater in het meer, terwijl eenzelfde hoeveelheid water per tijdseenheid het meer uitstroomt.

   (a) Geef een differentiaalvergelijking voor $c(t)$ en los deze op.
   Bereken $\lim_{t\to\infty} c(t)$.

   (b) Laat er nu ook een gewichtshoeveelheid chemisch afval g per tijdseenheid illegaal in het meer geloosd worden. Los de nieuwe differentiaalvergelijking op en bepaal $\lim_{t\to\infty} c(t)$ indien deze bestaat.

   (c) Neem als tijdseenheid 1 jaar. Stel de vervuiling van de rivier wordt beëindigd en de illegale lozingen worden gestaakt op het tijdstip t_1 zodanig dat $c(t_1) = 100c(0)$, uiteraard $c(0) < \frac{1}{100}$. We noemen nu $\frac{s}{v} = \frac{1}{10}$ snelle doorstroming en $\frac{s}{v} = \frac{1}{100}$ langzame doorstroming. Bepaal voor beide gevallen hoe lang het duurt voordat de concentratie $c(t)$ weer de oorspronkelijke waarde $c(0)$ heeft.

7. De aanwezigheid van een bepaald gif doodt een bacteriesoort met een snelheid die evenredig is met de hoeveelheid aanwezige bacteriën en de hoeveelheid gif. Noem de evenredigheidsfactor a. Als er geen gif zou zijn zou de bacteriepopulatie groeien met een snelheid evenredig aan het aantal aanwezige bacteriën. Noem deze evenredigheidsfactor b. Stel dat de hoeveelheid gif T in constant tempo toeneemt, d.w.z. $dT/dt = c$ en dat de gifproductie begint op tijdstip $t = 0$. Zij $y(t)$ het aantal levende bacteriën op tijdstip t. Stel een differentiaalvergelijking op voor $y(t)$ en onderzoek wat er gebeurt als $t \to \infty$.

8. Beschouw een bacteriepopulatie in een reservoir met $N(t)$ bacterieën per volume eenheid. De groeifactor k van deze populatie hangt af van de aanwezige voedselconcentratie C, dus $k = k(C)$. Van de functie $k(C)$ wordt aangenomen dat $k(0) = 0$, dat hij stijgend is en naar een limiet nadert als $C \to \infty$. Van de voedselconsumptie nemen we aan dat deze gelijk is aan $\gamma(C)N$. Hierin is $\gamma(C)$, de voedselconsumptie per bacterie en per tijdseenheid, een functie die stijgt met C en naar een limiet nadert als $C \to \infty$. We nemen voor het gemak aan, $\gamma(C) = \alpha k(C)$ (Segel) voor een zekere constante α.

   (a) Geef een stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen voor N en C. Laat zien dat $C + \alpha N$ constant in de tijd is. Noem deze constante C_0. Elimineer N uit de vergelijkingen en leidt een eerste orde vergelijking voor C af.

   (b) Stel we nemen $k(C) = k \cdot C$. Deze voldoet weliswaar niet aan de aannamen, maar laat toch even zien dat we de vergelijking

   $$C' = -kC(C_0 - C)$$

   krijgen (*continue logistische groei*). Laat zien dat $C \to 0$ als $t \to \infty$ als $0 < C(0) < 1$. Wat volgt hieruit voor $N(t)$?

   (c) Laat nu voor algemene $k(C)$ zien dat $\lim_{t\to\infty} C(t) = 0$ als $C(0) < C_0$. (Hint: Ga na dat $C(t)$ een positieve dalende functie is)

9. Een regendruppel valt in een wolk onder invloed van de zwaartekracht naar beneden. Door condensatie groeit de waterdruppel: de massatoename per tijdseenheid is evenredig met de oppervlakte. Neem aan dat de druppel steeds bolvormig is. Stel differentiaalvergelijkingen op voor de massa en voor de snelheid van de regendruppel. (De wet van Newton luidt: $\dfrac{d}{dt}(mv) = mg$.) Los deze vergelijkingen op.

10. Bepaal de algemene oplossing van

    (a) $x'' - 3x' - 4x = 0$

    (b) $x'' - 2x' + x = 0$

    (c) $x'' + 4x' + 5x = 0$

    (d) $x'' + x = \sin 2t$

    (e) $x'' + 3x' + 2x = t$

    (f) $x'' + 3x' + 2x = e^{\alpha t}$ 1) $\alpha = -1$ 2) $\alpha = 1$

11. Een bekende oliemaatschappij heeft het volgende probleem. Bij het boren naar olie raakt de boorstaaf in horizontale richting in trilling. Aangezien de boorkop breder is dan de boorstaaf is dit aanvankelijk niet zo erg, maar als de amplitude van de trilling te groot wordt, gaat de boorstaaf tegen de wand van het boorgat slaan. De boorstaaf raakt hierdoor beschadigd en er is zelfs eens een boorstaaf gebroken. We beschouwen het volgende vereenvoudigde model:

    $$x'' + 2\mu x' + \omega^2 x = a\sin(\nu t).$$

Waarin: x de horizontale uitwijking van de boorstaaf is; μ een dempingsconstante; $\omega = \frac{1}{\sqrt{L}}$ is de eigenfrequentie van de boorstaaf met lengte L; a en ν zijn respectievelijk de sterkte en de frequentie van de aandrijving, onder andere bepaald door de omwentelingssnelheid van de boorstaaf.

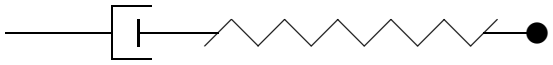
Van de oliemaatschappij hebben we de volgende parameterwaarden opgekregen:

$$\mu = \frac{1}{4}, \quad a = 1, \quad \text{en} \quad \nu^2 = \frac{8}{9}.$$

Als eenheid van lengte in verticale richting hebben we de kilometer gekozen. De lengte L (in kilometers) van de boorstaaf geeft tevens de diepte waarop de boorkop zich bevindt. Bij horizontale uitwijking 2 (in inches) slaat de boorstaaf tegen de wand van het boorgat. We nemen aan dat het uitdempende deel van de uitwijking $x(t)$ verwaarloosd mag worden. Op welke boordiepte verwacht je de eerste problemen?

12. Een parachutespringer die samen met zijn parachute een massa m heeft springt van grote hoogte naar beneden en opent meteen de parachute. De valsnelheid van de parachutist nadert een constante waarde. We bekijken twee modellen, één waarin de remkracht van de parachute gelijk is aan cV en één waarin de remkracht gelijk is aan cV^2. Hierin is V de valsnelheid en c een zekere constante, die experimenteel bepaald moet worden. Bereken voor elk van de twee modellen de limietwaarde van de valsnelheid. Let in het bijzonder op de afhankelijkheid van m.

13. Het massa-veer-demper-systeem



wordt door de 2de orde differentiaalvergelijking

$$m\,x'' \;+\; c\,x' \;+\; k\,x \;\;=\;\; 0$$

gemodelleerd. Hierbij zijn de massa $m = \frac{1}{5}$ en de veerconstante $k = 25\pi$ vast, terwijl de demping c van de viscositeit van het in de demper gebruikte olie afhangt. We hebben 3 standaard soorten olie tot onze beschikking, leidend tot de drie waarden $6, 8$ en 10 van c.

Na een uitrekking $x(0) = 1$ wordt de massa los gelaten. We zijn erin geïnteresseerd dat het systeem zo snel mogelijk tot rust komt, d.w.z. $|x(t)| \leq 10^{-3}$ voor alle $t \geq \tau$ met $\tau > 0$ zo klein mogelijk. De beginsnelheid bij het los laten is $x'(0) = 0$.

(a) Welke soort olie zorgt voor de kleinste waarde van τ ?

(b) De oliemaatschappij kan op aanvraag ook speciaal olie produceren. Hoe groot zou de resulterende waarde van c moeten zijn opdat τ minimaal wordt?

(c) Je mag de massa bij het loslaten een stoot geven, d.w.z. de beginsnelheid $\dot{x}(0)$ zelf bepalen. Met welke standaard soort olie kun je τ nu zo klein mogelijk maken?

14. Een projectiel wordt vanaf de aarde verticaal omhoog geschoten met een snelheid V_0. We verwaarlozen de luchtweerstand, maar nemen wel de afhankelijkheid van de zwaartekracht als functie van de afstand van het projectiel tot de aarde in beschouwing. De aantrekkingskracht van de aarde bedraagt mgR^2/r^2 waarin m de massa van het projectiel is, g de valversnelling (versnelling van de zwaartekracht), R de straal van de aarde en r de afstand van het projectiel tot het centrum van de aarde. We willen de minimale V_0 berekenen opdat het projectiel niet meer terugvalt naar de aarde. M.a.w. we willen de verticale ontsnappingssnelheid van de aarde weten.

(a) Laat zien dat de bewegingsvergelijking luidt:

$$mr'' = -mg\frac{R^2}{r^2}.$$

(b) Vermenigvuldig deze vergelijking aan weerszijden met r' en primitiveer. (We krijgen een integratieconstante E en de relatie die ontstaat tussen r' en r kan gezien worden als de wet van energiebehoud).

(c) Maak nu gebruik van $(r')^2 \geq 0$ en vind, afhankelijk van E een bovengrens voor r. Voor welke E kan r onbegrensd toenemen?

(d) Bereken nu de ontsnappingssnelheid als functie van g en R. Zij tenslotte gegeven dat $g = 10m/s^2$ en $R = 6400km$. Bereken de expliciete waarde van de ontsnappingssnelheid.

Er is ook een ontsnappingsnelheid, met een kleinere waarde, in het geval we het projectiel in horizontale richting wegschieten. Deze wordt in een latere opgave bepaald.

15. We bekijken het veersysteem (de mechanische harmonische oscillator) uit §4.3, maar nu in de situatie waarbij de veer links en de veer rechts verschillende veerconstanten hebben, zeg k_1, respectievelijk k_2.

(a) Geef de bij deze situatie passende variant van (22).

(b) Stel nu dat de rechterwand enigszins kan bewegen en dat de afwijking op tijdstip t van de beginsituatie (op tijdstip $t = 0$) gelijk is aan $\epsilon \sin(\nu t)$, voor kleine constante ϵ. Leid de bewegingsvergelijking af voor deze situatie en vergelijk die met die in (23).

16. Zij $u(t) := x(t) + iy(t)$ een complex-waardige functie (x en y zijn reëel-waardig) zo dat

$$mu''(t) + cu'(t) + ku(t) = f\exp(i\nu t) \tag{29}$$

met m, c, k en f bekende reële constanten. Hier is $u'(t) = x'(t) + iy'(t)$, etc..

(a) Laat zien dat $x(t) = \mathrm{Re}(u(t))$ voldoet aan

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = f\cos(\nu t). \tag{30}$$

(b) Bekijk de vector-waardige functie $\mathbf{u}$ met als coördinaten $u_1 := u'$ en $u_2 := u$. Laat zien dat

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t) + f\exp(i\nu t)\mathbf{b} & \text{en} \\ u(t) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}(t). \end{cases} \tag{31}$$

Hierbij is

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} -m^{-1}c & -m^{-1}k \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} := e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{c} := e_2. \tag{32}$$

(c) We proberen voor deze eerste-orde twee-dimensionale differentiaalvergelijking een particuliere oplossing te vinden van de vorm $\mathbf{u}_{\mathrm{part}}(t) = \exp(i\nu t)\mathbf{u}_0$ voor een nader te bepalen constante vector $\mathbf{u}_0$. Laat zien dat $\mathbf{u}_0 = f\,(i\,\nu\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$ en concludeer dat een particuliere oplossing u van (29) gegeven wordt door

$$u(t) = f\,H(\nu)\exp(i\nu t)$$

waarbij

$$H(\nu) := \mathbf{c}^{\mathrm{T}}(i\,\nu\,\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}. \tag{33}$$

Je kunt H schrijven als $H(\nu) = |H(\nu)|\,\exp(-i\,\delta(\nu))$ (waarom?). Laat zien dat een oplossing van (30) gegeven wordt door

$$x(t) = f\,|H(\nu)|\,\cos(\nu\,t - \delta(\nu)). \tag{34}$$

H is de zogenaamde *response functie* van (31): $H(\nu)$ geeft aan hoe dit systeem reageert op als input een harmonische oscillatie met frequentie ν. De output (u of x) is ook weer een harmonische oscillatie met dezelfde frequentie. $|H(\mu)|$ is de factor waarmee de amplitude verandert, $\delta(\nu)$ is de waarde waarmee de fase verschoven wordt.

(d) Zie in dat $|H(\nu)|$ groot is als $i\nu$ dicht bij een eigenwaarde van $\mathbf{A}$ ligt.

(e) Bewijs dat voor iedere oplossing u_{hom} van het homogene deel $\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u}$ van (31) geldt $u_{\mathrm{hom}}(t) \to 0$ als $t \to \infty$ dan en slechts dan als $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ voor de twee (complexe) eigenwaarden λ_1 en λ_2 van $\mathbf{A}$. Zie ook §5.2.

(f) Bewijs dat het reële deel van beide eigenwaarden van de specifieke matrix $\mathbf{A}$ in (32) negatief is. Concludeer dat op den duur (voor $t \to \infty$) de oplossing van (30) gelijk is aan de functie x in (34).

17. We generaliseren het systeem in §4.3 en beschouwen een mechanisch systeem bestaande uit twee naast elkaar liggende massa's m_1 (aan de linker–) en m_2 (aan de rechterkant). De massa's zijn met elkaar verbonden met een veer (veer 2) met veerconstante k_2. Massa 1 is aan de linkerzijde met een veer aan de linker muur verbonden en massa 2 aan de rechterzijde aan de rechter muur. De veerconstanten van deze veren zijn respectievelijk k_1 en k_3. x_i is de afwijking van massa i van diens evenwichtspositie. We bekijken dus alleen verstoringen van de evenwichtspositie! Massa i ondervindt wrijving met wrijvingscoëfficiënt c_i.

(a) Laat zien dat de beweging van het systeem beschreven kan worden door

$$M\mathbf{x}'' = -C\mathbf{x}' - K\mathbf{x} \tag{35}$$

met $\mathbf{x}$ de vector met als coördinaten x_1 en x_2 en M, C en K 2×2 matrices waarbij

$$M := \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Geef een uitdrukking voor de matrix K (in termen van k_1, k_2, k_3). (Hint: merk op dat veer 2 op massa 1 en op massa 2 een kracht uitoefent die (in grootte) even groot is. Merk op dat op tijdstip t de verandering van de lengte van deze veer (t.o.v. de lengte in evenwicht) gelijk is aan $x_2(t) - x_1(t)$.)

(b) Bekijk de vector-waardige functie $\mathbf{u}$ met als coördinaten $u_1 := x_1'$, $u_2 := x_2'$, $u_3 = x_1$, $u_4 = x_2$. Schrijf het systeem (35) om tot een eerste-orde vier-dimensionale differentiaalvergelijking.

(c) Stel nu dat de rechterwand enigszins kan bewegen en dat de afwijking op tijdstip t van de beginsituatie (op tijdstip $t = 0$) gelijk is aan $\epsilon \sin(\nu t)$, voor kleine constante ϵ (als in Oefening 15b). Pas de vergelijking (35) en vervolgens de vergelijking die je in onderdeel (b) gevonden hebt aan aan deze situatie.

18. **Resonantie in een elektronische schakeling.** In deze opgave gaan we het verschijnsel van de aangedreven gedempte harmonische oscillator onderzoeken aan de hand van een elektronische schakeling, opgebouwd uit een weerstand, een condensator en een spoel. Een voorbeeld van zo'n schakeling is in figuur 1 gegeven. Het gedrag van zo'n schakeling kan worden beschreven met behulp van een stelsel differentiaalvergelijkingen. Om te zien hoe dit in zijn werk gaat bekijken we eerst de verschillende componenten afzonderlijk.

- Bij een **weerstand** is er een erg eenvoudig verband tussen de stroom $I(t)$ die op tijdstip t door de weerstand loopt en de spanning $V(t)$ over de weerstand; volgens de *wet van Ohm* geldt

$$V(t) = I(t)R,$$

waarbij R de weerstand van de weerstand is.

- Bij een **condensator** geldt

$$\dot{V}(t)C = I(t),$$

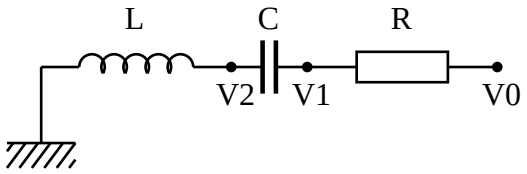
waarbij $V(t)$ de spanning over de condensator is, en $I(t)$ de stroom die door de condensator loopt. De constante C is de capaciteit van de condensator.

- Bij een **spoel** tenslotte geldt

$$V(t) = \dot{I}(t)L,$$

waarbij $I(t)$ en $V(t)$ de stroom door de spoel en de spanning over de spoel aangeven en L staat voor de impedantie van de spoel.

We bekijken nu onderstaande schakeling waarin een weerstand, een condensator en een spoel in serie zijn geschakeld.



De spoel wordt geaard en de weerstand wordt aangesloten op een spanningsbron met spanning $V_0 = V_0(t)$. De spanning over de weerstand geven we aan met $V_0 - V_1$ en die over de spoel met V_2. We zijn geïnteresseerd in het effect van V_0 op V_1 en V_2. Door onze schakeling loopt een stroom $I = I(t)$ en er geldt

$$I(t) = \frac{V_0(t) - V_1(t)}{R} \tag{36}$$

$$I(t) = (\dot{V}_1(t) - \dot{V}_2(t))C \tag{37}$$

$$\dot{I}(t) = \frac{V_2(t)}{L}. \tag{38}$$

Opdracht 1 *De spanningen V_1 en V_2 voldoen aan een stelsel differentiaalvergelijkingen van de vorm*

$$\dot{V}_1(t) = -\frac{RV_2(t)}{L} + \dot{V}_0(t) \tag{39}$$

$$\dot{V}_2(t) = \dot{V}_1(t) + A(V_1(t) - V_0(t)). \tag{40}$$

Gebruik (36–38) *om de waarde van de constante A te bepalen.*

Aan dit stelsel voegen we de beginvoorwaarden

$$V_1(0) = \gamma_1, \quad V_2(0) = \gamma_2$$

toe.

Opdracht 2 *Laat*

$$R = 0.2, \quad L = 1, \quad C = 1 \quad en \quad V_0(t) = \sin(\omega t),$$

met $\omega = 0.1$. Gebruik Mathematica om in één figuur de grafieken van de oplossing $V_1(t)$, $V_2(t)$ en de grafiek van $V_0(t)$ als functie van t te genereren voor

$$\gamma_1 = 0.1, \quad \gamma_2 = 0.$$

Laat t lopen over ongeveer 5 perioden van het ingangssignaal. Je kunt hierbij het notebook `resonantie.nb` *gebruiken. Hoe groot zijn, voor voldoende grote waarden van t, ongeveer de amplitudes ρ_1 resp. ρ_2 en de faseverschillen ϵ_1 resp. ϵ_2 met V_0 van V_1 resp. $V_2(t)$?*

Opdracht 3 *Kies nu voor ω een aantal (minstens 6, licht je keuze toe) waarden in het interval $[0, 10]$. Gebruik weer Mathematica om in één figuur de grafieken van de oplossing $V_1(t), V_2(t)$ en de grafiek van $V_0(t)$ als functie van t te genereren. Wat valt je per geval op m.b.t. de amplitude ρ_2 en het faseverschil ϵ_2 (met V_0) van V_2, na uitdemping van de eigentrillingen? Geef in je verslag 2 plaatjes die verschillend gedrag demonstreren.*

Opdracht 4 *Kies nu $\omega = 1$ weer vast. Wat is de invloed van de keuze van γ_1 en γ_2 op de (uiteindelijke) oplossing?*

In het vervolg van de opgave bekijken we het gedrag van de functie $V_2(t)$, waarbij we $V_1(t)$ verder buiten beschouwing laten.

Opdracht 5 *Leid uit het beginvoorwaardenprobleem voor de elektronische schakeling één tweede-orde differentiaalvergelijking af voor V_2. Wat zijn de beginvoorwaarden ($V_2(0) = \ldots$; $\dot{V}_2(0) = \ldots$) ?*

Opdracht 6 *Beantwoord opdracht 2 t/m 4 voor de oplossing V_2 van de tweede-orde vergelijking, om na te gaan of er verschillen zijn met de eerdere resultaten. Als dit het geval is, neem dan de relevante figuren op in je verslag. Voeg de gebruikte Mathematica code toe aan je verslag.*

Opdracht 7 *Kies $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Wat is de invloed van de keuze van R, L en C op de (uiteindelijke) oplossing $V_2(t)$? Bekijk de oplossing voor tenminste 6 verschillende waarden van de parameters. Voeg twee figuren toe aan je verslag en geef een kwalitatieve beschrijving van de overige resultaten.*

In sectie 4.3 staat beschreven dat de algemene oplossing van de vergelijking

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f\sin(\nu t)$$

gegeven wordt door

$$x(t) = x_{\text{hom}}(t) + \rho\sin(\nu t - \delta), \tag{41}$$

waarbij $x_{\text{hom}}(t)$ de oplossing is van het homogeen gemaakte probleem.

Opdracht 8 *We passen de theorie voor de aangedreven gedempte harmonische oscillator toe op de vergelijking voor $V_2(t)$. De oplossing is van de vorm* (41).

(a) Ga na hoe ρ en δ worden bepaald door de gegeven parameters R, L, C en ω, en geef de algemene oplossing $V_2(t)$.
Voorstel voor het vervolg: vervang ρ door $-\rho$ en δ door $\delta - \pi$ (waarom?).

(b) Wat zijn de minimale en maximale waarde van ρ als functie van ω en wanneer worden deze aangenomen? (Het is handig om ρ^2 te zien als functie van $\frac{1}{\omega^2}$.)

(c) Wat kun je (kwalitatief) zeggen over ρ en δ als functie van ω in elk van de volgende gevallen?

- $\frac{1}{\omega^2} \ll LC - \frac{1}{2}(RC)^2$
- $\frac{1}{\omega^2} \approx LC - \frac{1}{2}(RC)^2 = LC(1 - \frac{1}{2}\frac{R^2C}{L})$ *(Neem aan dat $\frac{R^2C}{L}$ klein is.)*
- $\frac{1}{\omega^2} \gg LC - \frac{1}{2}(RC)^2$.

Vergelijk met je experimentele uitkomsten.

(d) Plot ook een grafiek van ρ en δ als functie van ω, bij vaste $R = 0.2$ en $L = C = 1$.

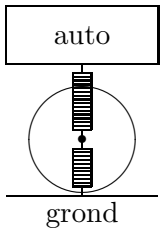
Beschouw tenslotte het originele niet-autonome stelsel (39–40) van twee eerste-orde differentiaalvergelijkingen.

Opdracht 9 *In opdracht 8 heb je de algemene oplossing voor $V_2(t)$ gegeven. Gebruik deze oplossing om de algemene oplossing van de vergelijking voor V_1 te vinden. Laat $R = 0.2$; $L = C = 1$; $V_0(t) = \sin(\omega t)$ waarin $w = 1$. Kies zelf beginwaarden γ_1, $\gamma_2 = 0$, en plot in één plaatje de grafieken van V_0, V_1 en V_2 als functie van t. Laat t lopen over 5 perioden van het ingangssignaal.*

19. **Het veersysteem van de Volvo MI503.** Deze oefening sluit aan bij het veersysteem dat besproken is in §4.3 en de oefeningen 4.4.15, 4.4.16 en 4.4.17. De theorie in §5.2 (volgend hoofdstuk) kan nuttig zijn.

De firma Volvo is bezig met het ontwerpen van een nieuwe auto, de MI503. Een van de problemen waar ze mee zitten is het ontwerp van het veersysteem van de auto. Aan zo'n veersysteem worden twee eisen gesteld: veiligheid en comfort. Voor de veiligheid is het vooral van belang dat de wielen onder alle praktische omstandigheden contact blijven houden met de grond. Als ze dit contact verliezen wordt de auto namelijk onbestuurbaar. Voor het comfort is de versnelling van de cabine relevant. Hierbij is het van belang dat de oneffenheden van het wegdek zo min mogelijk doorgegeven worden aan de auto. De opdracht is het ontwerpen van een veersysteem voor de MI503 dat in ieder geval veilig is en dat verder zo comfortabel mogelijk is.

Aangezien de auto onafhankelijke wielophanging heeft, kunnen we in goede benadering de wielen afzonderlijk bekijken, waarbij elk wiel een kwart van het gewicht van de auto draagt. Het veersysteem ziet er nu als volgt uit:



Het is dus een gekoppeld systeem met twee (gedempte) veren: de band en de wielophanging. Het gewicht van het wiel is ongeveer 10 kg en het gewicht van de auto (d.w.z. het gedeelte daarvan dat gedragen wordt door het wiel) varieert van 250 to 400 kg, afhankelijk van het aantal personen in de auto.

De oneffenheden van het wegdek kunnen uiteraard allerlei vormen hebben, maar een goed idee hoe de auto zich zal gedragen op een willekeurig wegdek wordt verkregen door te kijken hoe hij zich gedraagt op een sinusvormig testwegdek. Bekijk (minimaal) de volgende drie testwegdekken met verschillende amplitude en periode, namelijk:

- amplitude 5 cm en periode 20 m;
- amplitude 2.5 cm en periode 2 m;
- amplitude 1 cm en periode 20 cm.

De auto moet zich voor alle snelheden tot 200 km/uur veilig gedragen op deze testwegdekken (d.w.z. de wielen moeten contact houden met de grond) en moet verder voor deze snelheden ook zo comfortabel mogelijk zijn. Geef in je verslag aan waarom het gedrag op deze drie testwegdekken een goede indruk geeft van het gedrag op een willekeurig wegdek.

De differentiaalvergelijkingen die de reactie van dit systeem op het wegdek geven, kunnen we vinden door te kijken naar de krachten die er werken. We beperken ons hierbij tot de verticale krachten. De invloed van de horizontale krachten en van de rotatie van het wiel is verwaarloosbaar op de verticale beweging. Op de naaf van het wiel werken de volgende krachten:

- de veerkracht van de band;
- de demping van de band;
- de veerkracht van de wielophanging;
- de demping van de wielophanging;
- de zwaartekracht.

Op de auto werken de volgende krachten:

- de veerkracht van de wielophanging;
- de demping van de wielophanging;
- de zwaartekracht.

We nemen aan dat de dempingskrachten van elk van de twee veren evenredig en tegengesteld zijn aan de snelheid waarmee de lengte van die veer verandert (evenredigheidsconstantes d_{band} en $d_{\text{ophanging}}$). Ook nemen we aan dat de veerkrachten van elk van de twee veren evenredig en tegengesteld zijn aan de uitwijking van die veer (evenredigheidsconstantes k_{band} en $k_{\text{ophanging}}$). Voor de zwaartekrachtsconstante nemen we 10 N/kg. De opdracht is dus het vinden van zo goed mogelijke waardes voor d_{band}, $d_{\text{ophanging}}$, k_{band} en $k_{\text{ophanging}}$. Houdt hierbij rekening met de fysische mogelijkheden; een band die onder het gewicht van de wagen 1 meter ingedrukt wordt is niet erg realistisch!

Opmerking. Op het moment dat de band het contact met het wegdek verliest (wanneer de totale kracht die de band uitoefent naar binnen gericht is), worden de krachten die (het veersysteem van) de band uitoefent natuurlijk 0. Aangezien we alleen geïnteresseerd zijn in veersystemen waarbij de band het contact met het wegdek behoudt, kunnen we dit verschijnsel negeren. Dit vereenvoudigt de vergelijkingen aanzienlijk. Controleer echter wel steeds bij elke oplossing of de band het contact met het wegdek behoudt!

Het veersysteem waarmee de voorlopige testauto rijdt heeft de volgende parameters: $d_{band} = 2000$ Ns/m, $d_{ophanging} = 400$ Ns/m, $k_{band} = 100000$ N/m en $k_{ophanging} = 40000$ N/m. Dit veersysteem blijkt in de praktijk niet goed te voldoen. Toon dit aan m.b.v. het wiskundige model en geef betere waardes voor de parameters.

Schrijf een verslag aan de firma Volvo. In dat verslag moeten minstens de volgende dingen ter sprake komen:

- Het wiskundige model met de aannames (i.h.b. een verklaring voor het feit dat het voldoende is drie testwegdekken te bekijken).
- De resultaten van het wiskundige model voor de parameters van de testauto.
- Eén of meerdere suggesties voor betere waardes van de parameters.

Extra. Het is ook interessant om te kijken wat er verandert als we voor de veerkracht F als functie van de uitwijking u niet nemen $F = d * u$, maar $F = d * f(u/u_{\max})$ met $f(x) = x/(1 - x^2)$. Dit is een veel realistischer model. (Waarom?) De maximale uitwijking van de band van de MI503 is 7.5 cm en van de wielophanging 25 cm.

5 Stelsels differentiaalvergelijkingen

5.1 Algemeen

De meest algemene gedaante van een stelsel eerste orde d.v.'s is als volgt. Zij $f_1, f_2, \ldots, f_m$ een m-tal functies van $m+1$ variabelen $t, x_1, x_2, \ldots, x_m$. We nemen aan dat het domein D van de f_i van de vorm $\{(t, x_1, \ldots, x_m) \mid t_1 < t < t_2, (x_1, \ldots, x_m) \in U\}$ is, waarin U een open deelverzameling in $\mathbb{R}^m$ is. Verder nemen we aan dat de f_i continue partiële afgeleiden hebben in D. Beschouw het stelsel d.v.'s,

$$\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & f_1(t, x_1(t), \ldots, x_m(t)) \\ x_2'(t) & = & f_2(t, x_1(t), \ldots, x_m(t)) \\ & & \cdots \\ x_m'(t) & = & f_m(t, x_1(t), \ldots, x_m(t)). \end{array} \tag{42}$$

De accenten stellen differentiatie naar t voor. Noteren we $\mathbf{x}(t) := (x_1(t), \ldots, x_m(t))^T$ en $\mathbf{f} := (f_1, \ldots, f_m)$, dan kunnen we het stelsel (42) verkort schrijven als

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)). \tag{43}$$

Het belang van deze stelsels blijkt onder andere uit de volgende opmerking. Beschouw een m-de orde d.v.

$$y^{(m)} = F(t, y, y', \ldots, y^{(m-1)})$$

waarin de accenten differentiatie naar t voorstellen. Schrijf nu $x_1(t) = y(t)$, $x_2(t) = y'(t), \ldots, x_m(t) = y^{(m-1)}(t)$. Dan geldt

$$\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & x_2(t) \\ x_2'(t) & = & x_3(t) \\ \cdots & & \cdots \\ x_{m-1}'(t) & = & x_m(t) \\ x_m'(t) & = & F(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)) \end{array}$$

met andere woorden, een m-de orde d.v. kan overgevoerd worden in een stelsel van m eerste orde d.v's. We willen niet te lang stil blijven staan bij deze algemene systemen, maar vermelden wel de volgende *existentie- en uniciteitsstelling* voor de oplossingen.

Stelling 5.1.1 *Beschouw het stelsel* (42) *en kies een punt* $(t_0, \xi_1, \ldots, \xi_m)$ *in het domein van de* f_i. *Dan zijn er* m *functies* $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ *in een omgeving* I *van* t_0 *zó dat* $x_i(t_0) = \xi_i$ *voor* $i = 1, \ldots, m$ *en die voldoen aan het stelsel* (42). *Bovendien is deze oplossing uniek op het interval* I.

Een bijzonder, maar zeer veel voorkomend, geval is wanneer de functies f_i niet expliciet van t afhangen. Ons stelsel ziet er dan uit als

$$\begin{array}{rcl} x_1'(t) & = & f_1(x_1(t), \ldots, x_m(t)) \\ x_2'(t) & = & f_2(x_1(t), \ldots, x_m(t)) \\ & & \cdots \\ x_m'(t) & = & f_m(x_1(t), \ldots, x_m(t)) \end{array} \tag{44}$$

of afgekort, $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$. Een stelsel van de vorm (44) noemen we een *autonoom stelsel*. Dergelijke stelsels hebben een mooie meetkundige interpretatie. De vector, of beter vectorwaardige functie, $\mathbf{x}(t)$ kunnen we interpreteren als een punt in $\mathbb{R}^m$ dat met de tijd beweegt. Het beeld van deze functie is dan niets anders dan de baan van dit punt. De afgeleide van $\mathbf{x}(t)$ naar t kan gezien worden als de *snelheid* van deze beweging. De functie $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ kan geïnterpreteerd worden als een *vectorveld*. In ieder punt $\mathbf{x}$ van het domein van $\mathbf{f}$ is de vector $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ gegeven. Een bekend en zeer aanschouwelijk voorbeeld van een vectorveld is een stationaire (=onafhankelijk van de tijd) vloeistofstroming. In elk punt waar zich vloeistof bevindt is een snelheidsvector van de stroming gegeven. Het stelsel d.v.'s (44) kan nu geïnterpreteerd worden als de eis dat in ieder punt van de baan $\mathbf{x}(t)$ de snelheid van het punt overeenstemt met de vector uit het vectorveld ter plekke. In het voorbeeld van de vloeistofstroming betekent dit dat de oplossingen van het stelsel precies de beweging beschrijven van bijvoorbeeld een zeer licht deeltje dat met de vloeistofstroom meebeweegt. Zeer toepasselijk noemen we de baan die door een oplossing $\mathbf{x}(t)$ beschreven wordt een *stroomlijn* van het vectorveld $\mathbf{f}$. Als we de nadruk meer op het stelsel d.v.'s willen leggen spreken we ook van *integraalkromme*. Voordat we overgaan naar concrete gevallen vermelden we een gevolg van de uniciteitsstelling voor oplossingen.

Gevolg uniciteit oplossingen (het autonome geval). *Door elk punt $\mathbf{x}_0$ in het domein van $\mathbf{f}$, met $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$, gaat precies één stroomlijn.*

5.2 Autonome stelsels in $\mathbb{R}^2$, het lineaire geval

In deze paragraaf bestuderen we het stelsel

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t)) \\ x_2'(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t)) \end{aligned} \tag{45}$$

d.w.z. autonome stelsels in $\mathbb{R}^2$. We nemen aan dat het domein G van de functies f_1, f_2 een open gebied is en dat ze continue partiële afgeleiden hebben in G. Om te beginnen merken we op dat iedere eerste orde d.v. $y' = F(t, y)$ door een kunstgreep in een dergelijk stelsel kan worden omgevormd. Stel namelijk $x_1 = t$ en $x_2 = y$. Dan geldt trivialerwijs dat $x_1' = 1$ en dus,

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 1 \\ x_2'(t) &= F(x_1(t), x_2(t)) \end{aligned} \tag{46}$$

Verder kunnen we tweede orde homogene lineaire d.v.'s $y'' + py' + qy = 0$ met constante coëfficiënten omvormen door $x_1(t) = y(t),\ x_2(t) = y'(t)$ te stellen. We vinden,

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= -px_2(t) - qx_1(t) \end{aligned} \tag{47}$$

We beginnen met het eenvoudigste geval, dat van een *lineair vectorveld*,

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= ax_1(t) + bx_2(t) \\ x_2'(t) &= cx_1(t) + dx_2(t) \end{aligned} \tag{48}$$

of korter, $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, waarin $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ een matrix is met constante coëfficiënten. De gedaante van het vectorveld $A\mathbf{x}$, en dus van de bijbehorende stroomlijnen, hangt sterk af van de eigenwaarden van A. Neem als eerste voorbeelden van vectorvelden, met x, y als afkortingen voor x_1 resp. x_2,

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{b) } \begin{pmatrix} -2x \\ -y \end{pmatrix} \qquad \text{c) } \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

De oplossingen van de bijbehorende stelsels (48) zijn,

$$\text{a) } \begin{pmatrix} C_1 e^{2t} \\ C_2 e^{t} \end{pmatrix} \qquad \text{b) } \begin{pmatrix} C_1 e^{-2t} \\ C_2 e^{-t} \end{pmatrix} \qquad \text{c) } \begin{pmatrix} C_1 e^{t} \\ C_2 e^{-t} \end{pmatrix}$$

waarin C_1, C_2 willekeurige integratieconstanten zijn. Controleer dit en maak zelf een schets van deze stelsels krommen. Een ander drietal voorbeelden is,

$$\text{d) } \begin{pmatrix} x - y \\ y + x \end{pmatrix} \qquad \text{e) } \begin{pmatrix} -x - y \\ -y + x \end{pmatrix} \qquad \text{f) } \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

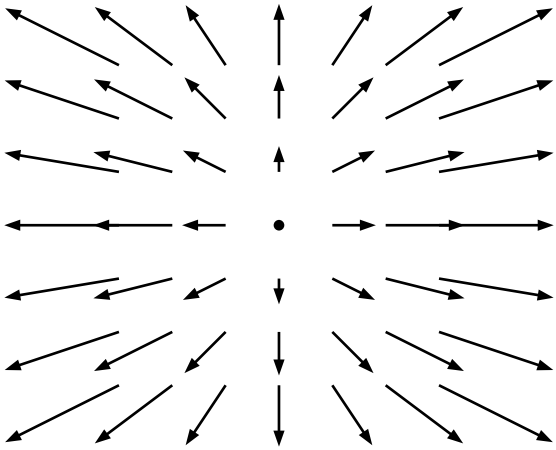
De oplossingen van de bijbehorende stelsels (48) zijn,

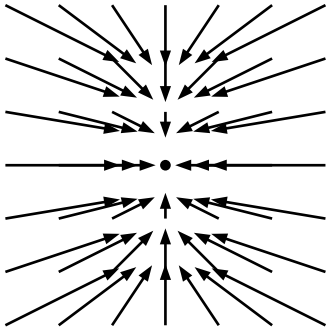
$$\text{d) } e^{t}\mathbf{f}(t) \qquad \text{e) } e^{-t}\mathbf{f}(t) \qquad \text{f) } \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ C_1 \sin t - C_2 \cos t \end{pmatrix}$$

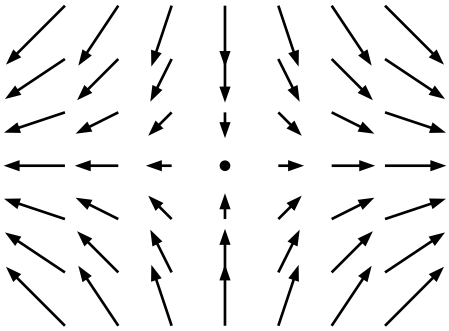
waarin C_1, C_2 willekeurige integratieconstanten zijn. Op de volgende twee bladzijden geven we een schets van deze zes vectorvelden en van de bijbehorende integraalkrommen. Bij de schetsen van de vectorvelden hebben we de lengte van de vectoren voor de overzichtelijkheid een factor drie kleiner getekend hebben dan ze in werkelijkheid zijn.
Bovenstaande situaties zijn typerend voor de oplossingen die we voor een willekeurig stelsel (48) kunnen hebben. Zij $\lambda_{1,2}$ het tweetal eigenwaarden van A en stel dat ze reëel en verschillend zijn. Dan is er een basis van eigenvectoren en A is diagonaliseerbaar, d.w.z. er is een matrix S zó dat $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Voer de nieuwe variabelen u, v in d.m.v. $(u, v)^T = S(x, y)^T$. Uit (48) volgt nu

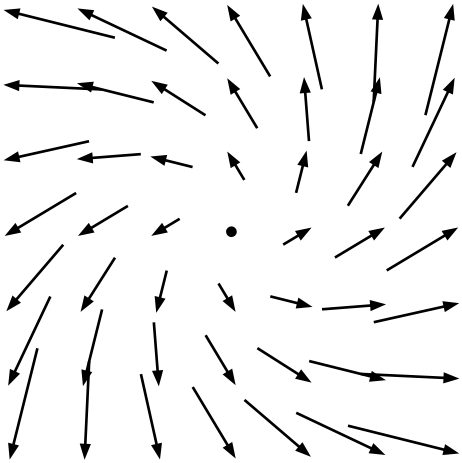
$$\begin{aligned} u'(t) &= \lambda_1 u(t) \\ v'(t) &= \lambda_2 v(t) \end{aligned}$$

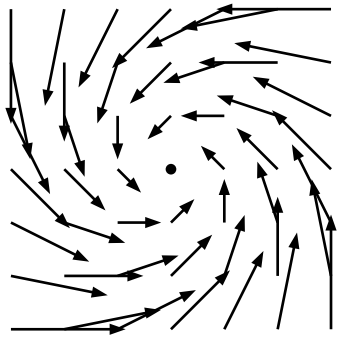
welke eenvoudig kunnen worden opgelost, zie voorbeelden a), b) en c).

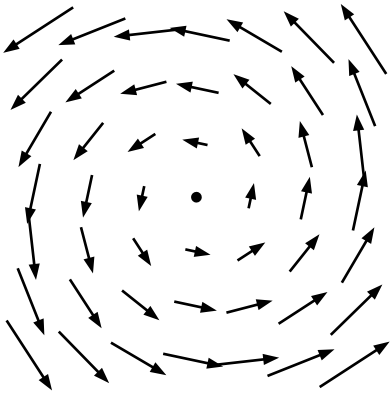


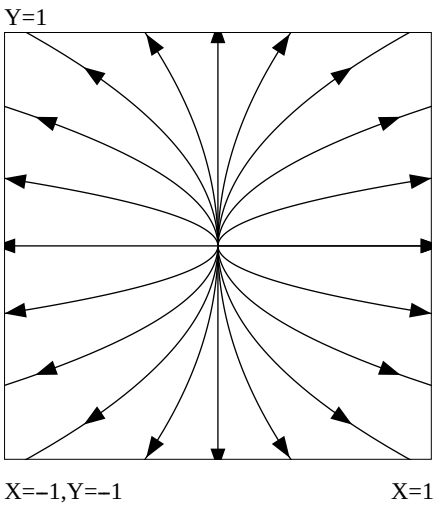


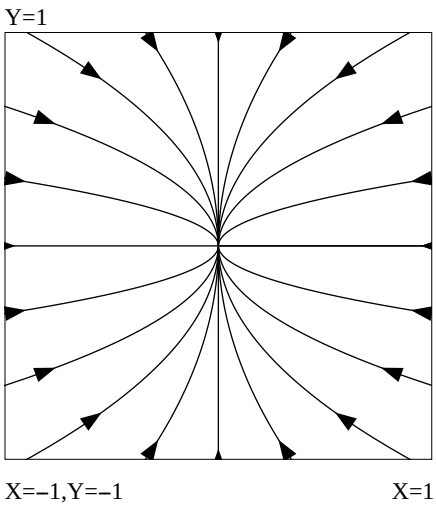


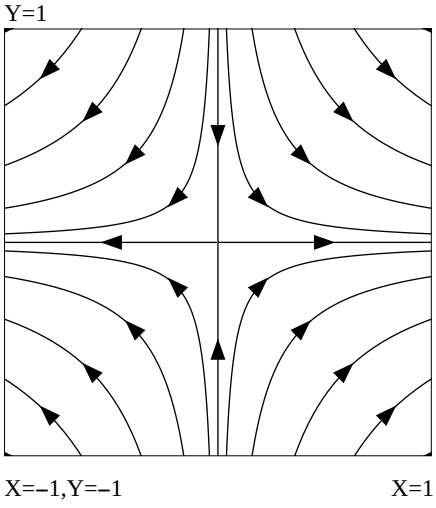


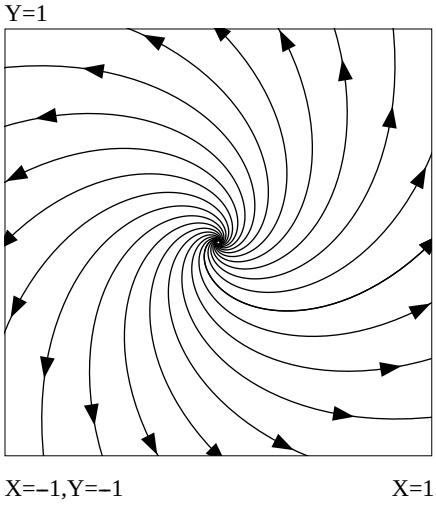


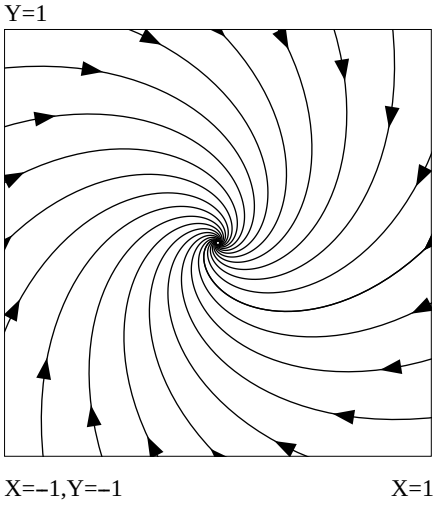


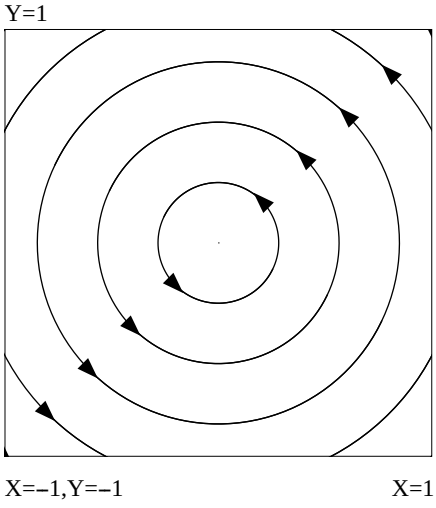

Y=1
X=−1,Y=−1
X=1


Y=1
X=−1,Y=−1
X=1


Y=1
X=−1,Y=−1
X=1


Y=1
X=−1,Y=−1
X=1


Y=1
X=−1,Y=−1
X=1


Y=1
X=−1,Y=−1
X=1

Het is duidelijk dat het teken van de λ_i belangrijk is. Als A complexe eigenwaarden heeft dan is er een S zó dat SAS^{-1} van de vorm

$$R\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix}$$

is, waarin $R=|\lambda_1|,\ \phi=\arg(\lambda_1)$. Uit de voorbeelden blijkt dat nu het teken van $\cos\phi$ belangrijk is. Globaal gezien hebben we de volgende situaties,

a) $\lambda_1>\lambda_2>0$, het *instabiele knooppunt*.

b) $\lambda_1<\lambda_2<0$, het *stabiele knooppunt*.

c) $\lambda_1>0>\lambda_2$, het *zadelpunt*.

d) $\lambda_{1,2}$ complex en $\mathrm{Re}\lambda_1>0$, het *instabiele spiraalpunt*.

e) $\lambda_{1,2}$ complex en $\mathrm{Re}\lambda_1<0$, het *stabiele spiraalpunt*.

f) $\lambda_{1,2}$ complex en $\mathrm{Re}\lambda_1=0$, het *centrumpunt*.

Als voorbeeld kunnen we het stelsel (47) nemen, dat van de vergelijking $y''+py'+qy=0$ afkomt. De eigenwaardevergelijking luidt $\lambda^2+p\lambda+q=0$ en dit is precies de karakteristieke vergelijking van onze tweede orde d.v. We hebben reeds eerder gezien hoe het karakter van de λ_i bepalend is voor het gedrag van de oplossingen van de d.v.

5.3 Autonome stelsels in $\mathbb{R}^2$, het algemene geval

We bekijken nu algemene autonome stelsels (45) in $\mathbb{R}^2$. Bij iteraties zochten we naar evenwichtspunten, hier zoeken we het analogon daarvan, de zogenaamde *stationaire oplossingen* of *evenwichtsoplossingen*. Dit zijn oplossingen (ξ_1,ξ_2), die constant zijn in de tijd, hetgeen uitsluitend mogelijk is als $f_1(\xi_1,\xi_2)=f_2(\xi_1,\xi_2)=0$. Stel dat (ξ_1,ξ_2) een stationaire oplossing is. We lineariseren ons stelsel rond het punt (ξ_1,ξ_2). Voer daartoe de nieuwe variabelen $u_i=x_i-\xi_i$ in. Ons stelsel gaat over in

$$\begin{aligned}u_1' &= f_1(u_1+\xi_1,u_2+\xi_2)\\ u_2' &= f_2(u_1+\xi_1,u_2+\xi_2)\end{aligned}\tag{49}$$

Stel dat $D(\mathbf{f})(\boldsymbol{\xi})$ de Jacobi-matrix van $\mathbf{f}=(f_1,f_2)^T$ in het punt $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2)^T$ is. Ons stelsel kan herschreven worden in de vorm

$$\begin{pmatrix}u_1'\\ u_2'\end{pmatrix}=D(\mathbf{f})(\boldsymbol{\xi})\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}+\text{hogere orde termen in } u_1,u_2.$$

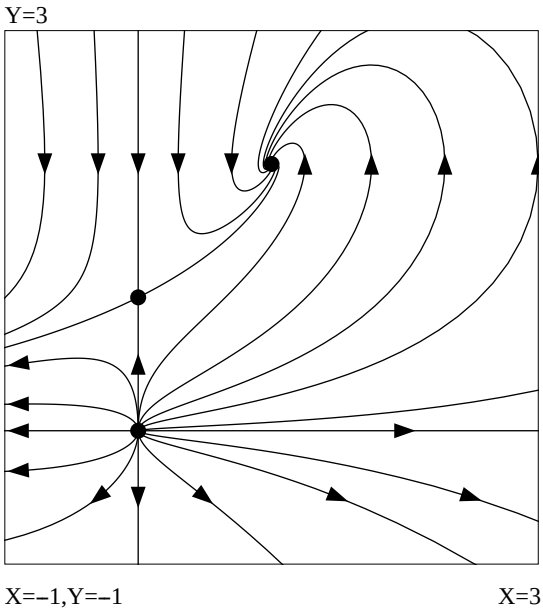
en de gelineariseerde vorm krijg je door de hogere orde termen weg te gooien. De constante term in de ontwikkeling van $\mathbf{f}$ vervalt omdat $\mathbf{f}(\xi_1,\xi_2)=(0,0)$. Het idee is, dat als we in de buurt van de stationaire oplossing blijven, d.w.z. u_1,u_2 klein, de hogere orde termen nauwelijks van invloed zijn en we, lokaal gezien, te maken hebben met een lineair autonoom stelsel van het type dat we hierboven bestudeerd hebben. Het blijkt

dat de kwalitatieve vorm van de oplossingen rond een stationaire oplossing tot één van de boven genoemde gevallen a) tot en met f) behoort. Voor de matrix A moeten we nu de matrix $D(\mathbf{f})(\boldsymbol{\xi})$ nemen. Voorzichtigheid is geboden in het geval f). In het lineaire geval zien we gesloten banen rond het punt $(0,0)$, maar in het niet-lineaire geval is de geslotenheid van deze banen meestal verstoord.

Voorbeeld. Beschouw het stelsel

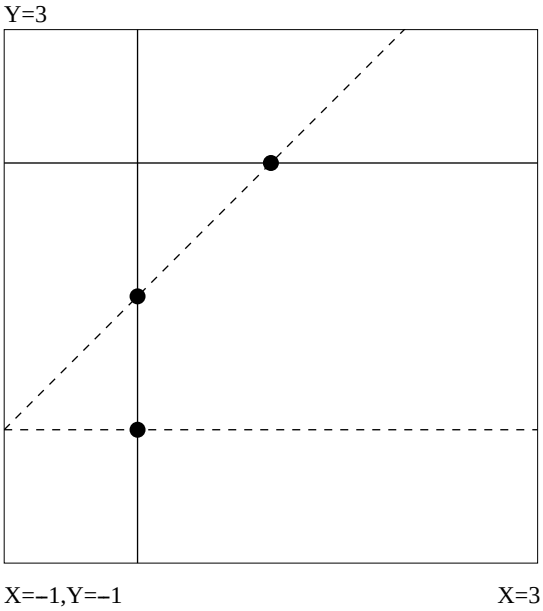
$$\begin{aligned} x' &= 2x - xy \\ y' &= y + xy - y^2 \end{aligned}$$

Evenwichtsoplossingen volgen uit de vergelijkingen $2x - xy = y + xy - y^2 = 0$ en dus $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$. Rond het punt $(0,0)$ staat onze vergelijking reeds in de voor lineariseren geschikte gedaante. We lezen direct de Jacobi-matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ af en we hebben te maken met een instabiele knoop. In het punt $(0,1)$ luidt de Jacobi-matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. De eigenwaarden zijn ± 1 en we hebben een zadelpunt. In $(1,2)$ is de Jacobi-matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ met eigenwaarden $-1 \pm i$, we hebben een stabiel spiraalpunt. Controleer deze berekeningen! Het plaatje met de banen van de oplossingen ziet er als volgt uit,

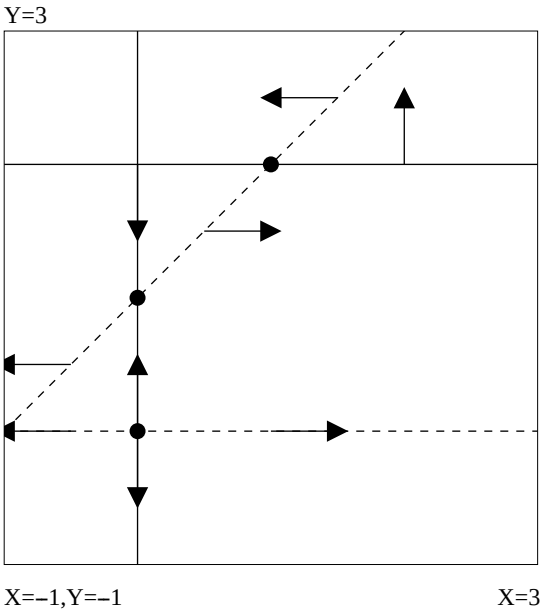


Toegegeven, bovenstaand plaatje is met de computer gegenereerd en uit de ligging van de evenwichtspunten en hun aard is het niet meteen duidelijk dat de banen er als boven uit zullen zien. Het is echter mogelijk om met behulp van wat schetsen een inzicht te krijgen in het verloop van de banen zonder daarbij de computer te gebruiken. We geven in het vierkant $-1 \leq x, y \leq 3$ de punten waarvoor geldt dat $x' = 0$ aan met een gesloten lijn, de punten waarvoor $y' = 0$ met een onderbroken lijn. De verzameling punten met

$x' = 0$ bestaat uit de rechten $x = 0$ en $y = 2$. De verzameling punten met $y' = 0$ bestaat uit de rechten $y = 0$ en $y = x + 1$. De evenwichtspunten zijn natuurlijk precies de snijpunten van deze twee verzamelingen.



Op de stukken van de doorlopende lijnen zijn de vectoren van het vectorveld verticaal, x' is daar immers 0. We moeten alleen nagaan of de richting naar boven of naar beneden is. Op de gearceerde verzameling zijn de vectoren horizontaal want daar is $y' = 0$. We moeten alleen nog nagaan of de richting links of rechts is. We vinden het volgende plaatje (ga na!),



Tenslotte merken we op dat de verzamelingen $x' = 0$ en $y' = 0$ het platte vlak in een

aantal gebieden opdelen. In elk van deze gebieden geldt dat de vectoren uit het vectorveld allemaal in hetzelfde kwadrant wijzen. Men zou dat ook nog kunnen aangeven door bijvoorbeeld in het rechts-midden gebied een noordoost pijl te tekenen. Je moet dat dan wel losser interpreteren: Terwijl de getekende horizontale en verticale pijlen aangeven dat het vectorveld precies horizontaal/verticaal loopt, symboliseert de noordoost pijl slechts een kwadrant. Zo krijgen we dus ook voor deze gebieden een beeld hoe het vectorveld verloopt.
Hopelijk wordt het nu wat duidelijker waarom de integraalkrommen lopen zoals we aan het begin getoond hebben. De aard van de punten $(0,0)$ en $(0,1)$ is reeds duidelijk te zien. Ook zien we dat $(1,2)$ een spiraalpunt gaat worden, maar het is de vraag of deze afstotend of aantrekkend is. Dit moeten we beslissen met behulp van de eigenwaarden van de lokale Jacobi-matrix van het vectorveld.

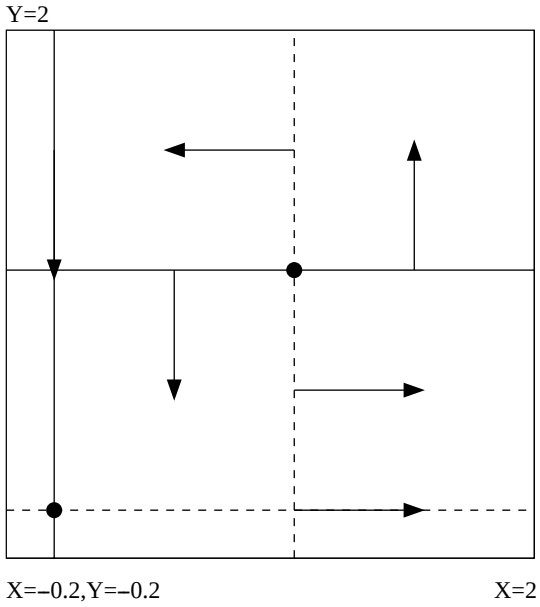
Volterra-vergelijking. In de 20er jaren ontdekte de Italiaanse bioloog Umberto d'Ancona dat gedurende de eerste wereldoorlog het percentage roofvissen (haaien en roggen) in de Middellandse zee sterk toenam. Hier volgt een tabel van het percentage roofvissen in de totale visvangst rond de haven van Fiume.

1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923
11.9%	21.4%	22.1%	21.2%	36.4%	27.3%	16.0%	15.9%	14.8%	10.7%

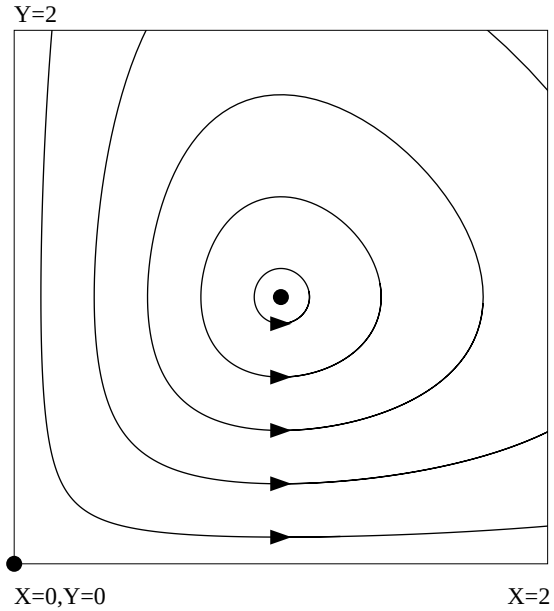
De reden voor deze procentuele toename moet gezocht worden in het feit dat er gedurende de oorlog minder gevist werd. Het mechanisme waarmee dit gebeurde was echter een volkomen raadsel voor d'Ancona. Een verklaring werd tenslotte ontdekt door de bekende Italiaanse wiskundige Vito Volterra (1860-1940). Het model is een voorbeeld van een continue beschrijving van populatiedynamica. Stel dat de populatie prooivissen gegeven wordt door $x(t)$ en de populatie roofvissen door $y(t)$. In principe ondergaan de prooivissen een exponentiële groei gegeven door $x' = ax$ voor zekere $a > 0$, maar door de aanwezigheid van roofvissen wordt deze groei geremd en we kiezen $x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t)$ voor zekere $b > 0$. Voor de roofvissen geldt dat $y'(t)$ bestaat uit een bijdrage $-cy(t)$, met $c > 0$, door sterfte en een bijdrage $dx(t)y(t)$, met $d > 0$, door geboorte, die natuurlijk sterk afhangt van de hoeveelheid aanwezige prooivissen. We vinden het stelsel

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) - bx(t)y(t) \\ y'(t) &= -cy(t) + dx(t)y(t) \end{aligned}$$

Merk op, dat $(e^{at}, 0)$ en $(0, e^{-ct})$ oplossingen zijn, d.w.z. de positieve X en Y-as zijn integraalkrommen. In het bijzonder betekent dit dat een integraalkromme die in het eerste kwadrant van $\mathbb{R}^2$ start, dit kwadrant niet verlaat. Banen van oplossingen snijden elkaar immers niet. De evenwichtspunten blijken $(0,0)$ en $(c/d, a/b)$ te zijn. We zien direct dat $(0,0)$ een zadelpunt is. De eigenwaarden van de gelineariseerde d.v. bij $(c/d, a/b)$ zijn $\pm i\sqrt{ac}$. Dit wijst op een centrumpunt. Evenals in het vorige voorbeeld kunnen we hier ook de verzameling punten aangeven waar $x' = 0$ (gesloten lijn) en $y' = 0$ (onderbroken lijn) samen met enkele vectoren uit het vectorveld,



Een schets van de banen van de oplossingen bij $a = b = c = d = 1$,



Merk op dat de banen gesloten zijn. Dit is een zeer bijzondere situatie en een gevolg van het feit dat het systeem *integreerbaar* is. Er bestaat namelijk een functie $F(x, y)$ zó dat voor elke oplossing $x(t), y(t)$ geldt $F(x(t), y(t)) =$ constant. Uit het stelsel d.v.'s volgt namelijk dat voor elke oplossing geldt,

$$x'(\frac{c}{x} - d) + y'(\frac{a}{y} - b) = 0.$$

Primitiveren aan beide zijden levert

$$c\log x(t) - dx(t) + a\log y(t) - by(t) = \text{constant}.$$

De functie $F(x,y) := c\log x - dx + a\log y - by$ heeft in het eerste kwadrant een maximum in $(c/d, a/b)$. Verder gaat $F(x,y)$ naar $-\infty$ als x of y naar 0 of ∞ gaan. De integraalkrommen zijn nu gewoon de niveaulijnen (hoogtelijnen) van F en ze zijn gesloten omdat de grafiek van F in het eerste kwadrant een 'berg' met een enkele top is.
Volterra nam aan dat de *gemiddelde* verhouding van de populaties over een jaar, welke we uiteindelijk meten, door de getallen $c/d : a/b$ (prooivissen : roofvissen) wordt weergegeven. Introduceer nu een vangstterm in de vergelijkingen door aan $x'(t)$ en $y'(t)$ de term $-\epsilon x(t)$ respectievelijk $-\epsilon y(t)$ toe te voegen. We vinden het nieuwe stelsel

$$\begin{aligned} x'(t) &= (a-\epsilon)x(t) - bx(t)y(t) \\ y'(t) &= -(c+\epsilon)y(t) + dx(t)y(t) \end{aligned}$$

Het nieuwe centrumpunt is

$$\left(\frac{c+\epsilon}{d}, \frac{a-\epsilon}{b}\right).$$

We zien nu wat er gebeurt als we de visvangst-coëfficiënt ϵ laten toenemen. De populatie prooivissen neemt toe (!) in verhouding tot de populatie roofvissen. Dit staat bekend als het *Volterra effect* in de populatiedynamica. Omgekeerd, als de visvangst afneemt, zal het percentage roofvissen toenemen. Dit is een mogelijke verklaring voor de waargenomen toename in de eerste wereldoorlog.
Het zal duidelijk zijn dat er veel kritiek kan worden uitgeoefend op het Volterra model, dat tegenwoordig niet meer als erg realistisch beschouwd wordt. Historisch is het echter een belangrijk model. Het was één van de eersten in zijn soort en de mogelijkheid tot verklaring van oscillaties binnen populatie-aantallen kwam erdoor ook binnen bereik. Later zijn er vele varianten en verbeteringen voorgesteld, waarvan we er één tijdens het practicum zullen bestuderen. Vaak voegt men ook de naam Lotka toe aan het Volterra-model. Alfred James Lotka (1880-1949) was een Amerikaan die de wiskundige aspecten van de populatiedynamica uitgebreid bestudeerde.
Een systeem van de vorm

$$\begin{aligned} x'(t) &= -h(x,y)\,\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \\ y'(t) &= h(x,y)\,\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \end{aligned}$$

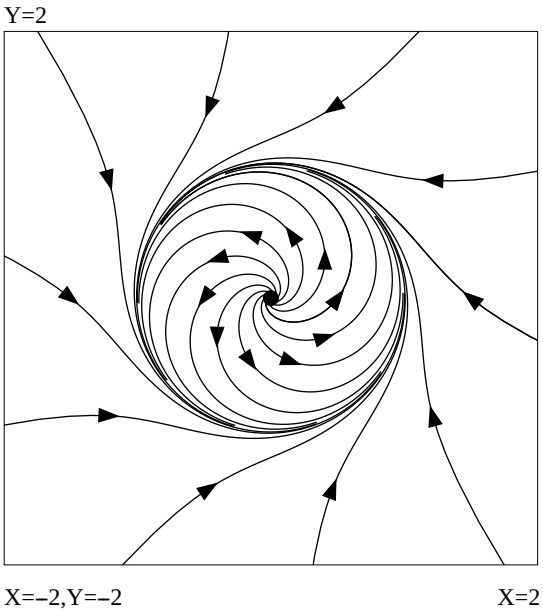
is integreerbaar: de integraalkrommen zijn niveaulijnen van F. Als $h = 1$ dan spreekt men ook wel over een *Hamilton* systeem en F is de *Hamiltonian*. Merk op dat de gradiënt van F in (x,y) loodrecht staat op de niveaulijn van F door dat punt. Dus raakt de vector $(-\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial F(x,y)}{\partial x})$ aan de niveaulijn van F door (x,y).

Bij niet-lineaire autonome stelsels in $\mathbb{R}^2$ kan het gebeuren dat er een geïsoleerde periodieke oplossing optreedt. Een dergelijke oplossing herkennen we aan het feit dat de integraalkromme gesloten is.

Limiet cykel. Beschouw het stelsel

$$\begin{aligned} x' &= x - y - x(x^2+y^2) \\ y' &= y + x - y(x^2+y^2) \end{aligned}$$

Zonder al te veel te rekenen kunnen we zien dat hier iets merkwaardigs gebeurt. Allereerst de stationaire punten. Er blijkt er slechts één te zijn, $(0,0)$ en dit is een afstotend spiraalpunt (ga na!). Bekijk nu het vectorveld beperkt tot de cirkel $x^2+y^2=2$. Dit is $(-x-y, x-y)$. Het inwendig product met de normaalvector op de cirkel $x^2+y^2=2$ is $((x,y),(-x-y,x-y)) = -x^2-y^2 = -2$. De hoek tussen de (naar buiten gerichte) normaal en het vectorveld is dus overal groter dan $\pi/2$. De integraalkrommen kunnen dus niet uit de cirkelschijf $x^2+y^2<2$ "ontsnappen". Verder is er ook geen stationaire oplossing waar ze naar toe kunnen convergeren, het enige stationaire punt is immers $(0,0)$ en dat is afstotend. Bovendien mag een integraalkromme zichzelf niet doorsnijden. Door al deze eisen wordt een integraalkromme als het ware gedwongen naar een periodieke oplossing te convergeren. En inderdaad, als we naar het plaatje van de integraalkrommen kijken, zien we



Terzijde merken we op dat in dit voorbeeld de vergelijking zó is gemaakt dat we in poolcoördinaten r en ϕ een eenvoudig stelsel krijgen. Merk namelijk op dat $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$. Differentiatie van beide gelijkheden geeft $x' = r'\cos\phi - r\phi'\sin\phi$ en $y' = r'\sin\phi + r\phi'\cos\phi$. Uit deze vergelijkingen volgt $xx'+yy' = rr'$ en $xy'-yx' = (x^2+y^2)\phi'$. Met behulp van het stelsel d.v.'s substitueren we x' en y' in deze gelijkheden en na overgang op poolcoördinaten vinden we,

$$\begin{aligned} r' &= r(1-r^2) \\ \phi' &= 1 \end{aligned}$$

Merk op, als $r<1$ dan geldt $r'>0$, dus r neemt toe, en als $r>1$ dan geldt $r'<0$, dus r neemt af. Verder is $r=1, \phi = t$ een periodieke oplossing.

Met hetzelfde soort argumenten als in bovenstaand voorbeeld, maar dan wat exacter! kan men de volgende stelling bewijzen,

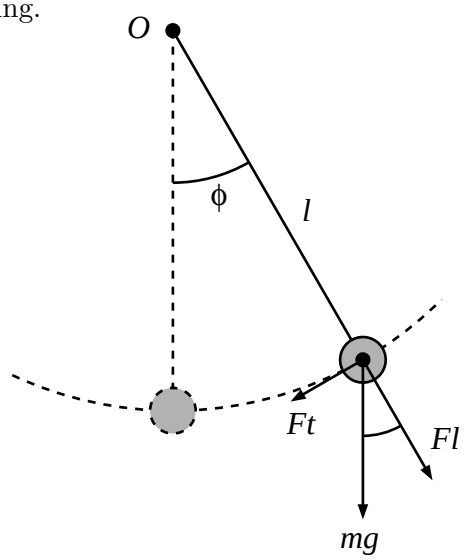
Stelling 5.3.1 (Poincaré–Bendixon) *Stel dat een oplossing* $x_1(t), x_2(t)$ *van* (45) *voor* $t \geq 0$ *beperkt blijft tot een begrensd gebied* G *dat geen stationaire oplossingen bevat. Dan nadert de baan van* $x_1(t), x_2(t)$ *op den duur naar een gesloten kromme, die zelf de baan is van een periodieke oplossing van* (45)

Een ander gebied waaruit autonome systemen in $\mathbb{R}^2$ voortkomen is dat van de klassieke mechanica in één dimensie. Stel dat een massapunt m zich over (een deel van) de X-as beweegt onder invloed van een kracht die alleen van de plaats en eventueel de snelheid van het massapunt afhangt, $F(x(t), x'(t))$. Volgens de tweede wet van Newton geldt $mx''(t) = F(x(t), x'(t))$. Stel $x_1 = x$ en $x_2 = x'$ dan kan de bewegingsvergelijking omgeschreven worden tot het stelsel

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= \frac{1}{m} F(x_1(t), x_2(t)). \end{aligned}$$

De verzameling van mogelijke toestanden (x, x') waarin een massapunt zich kan bevinden noemen we de *faseruimte* van het mechanisch systeem. Dit is meestal het x_1x_2-vlak.

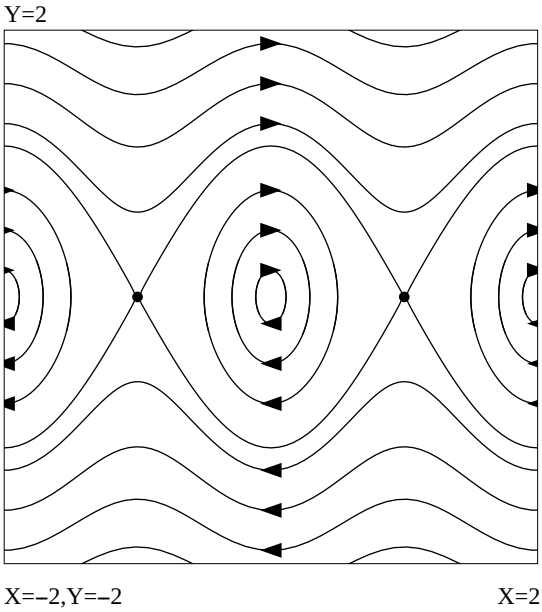
De mathematische slinger. Stel dat de massa m aan een starre gewichtsloze staaf met lengte l is opgehangen aan het punt O. Onder invloed van de zwaartekracht g beschrijft m een slingerbeweging.



De positie van m wordt gegeven door de hoek ϕ. We zullen eerst aannemen dat er geen wrijving is met de lucht of met het ophangpunt. De versnelling van m is gelijk aan $l\phi''$. De kracht die op m werkt is precies de component van de zwaartekracht die loodrecht op de staaf staat, $-mg \sin \phi$. De bewegingsvergelijking wordt $ml\phi'' = -mg \sin \phi$ en dus,

$$l\phi'' + g \sin \phi = 0.$$

Als we weten dat de beweging een kleine uitwijking heeft kunnen we de benadering $\sin\phi \approx \phi$ gebruiken. Dit is een voorbeeld van de boven besproken techniek van lineaire benadering. De gelineariseerde vergelijking wordt $l\phi'' + g\phi = 0$ en dit is precies de vergelijking van de harmonische oscillator met periode $2\pi\sqrt{l/g}$. De slingertijd voor kleine uitwijkingen is dus $2\pi\sqrt{l/g}$. We maken nu een studie van alle bewegingen, dus ook grote uitwijkingen, maar doen dit kwalitatief. D.w.z. het gaat meer om de vorm van de integraalkrommen dan om de precieze vergelijkingen. De posities ϕ van de slinger kunnen worden voorgesteld door de cirkel in het platte vlak met straal l en middelpunt O. Bij iedere positie is het in principe mogelijk de slinger een willekeurige snelheid te geven. Deze kunnen we loodrecht op het platte vlak uitzetten. Doen we dit voor iedere positie dan zien we dat onze faseruimte $\{(\phi, \phi') \mid \phi \in \text{cirkel}, \phi' \in \mathbb{R}\}$ een cilinder is. Deze kunnen we in het platte vlak weergeven door hem langs de lijn $\phi = \pi \equiv -\pi$ open te knippen en uit te vouwen. Overtuig je ervan dat de mogelijke bewegingen van de slinger door het volgende faseplaatje worden weergegeven,



Merk op dat dit systeem een centrumpunt heeft corresponderend met de stabiele bewegingsloze ophanging en een zadelpunt corresponderend met het balanceren van m recht boven het ophangpunt. Dat dit laatste punt instabiel is weten we ook uit ervaring. Tevens zijn de integraalkrommen gesloten en dit zit hem in het feit dat ons systeem integreerbaar is. Vermenigvuldig de vergelijking namelijk met ϕ' en primitiveer. We vinden,

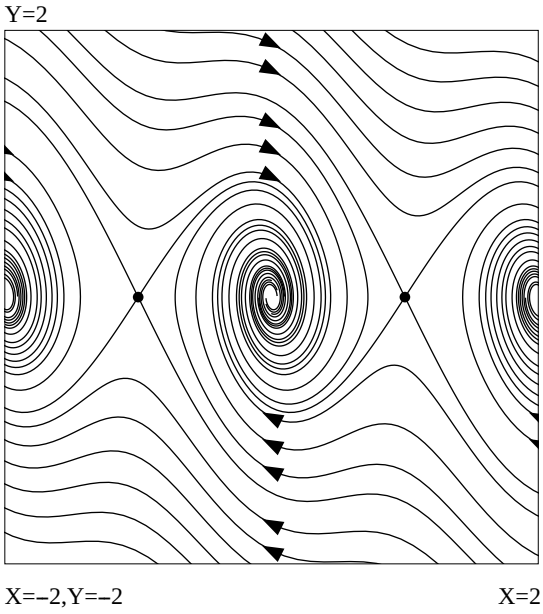
$$\frac{l}{2}\phi'(t)^2 - g\cos\phi(t) = \text{constant}. \tag{50}$$

Dit is een voorbeeld van een behoudswet. Vermenigvuldigen we even in gedachten deze gelijkheid met ml, dan is $\frac{ml}{2}\phi'(t)^2$ de kinetische energie en $-mgl\cos\phi(t)$ de potentiële energie ten tijde t. De som van deze twee is constant in de tijd en we hebben te maken met energiebehoud. Hoe dan ook, onze integraalkrommen zijn precies de niveaulijnen van $(l/2)(\phi')^2 - g\cos\phi$. Verifieer zelf of dit met het faseplaatje overeenstemt.

Neem nu aan dat de slinger een wrijvingskracht $-cl\phi'$ ondervindt. De nieuwe bewegingsvergelijking luidt,

$$l\phi''(t) + \frac{cl}{m}\phi'(t) + g\sin\phi(t) = 0.$$

De integraalkrommen in het faseplaatje zien er nu als volgt uit,



Merk op dat nu —althans voor niet al te grote c— het centrumpunt een stabiel spiraalpunt is geworden; voor grotere c gaat het zelfs over in een stabiel knooppunt. We hebben nog steeds het zadelpunt.

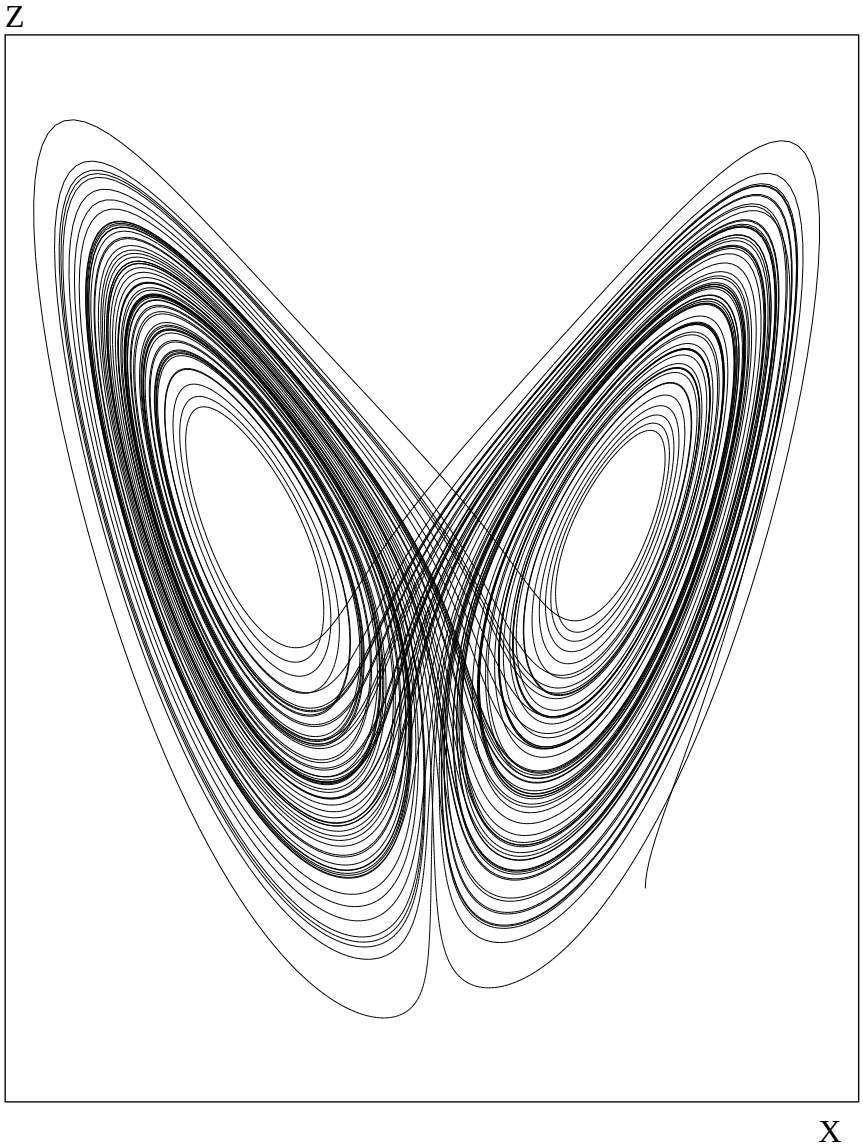
5.4 Niet-autonome stelsels, stelsels in $\mathbb{R}^3$

Zoals eerder opgemerkt kunnen de integraalkrommen van een autonoom stelsel elkaar niet snijden. In dimensie twee heeft dit tot gevolg dat de familie van integraalkrommen van (45) redelijk geordende plaatjes geeft. We hebben gezien dat in $\mathbb{R}^2$ de recurrente dynamica alleen in stationaire punten en limiet cykels plaatsvindt. Gaan we echter over naar dimensie drie en hoger dan is dit geenszins het geval meer. Er treden nieuwe typen limietbanen (attractoren) op, waarvan de bekendste de *quasi-periodieke banen* zijn. Deze ontstaan als er bij een proces meerdere periodieke bewegingen in het spel zijn waarvan de frequenties een irrationale verhouding hebben. Een ander type, dat pas in de zestiger jaren werd ontdekt, is dat van de *vreemde attractor* of *chaotische attractor* welke veelal een fractalachtige structuur hebben.

De vlinder van Lorenz. Beschouw het volgende stelsel d.v.'s

$$\begin{aligned} x' &= 10(y-x) \\ y' &= x(28-z)-y \\ z' &= xy-(8/3)z \end{aligned}$$

Dit stelsel werd rond 1962 bestudeerd door Lorenz naar aanleiding van een model dat een beschrijving gaf van opstijgende lucht ten gevolge van de opwarming van de aarde. Nemen we als startpunt bijvoorbeeld $(10, 10, 10)$ dan krijgen we een baan te zien waarvan een projectie er als volgt uit ziet.



De baan beschrijft een deel van de ruimte dat de vorm heeft van een vlinder met vleugels van positieve dikte. Het punt beweegt zich enkele malen om één vleugel en wipt vervolgens over op de andere, en zo voort. We krijgen zo een rij getallen die het aantal malen op de linkervleugel, op de rechtervleugel, op de linkervleugel, en zo voort aangeeft. Het blijkt dat deze rij getallen zeer sterk van het beginpunt afhangt. Nemen we een startpunt dat dicht bij $(10, 10, 10)$ ligt, dan zal de rij verblijfstijden in de vleugels in het begin lijken op dat bij startpunt $(10, 10, 10)$. We zien na vrij korte tijd echter al dat de rijen van elkaar af gaan wijken en wel zo sterk, dat men helemaal niet meer vermoedt dat

de banen ooit nabij gelegen startpunten hebben gehad. Om het gedrag van dit systeem dus op langere termijn te kunnen voorspellen moet men het startpunt tot op zeer hoge precisie kennen. In de praktijk is dit lang niet altijd mogelijk. De toestand van het weer over een groot gebied is slechts met een beperkte nauwkeurigheid bekend, we moeten het doen met metingen door een netwerk van meetstations, en wat daartussen gebeurt kunnen we alleen maar gokken. In weersmodellen doet deze onzekerheid zich al snel gelden en weersvoorspellingen voor langere termijnen dan een week lijken, zelfs indien de modellen zelf correct zijn, op deze manier fundamenteel uitgesloten.
Wat wel opvalt bij het plaatje is, dat hoewel de baan sterk van het beginpunt afhangt en dus snel onbetrouwbaar wordt, ze toch netjes binnen het gebied van de twee vleugels blijft. Dit wordt veroorzaakt door het feit dat de baan wordt aangetrokken door een limietbaan die aan het systeem ten grondslag ligt. Deze limietbaan is een voorbeeld van een chaotische attractor met een zeer rijke fractalachtige structuur. Het plaatje is te vinden in alle populaire boekjes over chaostheorie. De term 'vlinder van Lorenz' refereert naar de wijsheid dat het gedrag van een vlinder in China gevolgen heeft voor gebeurtenissen in de rest van de wereld.
Het blijkt dat niet-autonome stelsels in dimensie twee ook vaak een chaotisch gedrag kunnen vertonen. De reden hiervoor is dat dergelijke stelsels omgeschreven kunnen worden als autonoom stelsel in $\mathbb{R}^3$. Beschouw het stelsel

$$\begin{aligned} x' &= f(t,x,y) \\ y' &= g(t,x,y). \end{aligned}$$

Door $z = t$ te stellen kan dit stelsel omgevormd worden tot

$$\begin{aligned} x' &= f(z,x,y) \\ y' &= g(z,x,y) \\ z' &= 1, \end{aligned}$$

een autonoom stelsel.

5.5 Verband met recursies, numerieke oplossing

Beschouw een willekeurig stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t,\mathbf{y})$. Zij $\mathbf{y}(t)$ een oplossing met gegeven beginwaarde $\mathbf{y}(t_0)$ op tijdstip t_0. Kies een vast en voldoende klein tijdsinterval Δt. We bekijken de oplossing $\mathbf{y}(t)$ vanaf het tijdstip t_0 op de tijdstippen $t_0, t_1 = t_0 + \Delta t, t_2 = t_0 + 2\Delta t, \ldots$. We krijgen zo de rij vectoren $\mathbf{y}(t_0), \mathbf{y}(t_1), \mathbf{y}(t_2), \ldots$. Als we Δt voldoende klein kiezen weten we dat

$$\frac{\mathbf{y}(t+\Delta t) - \mathbf{y}(t)}{\Delta t} \approx \mathbf{y}'(t).$$

Dus vinden we voor de rij vectoren $\mathbf{y}(t_n)$ een benaderende recursie

$$\frac{\mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{y}(t_n)}{\Delta t} \approx \mathbf{y}'(t_n) = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}(t_n))$$

ofwel $\mathbf{y}(t_{n+1}) \approx \mathbf{y}(t_n) + \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}(t_n))\Delta t$. Merk op dat deze recursie algemener is dan de recursies die we tot nu toe gezien hebben, de index n komt namelijk expliciet in

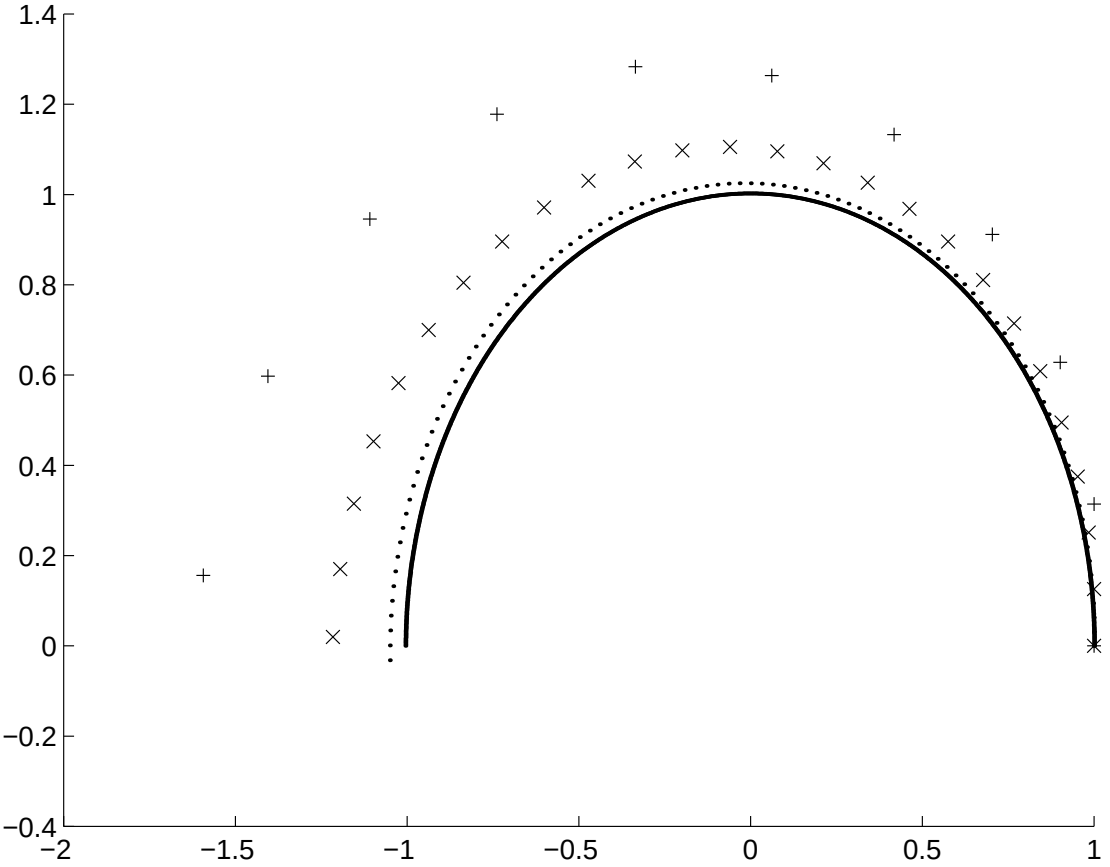
de recursie voor doordat $t_n = t_0 + n\Delta t$. Bij autonome stelsels komt deze expliciete afhankelijkheid van t niet voor en hebben we weer een zelfde soort
recursie als we in voorgaande hoofdstukken bestudeerd hebben.
We kunnen nu de zaak omdraaien. Stel we kiezen $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0), \Delta t$ en beschouwen de recursie

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n)\Delta t.$$

De vraag is nu, hoe goed benadert de recursieve rij $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots$ de rij $\mathbf{y}(t_0)$,$\mathbf{y}(t_1)$, $\mathbf{y}(t_2), \ldots$? We proberen het voor een speciaal geval,

$$\begin{aligned} x' &= -y \\ y' &= x \end{aligned}$$

In het volgende plaatje zien we de oplossing $x(t), y(t)$ met $x(0) = 1, y(0) = 0,\ 0 \leq t \leq \pi$ voor de recursieve rijen met stapgrootten $\pi/10(+), \pi/25(\times), \pi/100(\cdot), \pi/1000(\cdot)$.



Merk op dat de 1001 punten elkaar overlappen, zodat er een kromme ontstaat. Het blijkt dat bij kleiner wordende stapgrootten de grafiek van de recursieve rij steeds beter aansluit bij de grafiek van de oplossing, namelijk de halve cirkel in het bovenhalfvlak. Hiervan wordt gebruik gemaakt bij de *numerieke oplossing* van d.v.'s. De hier geschetste methode staat bekend als de *methode van Euler*. Men kan laten zien dat de precisie van deze methode evenredig is met Δt. Het is echter mogelijk om ingenieuzere

varianten te bedenken, waarvan de precisie evenredig is met een macht van Δt. De bijbehorende macht wordt de *orde* van de numerieke methode genoemd. Uiteraard werken deze methoden veel effectiever dan de Eulermethode. De bekendste zijn de zogenaamde *Runge-Kutta* methoden en de methoden van *Adams*. Plaatjes in dit dictaat zijn geplot met een variant op de laatste, de methode van *Adams-Bashford*.

5.6 Oefeningen

1. Bereken de stationaire punten. Bereken in elk stationair punt de eigenwaarden van het in dat punt gelineariseerde stelsel.

   (a) $x' = y - xy$
   $y' = -x + xy$

   (b) $x' = x^2 - 3x + 2$
   $y' = xy^2 - x$

   (c) $x' = \cos x + \sin y$
   $y' = \sin x + \cos y$

2. Beschouw:

$$x' = 5\left(1 - kx - \frac{2y}{1+x}\right)x$$

$$y' = \left(-1 + \frac{2x}{1+x}\right)y$$

   (a) Bepaal de stationaire punten.

   (b) Bereken bij elk vast punt voor welke waarden van k dit punt stabiel is.

3. Stel we laten een slinger zonder demping, zoals in de voorgaande paragraaf beschreven, vanuit een positie met hoek ϕ_0 los vanuit stilstand. Geef, m.b.v. (50), een (integraal)-uitdrukking voor de slingertijd van deze slingerbeweging en laat zien dat deze toeneemt als we ϕ_0 laten toenemen.

4. Een hond rent met snelheid h in de richting van zijn baas die met een constante snelheid w in een rechte lijn loopt. Om de gedachten te bepalen zullen we aannemen dat de baas op tijdstip $t = 0$ in $(0, 0)$ vertrekt in de positieve y-richting. De hond start dan in het punt (x_0, y_0). Geef het stelsel differentiaalvergelijkingen voor de baan $(x(t), y(t))$ die de hond aflegt. Merk op dat we door de substitutie $y(t) = u(t) + wt$ er een autonoom stelsel van kunnen maken. Kun je een interpretatie geven van deze substitutie?

5. Het volgende stelsel modelleert twee diersoorten die elkaar om dezelfde voedselvoorraad beconcurreren,

$$\begin{aligned} N_1' &= (a_1 - d_1(bN_1 + cN_2))N_1 \\ N_2' &= (a_2 - d_2(bN_1 + cN_2))N_2 \end{aligned}$$

De constanten zijn allen positief. Bepaal de evenwichtspunten van dit stelsel. Laat zien dat als $a_1 d_2 > a_2 d_1$ de populatie N_2 uitsterft en N_1 een evenwicht bereikt (Volterra's exclusie principe).

6. We hebben een meer dat als uitstekend viswater bekend staat. Uiteraard is dit een trekpleister voor veel sportvissers. Om de fluctuaties in de visstand te bestuderen maken we een simpel model voor de vis-visser interactie.

   Aannamen voor de vissen:

   - Vissen groeien logistisch (de continue variant van recursie in (2); zie ook Oef. 8.b) bij afwezigheid van vissers
   - De aanwezigheid van vissers remt de populatiegroei in een grootte evenredig met het aantal vissers en het aantal vissen.

   Aannamen voor de vissers:

   - Vissers worden tot het meer aangetrokken in een mate evenredig met de hoeveelheid vis.
   - Vissers worden ontmoedigd van een bezoek aan het meer in een mate die evenredig is met het aantal aanwezige vissers.

   Stel een model op voor deze interactie en analyseer het. Stel dat een visclub besluit regelmatig vis uit te zetten in het meer. Hoe ziet het model er dan uit? Analyseer deze situatie ook. Wat is het effect van het uitzetten van vis op de vispopulatie?

7. Beddington en May (1982) stelden het volgende model op voor de interactie tussen baleinwalvissen en hun voedselbron, krill (een soort plankton), in de poolzee.

$$\begin{aligned} \text{krill: } x' &= rx\,\frac{1-x}{K} - axy \\ \text{walvissen: } y' &= sy\,\frac{1-y}{bx} \end{aligned}$$

   Analyseer dit model door de evenwichtspunten te bestuderen.

8. Stel we hebben een zware massa M in de oorsprong van een rechthoekig coördinatenstelsel en een massa m op positie $\mathbf{r}$. De kracht die de zware massa op m via zwaartekracht uitoefent is volgens Newton gelijk aan

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r}.$$

   Hierin is G de gravitatieconstante waarvan de waarde pas lang na Newton's tijd voor het eerst gemeten is (Cavendish, 1798). Toch kon Newton uitstekend uit de voeten zonder de waarde van G. Stel dat m zeer klein is t.o.v. M, we kunnen dan veronderstellen dat M vast in de oorsprong blijft en m, onder invloed van de gravitatie, beweegt. Stel dat de beweging in het x, y-vlak plaatsvindt. Uit Newton's bewegingsvergelijkingen $\mathbf{F} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ volgt:

$$x'' = -GM\frac{x}{|\mathbf{r}|^3}, \quad y'' = -GM\frac{y}{|\mathbf{r}|^3}.$$

De waarde van m is gewoon weggevallen, hetgeen impliceert dat de beweging onder invloed van een zwaartekrachtveld onafhankelijk van de massa van het bewegende object is. We zullen de vergelijkingen niet volledig oplossen, maar alleen kijken naar oplossingen in de vorm van cirkelvormige banen die met constante snelheid doorlopen worden.

(a) Stel dat we zo'n cirkelvormige baan als oplossing hebben met straal R en omloopstijd T. Geef een verband tussen R en T. (Hint: vul de oplossing $x = R\cos\omega t, y = R\sin\omega t$ in de vergelijking in)

(b) Bij benadering geldt dat de aarde een cirkelvormige baan rond de zon beschrijft en de maan een cirkelvormige baan rond de aarde. De gemiddelde afstanden zijn hierbij 1.5×10^8 respectievelijk 3.84×10^5 kilometer, de omloopstijden zijn 365 respectievelijk 28 dagen. Bereken de verhouding van de massa's van de aarde en de zon. Hoe ver is een geostationaire satelliet van de aarde verwijderd? De aardstraal bedraagt 6370 km. Voeg daar voor de spaceshuttle nog eens 300 km bij. Wat is de omlooptijd van de spaceshuttle?

(c) Om de zonnemassa zelf te bepalen moeten we uiteraard G kennen. Uit (subtiele) metingen volgt: $G = 6.67 \times 10^{-11}$ $\mathrm{m^3 s^{-2} kg^{-1}}$. Bereken de zonnemassa.

9. We schieten met snelheid v_0 een kogel af onder een hoek α met het aardoppervlak. We brengen een coördinatenstelsel aan met een x-as in horizontale richting en de y-as verticaal. Onze kogel wordt vanuit $(0, 0)$ afgeschoten. We nemen aan dat de baan in het eerste kwadrant van ons x, y-vlak ligt. De versnelling van de zwaartekracht bedraagt g en de massa van de kogel m. We nemen aan dat de kogel op tijdstip $t = 0$ wordt afgeschoten en we verwaarlozen de wrijving met de lucht. De baan van de kogel wordt gegeven door de functies $x(t)$ en $y(t)$.

(a) Geef een 2-de orde differentiaalvergelijking voor y en een vergelijking voor x.

(b) Los de vergelijkingen op en geef de baan van de kogel in x, y-coördinaten aan.

(c) Gegeven v_0 en α, op welke afstand komt de kogel op de grond terecht?

10. We hebben hetzelfde coördinatensysteem als in de vorige opgave. We schieten nu een kogel vanaf een (kleine) hoogte h vanuit $(0, h)$ in (horizontale) positieve x-richting af. Geef een vergelijking voor de baan van de kogel in x, y-coördinaten.

We bekijken nu het probleem van de horizontale ontsnappingssnelheid. Vraag: wat is de minimale snelheid waarmee een kogel horizontaal kan worden afgevuurd opdat hij niet op de grond terugvalt. Het principe dat we zullen gebruiken is dat de kromming van de kogelbaan kleiner moet zijn dan de kromming van de aarde. Een goede maat voor de kromming van de grafiek van een functie f in een punt met horizontale raaklijn is de waarde van $|f''(x)|$ in dat punt. Bereken de kromming van de kogelbaan bij afvuren. Bereken ook de kromming van het aardoppervlak dat gegeven wordt door $y = \sqrt{R^2 - x^2} - R$ in het punt $x = 0$. Hierin is R de straal van de aarde. Bereken nu de horizontale ontsnappingssnelheid als functie van g en R. Gegeven dat $g = 10m/s^2$ en $R = 6400km$ bereken de expliciete waarde van de horizontale ontsnappingssnelheid.

11. We kijken naar het oplossen van een stelsel differentiaalvergelijkingen van de vorm

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

waar A een 2×2 matrix is. Het is duidelijk dat het punt $(0, 0)$ een evenwichtspunt is en op het college is behandeld hoe kan worden bepaald wat het type is van dit evenwichtspunt. Deze opgave bevat enkele oefeningen hiermee. We zullen bovendien zien hoe de oplossingskrommen van deze vergelijkingen met `Mathematica` kunnen worden getekend.

We bekijken de volgende differentiaalvergelijkingen

(a) $x' = -kx + y, \quad y' = -x \quad (k = 5/2, 1, 0, -1, -5/2)$

(b) $x' = 5x - y, \quad y' = 3x + y$

(c) $x' = -2x + y, \quad y' = x - 2y$

Onderzoek van al deze differentiaalvergelijkingen de aard van het evenwichtspunt $(0, 0)$. Controleer vervolgens of de resultaten overeenstemmen met de uitkomsten van de berekening zoals die op het college is behandeld.

12. **Een roofdier-prooidier model.** We bekijken populaties van twee soorten dieren P en R die in een gesloten systeem naast elkaar voorkomen en waarbij soort R jaagt op soort P. We geven met $P(t)$ en $R(t)$ de populatiegrootte van de beide soorten op tijdstip t aan.

We veronderstellen dat de groei van de prooidieren bij afwezigheid van de roofdieren logistisch verloopt, d.w.z. volgens

$$P'(t) = r \left[1 - \frac{P(t)}{a}\right] P(t).$$

Het aantal prooidieren dat per eenheid van tijd geconsumeerd wordt door één roofdier noemen we C. Het zal groter worden als de populatie prooidieren toeneemt, maar het zal niet onbeperkt toenemen. Er zijn verschillende formules om een dergelijk eetgedrag te beschrijven. Wij kiezen hier $C = \frac{vP}{c+P}$ met c en v positieve constantes. Dit is de zogenaamde *Michaelis–Menten functie* die in veel biologische modellen terugkomt. De vergelijking voor $P'(t)$ wordt nu

$$P'(t) = r \left[1 - \frac{P(t)}{a}\right] P(t) - \frac{vP(t)}{c + P(t)} R(t)$$

met r, c, v en a positieve constantes.

We veronderstellen verder dat de populatie van de roofdieren bij afwezigheid van de prooidieren exponentieel afneemt, d.w.z.

$$R'(t) = -bR(t).$$

De consumptie van prooidieren wordt echter (met efficiëntie e) gebruikt voor de groei van de populatie volgens $R'(t) = (-b + eC)R(t)$. De vergelijking voor $R'(t)$ wordt dus

$$R'(t) = \left[-b + \frac{evP(t)}{c + P(t)}\right] R(t)$$

met b en e positieve constantes.

Ter vereenvoudiging kiezen we nu $c = 1$, $b = 1$, $r = 5$, $v = 10$ en $e = \frac{1}{5}$ zodat we krijgen

$$\begin{aligned} P'(t) &= 5\left[1 - \frac{P(t)}{a} - \frac{2R(t)}{1 + P(t)}\right] P(t) \\ R'(t) &= \left[-1 + \frac{2P(t)}{1 + P(t)}\right] R(t). \end{aligned}$$

Zoek eerst de evenwichtspunten van dit systeem. Merk op dat de ligging en het aantal van de evenwichtspunten afhankelijk zijn van de waarde van a. Als we ook op de types van de evenwichtspunten letten, treden er 4 verschillende situaties op, namelijk voor $0 < a < 1$, $1 < a < \frac{5}{3}$, $\frac{5}{3} < a < 3$ en $3 < a$.

Gebruik `Mathematica` om te controleren of de ligging van de evenwichtspunten klopt met de berekening en ook om de types van de evenwichtspunten te bepalen voor verschillende waarden van a. Hiervoor is het erg handig om de directe omgeving van een (stabiel) evenwichtspunt uit te vergroten door de assen geschikt te kiezen. Is het bijvoorbeeld te zien voor welk van de vier boven aangegeven gebieden voor a er sprake is van een stabiel spiraalpunt?

Bepaal tenslotte door middel van een directe berekening de types van de gevonden evenwichtspunten. Komen de resultaten overeen met de uitkomsten van het programma?

13. **De chemostaat.** Bij experimenten aan de groei van bacteriekolonies is het noodzakelijk dat men doorlopend een voorraad bacterieën tot z'n beschikking heeft. Een geschikte cultuur is dat van een *chemostaat*. Deze bestaat uit een vloeistofreservoir van volume V waarin zich de bacterieën bevinden. Stel dat op tijdstip t er $N(t)$ bacterieën per volume eenheid zijn (gemeten in duizenden of miljoenen). Stel dat de voedselconcentratie $C(t)$ bedraagt. Met constante snelheid wordt er vloeistof het bacteriereservoir binnengepompt en men zorgt ervoor dat een even grote hoeveelheid vloeistof het reservoir verlaat. De binnengepompte vloeistof bevat een vaste concentratie C_0 aan voedsel. Uiteraard verdwijnt er met de wegstromende vloeistof een fractie van de bacterieën en het voedsel. Neem aan dat per tijdseenheid een volume F het reservoir wordt binnengepompt. In wat volgt zullen we verder aannemen dat de groei van de bacterieën aan dezelfde regels voldoet als in bovenstaand onderdeel beschreven. In het bijzonder gebruiken we dezelfde functie $k(C)$ als in Oefening 4.4.8. Vraag is hoe de vloeistoftoevoer en -afvoer op de groei van invloed zijn. In het bijzonder willen we voorkomen dat F te groot wordt zodat alle bacterieën weggespoeld zouden worden. Waar ligt de grens op F?

(a) Merk op dat $N(t)V$ de totale hoeveelheid bacterieën op tijdstip t is en $C(t)V$ de totale voedselvoorraad in het reservoir. Kijk nu welke termen bijdragen aan $d(NV)/dt$ en $d(CV)/dt$. Laat vervolgens zien dat we het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} N' &= k(C)N - \frac{F}{V}N \\ C' &= -\alpha k(C)N + \frac{F}{V}(C_0 - C) \end{aligned}$$

krijgen.

(b) Naast het punt $(0, C_0)$ (=geen bacterieën, alleen voedsel) is er nog precies één evenwichtspunt $(\bar{N}, \bar{C})$ dat wordt gegeven door $k(\bar{C}) = F/V$ en $\bar{C} + \alpha\bar{N} = C_0$. Bewijs dit.

(c) Bewijs, onder de aanname dat k strikt monotoon stigend is, dat $\bar{N} > 0$ dan en slechts dan als $k(C_0) > F/V$.

(d) Laat zien dat de eigenwaarden van de Jacobi-matrix rond $(0, C_0)$ gelijk zijn aan $-F/V$, $k(C_0) - F/V$ en rond $(\bar{N}, \bar{C})$ gelijk aan $-F/V$, $-\alpha k'(\bar{C})\bar{N}$. Onderzoek de aard van beide evenwichtspunten. Bedenk daarbij dat $\bar{N}$ en $k(C_0) - F/V$ hetzelfde teken hebben.

(e) Laat zien dat uit het stelsel vergelijkingen volgt, $(C + \alpha N)' = (-F/V)(C + \alpha N) + FC_0/V$. Los deze vergelijking voor $C + \alpha N$ op en leidt af dat $\lim_{t\to\infty}(C(t) + \alpha N(t)) = C_0$.

(f) Wat is de voorwaarde voor F en C_0 opdat niet alle bacterieën worden weggespoeld?

14. **Concurrentie.** Twee elektronica-zaken, X en Y concurreren met elkaar. De omzet van de twee winkels (in veelvouden 100.000 Euro) ontwikkelt zich volgens het stelsel differentiaal vergelijkingen

$$\begin{aligned} x'(t) &= 2x(t)(1 - x(t)) - 3x(t)y(t) && (51) \\ y'(t) &= cy(t)(1 - y(t)) - dx(t)y(t), && (52) \end{aligned}$$

met $c, d > 0$. Hierbij is $x(t)$ de omzet van winkel X, en $y(t)$ de omzet van winkel Y.

(a) Hoe gedraagt $x(t)$ zich als $y(0) = 0$ en $0 < x(0) < 1$? (Het is niet nodig een oplossing van de vergelijking te geven: een schets van de oplossing of een beknopte omschrijving volstaat.)

(b) Definieer de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ door

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x(1-x) - 3xy \\ cy(1-y) - dxy \end{pmatrix}.$$

Geef de Jacobi matrix van f.

(c) Geef de stationaire oplossingen van het stelsel differentiaalvergelijkingen (51-52).

(d) Laat $c = 3$, $d = 4$. Geef aan welke van de in het vorige onderdeel gevonden stationaire oplossingen stabiel zijn.

(e) Laat weer $c = 3$, $d = 4$. Schets in (een relevant deel van) het (x, y)-vlak de lijnen waar $x' = 0$ en waar $y' = 0$. Deze lijnen delen het vlak op in gebieden. Geef voor ieder van deze gebieden aan in welke richting de oplossing verandert die door zo'n gebied 'loopt'. Geef ook aan in welke richting de oplossingen veranderen die de krommen $x' = 0$ en $y' = 0$ doorkruisen.

(f) Schets een aantal karakteristieke oplossingskrommen. d.w.z., maak een faseportret.

(g) Een winkel gaat failliet als de omzet in een jaar 0 Euro bedraagt. Is het in dit model mogelijk dat beide winkels failliet gaan?

15. **Epidemie.** We bestuderen de verspreiding van een besmettelijke ziekte en kiezen voor een continu model. $x(t)$ is het deel van de bevolking dat op tijdstip t dat vatbaar is voor de ziekte maar niet ziek is. Mensen die ziek zijn zijn ook (vrijwel) onmiddellijk besmettelijk. Op tijdstip t is het deel dat ziek is $y(t)$. Mensen die genezen zijn immuun en niet meer besmettelijk. Het aantal mensen dat per tijdseenheid geneest of sterft is een vast deel van het aantal zieke mensen. Verder nemen we aan dat het aantal mensen in de bestudeerde periode niet toeneemt en maar alleen afneemt doordat mensen bezwijken aan de ziekte.

Voor zekere positieve constanten ρ en γ kan het verspreiding van de ziekte beschreven worden door

$$x' = -\rho\, xy, \quad y' = \rho\, xy - \gamma\, y. \tag{53}$$

(a) Beschrijf van welke veronderstellingen uitgegaan is bij het opstellen van beide termen "ρxy". Hoe interpreteer je de term γy.

(b) Geef in het biologisch relevante deel van het x-y-vlak aan waar $x' = 0$, respectievelijk $y' = 0$. Geef het tekenverloop van x' en y' aan (middels pijltjes) in het diagram dat zo ontstaat. Bepaal de evenwichtspunten. Zijn die stabiel? Alleen voor $x(0) > \gamma/\rho$ en $y(0) > 0$ ontstaat er een epidemie. Waarom?

(c) Bepaal een functie $F(x, y)$ waarvoor geldt

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 1 \quad \text{en} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 1 - \frac{\gamma}{\rho}\frac{1}{x}.$$

Hoe kan je F gebruiken om integraalkrommen te vinden?
Wat voor effect heeft de term ρxy op de oplossing?

(d) Stel nu $\gamma/\rho = 0.75$. Gebruik de functie F uit (c) om, in het biologisch relevante deel van het x-y-vlak, de kromme te schetsen van de oplossing met $x(0) = 0.9999$ en $y(0) = 0.0001$. Geef duidelijk aan hoe de kromme doorlopen wordt. Hoe groot is het deel van dat bevolking dat op het hoogtepunt van de epidemie ziek is ($\ln 0.75 \approx -.288$)?

16. **De aangedreven mathematische slinger.** Met behulp van het notebook `slinger.nb` bestuderen we de mathematische slinger waarvan we het ophangpunt verticaal op en neer bewegen volgens de functie $A\cos ft$, waarin f de hoekfrequentie van de beweging is en A de amplitude. De bewegingsvergelijking voor de (hoek)uitwijking ϕ wordt gegeven door

$$\phi'' + c\phi' + (1 + Af^2 \cos ft)\sin\phi = 0.$$

We hebben de lengte van de slinger en de versnelling van de zwaartekracht op 1 gesteld. De functie `scoop` laat de positie van de slinger in de fase-ruimte (ϕ, ϕ') zien op de tijdstippen 0, T, $2T$, $3T, \ldots$ waarin $T = 2\pi/f$ de periode van de aandrijving is. We krijgen als het ware een stroboscopische opname ('discotheek-effect') te zien van het gedrag van de aangedreven slinger. De eerste twee vragen zijn theoretisch.

(a) Geef een afleiding van de bewegingsvergelijking.

(b) In de volgende vragen nemen we $A = 0$ (geen aandrijving).

i. Laat zien dat de natuurlijke slingertijd van de slinger voor kleine uitwijkingen en $c = 0$ gelijk is aan 2π en dat de hoekfrequentie 1 is.

ii. Schrijf de bewegingsvergelijking (met $A = 0$) om in een stelsel eerste orde vergelijkingen. Bepaal de aard van de vaste punten $\phi = \phi' = 0$ en $\phi = \pm\pi$, $\phi' = 0$ voor willekeurige $c > 0$.

Bestudeer het notebook `slinger.nb`. Waarom wordt de afhankelijke variabele in de plaatjes modulo 2π genomen?

(c) Kies eerst $A = 0$, $c = 0$ (geen aandrijving of demping) en $f = 1$ en bekijk voor verschillende beginposities wat er gebeurt. Als bij elke uitwijking de periode precies 2π was geweest, wat had je dan gezien?

(d) Kies $A = 0.5$, $c = 0$ en $f = 1$. Kun je resonantieverschijnselen waarnemen? (Kijk naar startwaarden dicht in de buurt van $(0, 0)$).

(e) In de volgende experimenten kiezen we steeds $A = 0.1$, $c = 0$ en laten f variëren. Probeer van elk van de f in de volgende onderdelen een redelijk beeld van het stroboscoop plaatje te krijgen.

i. Kies $f = 2$. Heb je een verklaring voor de twee eilanden aan weerszijden van $(0, 0)$?

ii. Kies nu f iets groter, resp. iets kleiner dan 2 en kijk wat er gebeurt.

iii. Kies een rij waarden van f die tot 50 stijgt en vorm van elk van deze f een beeld van het gedrag. Bij $f = 50$ blijken de "chaotische" gebieden verdwenen te zijn en zijn de posities rond $\phi = \pm\pi$, $\phi' = 0$ stabiel geworden! Verifieer dit en probeer te ontdekken bij welke f dit voor het eerst gebeurt.

We gaan nu demping invoeren door $c > 0$ te nemen. In de volgende serie plaatjes moet je af en toe wat geduld hebben voor zich een goed beeld heeft gevormd.

(f) Bekijk het plaatje met $A = 0$, $f = 1$ en $c = 0.01$. Verklaring?

(g) In de volgende experimenten kiezen we steeds $A = 0.1$ en $c = 0.01$. Probeer van elk van de f in de volgende onderdelen een redelijk beeld van het stroboscoop plaatje te krijgen.

i. Kies een aantal waarden voor f in de buurt van 2 en kijk wat er gebeurt. Probeer zoveel mogelijk "stabiele eilanden" te vinden.

ii. Kies een rij waarden van f die tot 50 stijgt en vorm van elk van deze f een beeld van het gedrag. Bij $f = 50$ blijken de posities rond $\phi = \pm\pi$, $\phi' = 0$ wederom stabiel geworden! Verifieer dit en probeer te ontdekken bij welke f dit voor het eerst gebeurt.

6 Lineaire programmering

6.1 Inleiding, voorbeeld

Lineaire programmering is een onderdeel van de tak van de wiskunde die bekend staat onder de namen *optimalisatie, besliskunde* of het gewichtiger klinkende *operations research*. In dit hoofdstuk beschouwen we lineaire functies waarvan de maximale of minimale waarde bepaald moet worden onder zekere condities die worden gegeven door lineaire ongelijkheden. Dat dergelijke problemen in de praktijk al zeer snel kunnen optreden moge blijken uit het volgende voorbeeld, dat een adaptatie is van een voorbeeld uit Greene, Chatto, Hicks, Cox, "*Linear programming in the packing industry*", Journal of Industrial Engineering 10 (1959), 364-372.

> "A meat packing plant produces 480 hams, 400 pork bellies and 230 picnic hams every day. Each of these products can be sold either fresh or smoked. The total number of hams, bellies and picnics that can be smoked during a normal working day is 420. In addition, up to 250 products can be smoked on overtime at a higher cost. The *net* profits are as follows:

	Fresh	Smoked on regular time	Smoked on overtime
Hams	\$8	\$14	\$11
Bellies	\$4	\$12	\$7
Picnics	\$4	\$13	\$9

> For example, the following schedule yields a total net profit of \$9965:

	Fresh	Smoked	Smoked(overtime)
Hams	165	280	35
Bellies	295	70	35
Picnics	55	70	105

> The objective is to find the schedule that maximizes the total net profit."

Eerst zullen we dit probleem herschrijven in de gedaante van lineaire ongelijkheden. We voeren de variabelen $x_1, x_2, \ldots, x_6$ in via het volgende schema.

	Fresh	Smoked	Smoked(overtime)
Hams	$480 - x_1 - x_2$	x_1	x_2
Bellies	$400 - x_3 - x_4$	x_3	x_4
Picnics	$230 - x_5 - x_6$	x_5	x_6

We hadden de variabelen in de kolom "Fresh" ook wel een aparte naam kunnen geven, maar we weten al dat de totale hoeveelheden producten 480,400 respectievelijk 230 zijn. De aantallen volgen dus precies uit de aantallen in de andere twee kolommen. In elk geval moet gelden dat

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

en

$$480 - x_1 - x_2,\ 400 - x_3 - x_4,\ 230 - x_5 - x_6 \geq 0.$$

Het aantal artikelen dat normaal gerookt kan worden is hooguit 420, dus

$$x_1 + x_3 + x_5 \leq 420.$$

Het aantal artikelen dat tijdens overuren gerookt kan worden is hooguit 250, dus

$$x_2 + x_4 + x_6 \leq 250.$$

De totale netto winst is gelijk aan

$$\begin{aligned} &8(480 - x_1 - x_2) + 4(400 - x_3 - x_4) + 4(230 - x_5 - x_6) \\ &+14x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 7x_4 + 13x_5 + 9x_6 \\ &= 6360 + 6x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 3x_4 + 9x_5 + 5x_6. \end{aligned}$$

De opdracht is dus, maximaliseer $6360 + 6x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 3x_4 + 9x_5 + 5x_6$ onder de restricties

$$\begin{aligned} x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \\ 480 - x_1 - x_2 &\geq 0 \\ 400 - x_3 - x_4 &\geq 0 \\ 230 - x_5 - x_6 &\geq 0 \\ x_1 + x_3 + x_5 &\leq 420 \\ x_2 + x_4 + x_6 &\leq 250. \end{aligned}$$

Dit probleem noemen we een *lineaire programmeringsprobleem*. De maximale netto winst blijkt \$10910 te zijn in de situatie

	Fresh	Smoked	Smoked(overtime)
Hams	440	0	40
Bellies	0	400	0
Picnics	0	20	210

Hoewel bovenstaand probleem slechts zes variabelen heeft is het lastig in te zien dat de gegeven oplossing inderdaad de optimale is (probeer maar). Bij problemen uit de praktijk kan het aantal variabelen zelfs in de tientallen of honderden belopen en het zal duidelijk zijn dat er dan niet meer met de hand gerekend kan worden. Hoewel lineaire programmeringsproblemen al eerder door een klein aantal wiskundigen werden bestudeerd, kunnen we zeggen dat dit gebied rond 1947 voor het eerst in grotere kring de aandacht kreeg. Belangrijke aanzet hiertoe werd gegeven door de Amerikaanse wiskundige G.B. Dantzig in verband met logistieke problemen bij de Amerikaanse luchtmacht. Hij ontwikkelde tevens de *simplexmethode*, een zeer praktisch algoritme om lineaire programmeringsproblemen op te lossen. Zeer snel werd duidelijk dat lineaire programmering en de simplexmethode in een grote verscheidenheid aan praktische problemen gebruikt konden worden. Zo ontvingen T.C. Koopmans en L.V. Kantorowitz in 1975 de Nobelprijs voor de economie voor hun bijdragen tot optimalisatietechnieken en hun

toepassingen. Tegenwoordig zijn deze technieken wijdverbreid als standaardmethode om optimalisatieproblemen in de praktijk op te lossen.
Het is interessant op te merken dat de ontwikkeling van lineaire programmeringsmethoden vrijwel parallel loopt met de ontwikkeling van de computer. Immers, in 1947 bestonden de eerste elektronische computers slechts enkele jaren en deze konden meteen ingezet worden om stelsels ongelijkheden met tientallen variabelen aan te pakken. Het hiermee bereikte succes vormde weer een stimulans om lineaire programmeringstechnieken uit te breiden en te verfijnen. Deze wisselwerking is tot op vandaag doorgegaan en we hebben hiermee een duidelijk voorbeeld van kruisbestuiving tussen modelvorming enerzijds en het succes van computers anderzijds.

6.2 Lineaire ongelijkheden

Alvorens in te gaan op de simplexmethode, behandelen we eerst de benodigde begrippen over lineaire ongelijkheden. Het college lineaire algebra houdt zich voor een belangrijk deel bezig met de oplossing van stelsels lineaire vergelijkingen. We zullen dit generaliseren en kijken naar stelsels lineaire ongelijkheden

$$\begin{array}{rl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & \leq b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & \leq b_m \end{array} \tag{54}$$

of, afgekort,

$$L_i(\mathbf{x}) \leq b_i \ (i = 1, \ldots, m)$$

waarin $L_i(\mathbf{x}) := a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$. Als nog kortere notatie gebruiken we $\mathbf{L}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b}$ met $\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ en $\mathbf{b} := (b_1, \ldots, b_m)^{\mathrm{T}}$. We bekijken nu eerst een aantal voorbeelden.

Voorbeeld 1. Het stelsel ongelijkheden

$$\begin{array}{rcl} -1 \leq x_1 & \leq & 1 \\ -1 \leq x_2 & \leq & 1 \\ -1 \leq x_3 & \leq & 1 \end{array}$$

in $\mathbb{R}^3$ legt een kubus met zijdelengte 2 vast.

Voorbeeld 2. Het stelsel ongelijkheden

$$\begin{array}{rcl} -1 \leq & x_1 + x_2 + x_3 & \leq 1 \\ -1 \leq & -x_1 + x_2 + x_3 & \leq 1 \\ -1 \leq & x_1 - x_2 + x_3 & \leq 1 \\ -1 \leq & x_1 + x_2 - x_3 & \leq 1 \end{array}$$

in $\mathbb{R}^3$ legt een octaëder of regelmatig achtvlak vast.

Voorbeeld 3. Het stelsel ongelijkheden

$$\begin{array}{rcl} x_1 & \geq & 0 \\ x_2 & \geq & 0 \\ x_1 + x_2 & \leq & 1 \end{array}$$

in $\mathbb{R}^3$ legt een oneindig lange koker in de x_3-richting vast met een driehoek als doorsnede.

Voorbeeld 4. Het stelsel ongelijkheden

$$\begin{aligned} x_3 + x_1 &\leq 1 \\ x_3 - x_1 &\leq 1 \\ x_3 + x_2 &\leq 1 \\ x_3 - x_2 &\leq 1 \end{aligned}$$

in $\mathbb{R}^3$ legt een piramide vast met de top in $(0, 0, 1)$, die zich oneindig ver in de richting van de negatieve x_3-as uitstrekt.

Voorbeeld 5. Het stelsel ongelijkheden

$$\begin{aligned} x_3 + x_2 + x_1 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 1 \\ x_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

is *strijdig*, x_3 kan niet zowel ≥ 1 als ≤ 0 zijn. In dit voorbeeld is de strijdigheid direct te zien. In het volgende voorbeeld wordt dat toch lastiger.

Voorbeeld 6. Het stelsel ongelijkheden

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &\geq 1 \\ -2x_1 - x_2 &\geq -1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &\geq 0 \\ -3x_1 + 2x_3 &\geq -2 \end{aligned}$$

is strijdig. Men kan dit inzien door vier maal de eerste bij de som van de overige ongelijkheden op te tellen. Het resultaat is $0 \geq 1$, dus we hebben een strijdig stelsel. Men moet natuurlijk wel op dit idee komen en het zou prettig zijn om een systematische methode te hebben die beslist of een stelsel ongelijkheden al of niet strijdig is. Het zal blijken dat ook voor dit soort problemen de simplexmethode een praktische oplossingsmethode biedt.

Een functie van de vorm $L(\mathbf{x}) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ noemen we een *lineaire vorm* en de vector $\mathbf{a} := (a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}}$ heet de *coëfficiënten vector* van $L(\mathbf{x})$. Merk op $L(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$. L heet *triviaal* als de coëfficiënten vector nul is. Met de notatie $L(\mathbf{x})$ zullen we stilzwijgend een lineaire vorm op $\mathbb{R}^n$ bedoelen.
Allereerst merken we op, dat stelsels lineaire ongelijkheden een generalisatie zijn van stelsels lineaire vergelijkingen. Immers, de lineaire vergelijking $L(\mathbf{x}) = b$ is equivalent met het stelsel ongelijkheden $L(\mathbf{x}) \geq b$ en $L(\mathbf{x}) \leq b$. De eerste ongelijkheid kan weer in onze algemene vorm gebracht worden door op te merken dat deze equivalent is met $-L(\mathbf{x}) \leq -b$.

Definitie 6.2.1 *Een halfruimte is de oplossingsverzameling van een ongelijkheid $L(\mathbf{x}) \geq b$,waarin $L(\mathbf{x})$ een niet-triviale lineaire vorm op $\mathbb{R}^n$ is.*

Het is nu duidelijk dat de oplossingsverzameling van ons stelsel ongelijkheden (54) doorsnede is van een eindige verzameling halfruimten in $\mathbb{R}^n$. Deze kan eventueel leeg zijn als we te maken hebben met een strijdig stelsel. Voorlopig nemen we aan dat ons stelsel minstens één oplossing heeft.

Definitie 6.2.2 *Een polytoop in $\mathbb{R}^n$ is een niet-lege doorsnede van een eindig aantal halfruimten in $\mathbb{R}^n$. Een begrensde polytoop noemen we ook polyeder of veelvlak.*

Zij V de polytoop gegeven door het stelsel ongelijkheden (54). Zij $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V$ een tweetal punten. Het verbindingslijnstuk tussen $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ wordt gegeven door $\lambda\mathbf{p} + (1-\lambda)\mathbf{q},\ \lambda \in [0,1]$. Merk nu op, dat voor willekeurige i geldt,

$$\begin{aligned} L_i(\lambda\mathbf{p} + (1-\lambda)\mathbf{q}) &= \lambda L_i(\mathbf{p}) + (1-\lambda)L_i(\mathbf{q}) \\ &\leq \lambda b_i + (1-\lambda)b_i = b_i \end{aligned}$$

Met andere woorden, het verbindingslijnstuk tussen $\mathbf{p}$ en $\mathbf{q}$ ligt helemaal in V. We hebben nu aangetoond dat een polytoop *convex* is.

Definitie 6.2.3 *Een deelverzameling $U \subset \mathbb{R}^n$ heet convex als voor ieder tweetal punten $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in U$ tevens hun verbindingslijnstuk in U ligt.*

In de gewone ruimte zijn we gewend dat een polyeder zijvlakken, ribben en hoekpunten heeft. In $\mathbb{R}^n$ kunnen we generalisaties van dergelijke *zijcellen* definiëren, maar hier voeren we alleen het begrip *hoekpunt* formeel in.

Definitie 6.2.4 *Zij V een polytoop en $\mathbf{p} \in V$. Het punt $\mathbf{p}$ noemen we een hoekpunt als uit $\mathbf{p} = \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}$ met $\lambda \in (0,1)$ en $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ volgt dat $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{p}$.*

Het volgende lemma geeft een criterium voor hoekpunten in termen van de lineaire vormen L_i.

Lemma 6.2.5 *Zij V de oplossingsverzameling van (54). Een punt $\mathbf{p} \in V$ is een hoekpunt dan en slechts dan als het stelsel lineaire vormen L_i met $L_i(\mathbf{p}) = b_i$ rang n heeft.*

Bewijs. Zij I de indexverzameling van alle i zó dat $L_i(\mathbf{p}) = b_i$.
Stel eerst dat de rang van $\{L_i\}_{i\in I}$ gelijk is aan n. Stel $\lambda \in (0,1)$ en $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ zó dat $\mathbf{p} = \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}$. Dan geldt voor elke $i \in I$,

$$\begin{aligned} b_i &= L_i(\mathbf{p}) = \lambda L_i(\mathbf{x}) + (1-\lambda)L_i(\mathbf{y}) \\ &\leq \lambda b_i + (1-\lambda)b_i \\ &= b_i \end{aligned}$$

Blijkbaar is het $\leq$-teken hierboven een $=$-teken, met andere woorden, $\lambda L_i(\mathbf{x}) = \lambda b_i$ en $(1-\lambda)L_i(\mathbf{y}) = (1-\lambda)b_i$. Omdat $\lambda \in (0,1)$, volgt $L_i(\mathbf{x}) = L_i(\mathbf{y}) = b_i$. Omdat de rang n is heeft het stelsel vergelijkingen $L_i(\mathbf{z}) = b_i,\ i \in I$ hooguit één oplossing. Met andere woorden, $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{p}$ en $\mathbf{p}$ is een hoekpunt.
Stel nu dat de rang van $\{L_i\}_{i\in I}$ kleiner dan n. Kies een vector $\mathbf{v} \neq 0$ zó dat $L_i(\mathbf{v}) = 0$ voor alle $i \in I$. Omdat $L_i(\mathbf{p}) < b_i$ voor alle $i \notin I$ kunnen we ν zó klein kiezen dat $L_i(\mathbf{p} \pm \nu\mathbf{v}) \leq b_i$ voor alle $i \notin I$. Stel $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \nu\mathbf{v}$ en $\mathbf{y} = \mathbf{p} - \nu\mathbf{v}$ dan geldt blijkbaar $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Bovendien, $\mathbf{p} = (\mathbf{x} + \mathbf{y})/2$ en dus is $\mathbf{p}$ geen hoekpunt. □

Zij $\mathbf{p}$ een hoekpunt en $I = \{i|\ L_i(\mathbf{p}) = b_i\}$. We noemen een hoekpunt $\mathbf{p}$ *enkelvoudig* als I uit precies n elementen bestaat, en *meervoudig* of *ontaard* als $\#I > n$.

Voorbeeld. We berekenen de hoekpunten van de polytoop $V \subset \mathbb{R}^3$ gegeven door het stelsel ongelijkheden

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \leq & 3 \\ 2x_1 - x_2 & \geq & 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 & \geq & 0 \\ x_2 + x_3 & \geq & 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 & \geq & 1 \end{array}$$

Volgens Lemma 6.2.5 is een punt $\mathbf{p} \in V$ een hoekpunt, precies als in dit punt $\mathbf{p}$ drie onafhankelijke lineaire vormen van de bovenstaande vijf gelijk zijn aan de rechterzijde van de ongelijkheid. We hoeven dus alleen maar alle mogelijke drietallen uit bovenstaande vijf te kiezen, kijken of ze onafhankelijk zijn, ze gelijk stellen aan de overeenkomstige rechterzijde van de ongelijkheid en het stelsel oplossen. Tenslotte moeten we controleren of de gevonden oplossing inderdaad in V ligt. Neem bijvoorbeeld de eerste drie vormen. Deze zijn inderdaad onafhankelijk en het stelsel vergelijkingen luidt

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 - x_2 & = & 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 0. \end{array}$$

met als unieke oplossing $(-3, -6, 9)$. Deze voldoet aan ons stelsel ongelijkheden en is dus een hoekpunt. In totaal zijn er $\binom{5}{3} = 10$ mogelijkheden om drie vormen te kiezen. Het blijkt dat alleen het drietal bestaande uit de eerste, vierde en vijfde vorm afhankelijk is en dus vervalt. We vinden de volgende kandidaten voor hoekpunten,

$$\begin{array}{ccc} (-3, -6, 9) & (3, 6, -6) & (3, 3, -3) \\ (-1, -2, 3) & (0.5, 1, -1) & (0.5, 0.5, -0.5) \\ (-7, -14, 19) & (-7, -12, 17) & (0, 0, 0) \end{array}$$

Na controle blijkt dat alleen de eerste zes (=bovenste twee rijen) hiervan in V liggen, m.a.w. aan ons stelsel ongelijkheden voldoen. Hiermee hebben we de zes hoekpunten gevonden.
In het algemeen moeten we voor de bepaling van de hoekpunten van het polytoop behorend bij (54) een n-tal ongelijkheden tot gelijkheden maken en deze oplossen. Omdat er $\binom{m}{n}$ keuzemogelijkheden voor n objecten uit m zijn, kan het rekenwerk, en ook het aantal hoekpunten, oplopen.
Er geldt bijvoorbeeld, $\binom{100}{50} = 100891344545564193334812497256 \approx 10^{29}$! Een dergelijk aantal mogelijkheden kan zelfs met de snelste rekenapparatuur niet getest worden.
Dat er inderdaad hoekpunten kunnen zijn volgt uit de volgende stelling.

Stelling 6.2.6 *Beschouw het stelsel ongelijkheden* (54) *en stel dat V, de oplossingsverzameling, niet leeg is. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent,*

i) *V bevat een hoekpunt.*
ii) *de rang van $L_1, \ldots, L_m$ is n.*

Bewijs. Stel dat V een hoekpunt bevat. Dan volgt uit Lemma 6.2.5 automatisch dat de rang van $L_1, \ldots, L_m$ gelijk aan n.

Stel omgekeerd dat de rang van $L_1, \ldots, L_m$ gelijk is aan n. Stel $\mathbf{p} \in V$. Onder de drager van $\mathbf{p}$ verstaan we de verzameling indices $i \in \{1, \ldots, m\}$ waarvoor geldt $L_i(\mathbf{p}) = b_i$. Notatie $I(\mathbf{p})$. We noteren de rang van $\{L_i,\ i \in I(\mathbf{p})\}$ met $r(\mathbf{p})$. Kies $\mathbf{p} \in V$ zó dat $r(\mathbf{p})$ maximaal is. We tonen aan dat als $r(\mathbf{p}) < n$, we een punt $\mathbf{q} \in V$ kunnen vinden zó dat $r(\mathbf{q}) > r(\mathbf{p})$, in tegenspraak met de maximaliteit van $r(\mathbf{p})$. Conclusie $r(\mathbf{p}) = n$ en op grond van Lemma 6.2.5 is $\mathbf{p}$ een hoekpunt.
Stel $r(\mathbf{p}) < n$. Dan is er een vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ zó dat $L_i(\mathbf{v}) = 0$ voor alle $i \in I(\mathbf{p})$. Door eventueel $\mathbf{v}$ door $-\mathbf{v}$ te vervangen kunnen we er voor zorgen dat minstens één van de getallen $L_i(\mathbf{v})$ positief is. Kies $\mu > 0$ maximaal zó dat $L_i(\mathbf{p} + \mu\mathbf{v}) \leq b_i$ voor alle i. Doordat $L_i(\mathbf{v}) > 0$ voor minstens één i, bestaat dit maximum en het is bovendien positief. Dan is er minstens één index $i \notin I(\mathbf{p})$ zó dat $L_i(\mathbf{p} + \mu\mathbf{v}) = b_i$. Voor het punt $\mathbf{q} = \mathbf{p} + \mu\mathbf{v}$ geldt dus $r(\mathbf{q}) > r(\mathbf{p})$. □

6.3 De simplexmethode

We formuleren het algemene *lineaire programmeringsprobleem*. Zij $M(\mathbf{x})$ een lineaire functie op $\mathbb{R}^n$, dat wil zeggen een functie van de vorm $M(\mathbf{x}) = \mu_0 + \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n$. (Als $\mu_0 = 0$ is het een lineaire vorm en dus een lineaire afbeelding in de zin van de lineaire algebra.) Beslis of M op de oplossingsverzameling V van (54) een maximum aanneemt en zo ja, bepaal dit maximum en minstens één punt van V waar dit maximum wordt aangenomen. We noemen $M(x)$ ook wel de *doelfunctie* . We hebben de volgende stelling.

Stelling 6.3.1 *Zij V oplossingsverzameling van* (54)*. Stel dat V minstens één hoekpunt bevat. Zij $M(\mathbf{x})$ een lineaire functie op $\mathbb{R}^n$. Als M een maximum op V aanneemt, dan wordt dit maximum ook in een hoekpunt van V aangenomen.*

Bewijs. Uit het feit dat V een hoekpunt heeft volgt dat de rang van $L_1, \ldots, L_m$ gelijk is aan n. Zij c het maximum dat M op V aanneemt. De polytoop W die ontstaat door V te snijden met het hypervlak $M(\mathbf{x}) = c$ is niet leeg en heeft dus een hoekpunt, zeg $\mathbf{h}$. We zullen laten zien dat $\mathbf{h}$ tevens een hoekpunt van V is, waarmee het bewijs klaar is. Stel $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ en $\lambda \in (0, 1)$ zó dat $\mathbf{h} = \lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}$. Er geldt,

$$c = M(\mathbf{h}) = \lambda M(\mathbf{x}) + (1 - \lambda)M(\mathbf{y}) \leq \lambda c + (1 - \lambda)c = c$$

Hieruit volgt dat het $\leq$-teken eigenlijk een $=$-teken is. En dus $\lambda M(\mathbf{x}) = \lambda c$ en $(1 - \lambda)M(\mathbf{y}) = (1 - \lambda)c$. Omdat $\lambda \in (0, 1)$ geldt dus $M(\mathbf{x}) = M(\mathbf{y}) = c$. Blijkbaar geldt dat $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$. Omdat $\mathbf{h}$ een hoekpunt van W is, volgt $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{h}$. En dus is $\mathbf{h}$ hoekpunt van V. □

Dat we ons beperken tot het maximalisatie probleem is geen essentiële beperking. De vraag naar een minimum voor M kan bestudeerd worden door het maximum van de tegengestelde functie $-M$ te bestuderen. Stelling 6.3.1 geeft ons in principe een (zeer onpraktische) methode om het maximum van M te bepalen. Bereken namelijk alle hoekpunten van V en bepaal de waarde van M daarin. Kies vervolgens een hoekpunt waarin M zo groot mogelijk is. Hoewel deze methode een resultaat geeft, is hij uiterst onpraktisch omdat we bij het bepalen van de hoekpunten al weer snel in de combinatorische

explosie van de vorige paragraaf terechtkomen. In de praktijk blijkt de simplexmethode een uiterst effectieve methode om dit probleem op te lossen.
De *simplexmethode* geeft in eerste instantie een oplossing voor het vereenvoudigde lineaire programmeringsprobleem: maximaliseer de lineaire functie M onder de condities

$$\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n & = & b_m \\ x_1, \ldots, x_n \geq 0 & & \end{array} \tag{55}$$

Het stelsel (55) staat in de zogenaamde *standaard gedaante*. Afgekort,

$$\begin{cases} A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ x_1, \ldots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

We nemen hierbij aan dat de rang van de $m \times n$-matrix A gelijk is aan m. De rang van het totale stelsel ongelijkheden is n en in het bijzonder geldt dat $m \leq n$.
We zien dat dit stelsel bestaat uit een stel gelijkheden en een stel ongelijkheden dat alleen maar niet-negativiteit van alle variabelen uitdrukt. In het algemeen kunnen we ieder stelsel gelijkheden/ongelijkheden tot deze gedaante terugbrengen door invoer van de zogenaamde '*slack*'-*variabelen*. Een voorbeeld: beschouw het stelsel

$$\begin{array}{rcl} x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 & \leq & 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 & \geq & 0 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 & = & 2 \end{array}$$

Voer de 'slack'-variabelen x_4, x_5 in door,

$$\begin{array}{rcl} x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_5 & = & 0 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 & = & 2 \end{array}$$

Een oplossing van het stelsel (55) noemen we een *aanvaardbaar punt* ('*feasible*' *solution*). Een verzameling indices $B \subset \{1, \ldots, n\}$ met $\#B = m$ noemen we een *basis* als de deelmatrix van A bestaande uit alle kolommen geïndexeerd door B rang m heeft. Bij een basis B bestaat er precies één vector $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ zó dat $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en $x_i = 0$ voor elke $i \notin B$. We noemen dit punt een *basispunt* ('basic solution'). Notatie: $\mathbf{x}_B$. Als bovendien $x_i \geq 0$ voor alle i dan noemen we het basispunt een *aanvaardbaar basispunt* ('basic feasible solution').
Er geldt:

Lemma 6.3.2 *Zij V het polytoop gegeven door* (55)*. Dan zijn de aanvaardbare basispunten precies de hoekpunten van V.*

Dit is een direct gevolg van Lemma 6.2.5.

We geven nu een beschrijving van de simplexmethode. Deze berust op twee observaties. De eerste is dat als we een vergelijking van de vorm $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$ een aantal malen bij een ander optellen, we een equivalent stelsel vergelijkingen krijgen. Evenzo als we een rij met een factor ongelijk aan nul vermenigvuldigen. Kies nu een basis B. Omdat de rang van A gelijk is aan m kunnen we de rijen van A zó combineren dat de deelmatrix van A die ontstaat door de kolommen met index in B te kiezen een éénheidsmatrix wordt. We zeggen dan A is *uitgeschreven ten opzichte van* B. De tweede observatie is dat als we bij de doelfunctie $M(\mathbf{x})$ een willekeurig veelvoud van $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n - b_i$ optellen, de waarde van M in de aanvaardbare punten niet verandert. Als B een basis is, kunnen we bij M een zodanige lineaire combinatie van de $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n - b_i$ optellen, dat de coëfficiënten met indices in B allen nul worden. We zeggen dan dat we M hebben *uitgeschreven ten opzichte van* B.
We geven eerst een algemene beschrijving van de simplexmethode. Allereerst moeten we een basis B hebben waarvan de bijbehorende basisoplossing aanvaardbaar is (d.w.z. een echte oplossing van het stelsel (55)). Vaak is deze keuze voor de hand liggend, vaak ook niet, of zelfs onmogelijk (als de oplossingsverzameling van (55) leeg is). Wat we moeten doen als een basis B niet direct te vinden is staat in de volgende paragraaf beschreven. Stel dat (55) en de doelfunctie uitgeschreven zijn ten opzichte van de basis B. Zij $\mathbf{x}_B$ de basisoplossing. We hebben dan twee mogelijkheden.

1. Alle coëfficiënten van M zijn ≤ 0. De doelfunctie heeft de waarde $M(\mathbf{x}_B)$ als maximum.

2. De doelfunctie (uitgeschreven t.o.v. B) heeft minstens één positieve coëfficiënt. In dat geval kunnen we laten zien dat er een nieuwe basis B' is, met bijbehorende aanvaardbare basisoplossing $\mathbf{x}_{B'}$ zó dat $M(\mathbf{x}_{B'}) > M(\mathbf{x}_B)$. Hoe men van B op B' overstapt vormt de kern van de simplexmethode. In het geval dat het hoekpunt $\mathbf{x}_B$ niet ontaard is, is het heel simpel. We kiezen gewoon een index i zó dat $M_i > 0$ en wisselen deze met een geschikte $j \in B$. In het geval dat $\mathbf{x}_B$ een ontaard hoekpunt is ligt het wat moeilijker en worden in de praktijk diverse oplossingen gegeven.

Laten we een voorbeeld bekijken. Maximaliseer $5x_1 + 4x_2 + 26x_3$ onder de voorwaarden

$$\begin{aligned} x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 &\leq 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 16x_3 &\leq 8. \end{aligned}$$

Invoer van 'slack'-variabelen x_4, x_5, x_6 geeft

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 + x_4 &= 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 &= 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 16x_3 + x_6 &= 8 \\ x_1, \ldots, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

Schematisch kan het probleem als volgt worden weergegeven,

2	3	10	1	0	0	5
4	1	2	0	1	0	11
3	4	16	0	0	1	8
5	4	26	0	0	0	M

De laatste rij (onder de streep) kan gelezen worden als $5x_1+4x_2+26x_3 = M$. We voeren deze kunstgreep uit omdat we ook de doelfunctie in de vorm van een vergelijking willen schrijven. In bovenstaand probleem zien we direct een aanvaardbare basisoplossing, namelijk $x_1, x_2, x_3 = 0$ en $x_4 = 5$, $x_5 = 11$, $x_6 = 8$. Deze hoort bij de basis $\{4, 5, 6\}$. Verder zien we dat zowel de matrix als de doelfunctie in dit schema uitgeschreven staat ten opzichte van de basis $\{4, 5, 6\}$.
Omdat de coëfficiënt van x_1 in M positief is zien we dat M toeneemt als we x_1 laten toenemen. Dus, we laten x_1 toenemen[4] en houden x_2, x_3 op nul. Opdat de gelijkheden geldig blijven moeten we tegelijkertijd de waarden van x_4, x_5, x_6 ook veranderen. Omdat deze laatste variabelen niet negatief mogen worden zijn er beperkingen op de toename van x_1. Uit de eerste vergelijking volgt dat x_1 maximaal $5/2$ mag worden, uit de tweede $x_1 \leq 11/4$ en uit de derde $x_1 \leq 8/3$. Dus $x_1 \leq \min(5/2, 11/4, 8/3) = 5/2$. De variabele die het eerste nul wordt is dus x_4. We kiezen nu de nieuwe basis $\{1, 5, 6\}$ en voeren de volgende pivot-operatie uit. Vermenigvuldig de eerste rij met $1/2$ en veeg vervolgens nullen in de eerste kolom. De pivot (waar je mee veegt) is hier de $(1, 1)$ plek, waar de eerste kolom de eerste rij snijdt. We moeten de eerste kolom hebben omdat het nieuwe basiselement 1 is, en we moeten de eerste rij hebben, omdat daar de $5/2$ vandaan komt; hiermee samenhangend is de eerste rij ook waar in de vierde kolom (horend bij het te vervangen basiselement) een 1 stond. Na het vegen hebben we:

1	3/2	5	1/2	0	0	5/2
0	−5	−18	−2	1	0	1
0	−1/2	1	−3/2	0	1	1/2
0	−7/2	1	−5/2	0	0	$M - 25/2$

Het nieuwe basispunt (t.o.v. $\{1, 5, 6\}$) lezen we af als $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ en $x_1 = 5/2$, $x_5 = 1$, $x_6 = 1/2$. Substitutie van dit punt in de laatste vergelijking geeft $0 = M - 25/2$, m.a.w. $M = 25/2$ in het nieuwe basispunt. We zien dat we M verder kunnen laten toenemen door x_3 vanaf 0 te laten stijgen[5] en x_2, x_4 vast te laten. Er geldt $x_3 \leq \min(1/2, 1/2) = 1/2$. We hebben nu keus, bij $x_3 = 1/2$ worden zowel x_1 als x_6 gelijk aan nul. We kunnen $\{3, 5, 6\}$ of $\{1, 3, 5\}$ als nieuwe basis kiezen. We kiezen[6] voor de laatste. Kies pivot $(3, 3)$ en veeg in de derde kolom,

1	4	0	8	0	−5	0
0	−14	0	−29	1	18	10
0	−1/2	1	−3/2	0	1	1/2
0	−3	0	−1	0	−1	M−13

[4]Hier maken we dus een keuze, we hadden net zo goed x_2 of x_3 kunnen laten toenemen; dit kun je bij wijze van oefening zelf uitvoeren.

[5]Daarentegen hebben we hier *niet* de keuze om alternatief x_2 of x_4 te laten toenemen. Je kunt bij wijze van oefening toch ervoor kiezen om x_2 te laten stijgen (als je x_4 kiest kom je terug bij af).

[6]Wat gebeurd als je voor de nieuwe basis $\{3, 5, 6\}$ kiest? Kun je dit verklaren?

We lezen het nieuwe basispunt $x_2 = x_4 = x_6 = 0$ en $x_1 = 0$, $x_3 = 1/2$, $x_5 = 10$ af. De waarde van M in dit punt is 13. Merk nu op dat alle coëfficiënten van M negatief zijn. Dit betekent dat 13 een optimale waarde is. Als immers x_2, x_4 of x_6 positief zou worden dan wordt M alleen maar kleiner. Dus moeten we deze variabelen op nul houden. Maar dan volgen de waarden van x_1, x_3, x_5 op unieke wijze.

6.4 Het algemene lineaire programmeringsprobleem

We gaan nu over tot de beschrijving van een algoritme dat het algemene lineaire programmeringsprobleem uit het begin van de vorige paragraaf oplost.
Stel we moeten de lineaire functie M maximaliseren onder de condities

$$\begin{aligned} L_i(\mathbf{x}) &\leq b_i \ (i = 1, \ldots, k) \\ L_i(\mathbf{x}) &= b_i \ (i = k+1, \ldots, m) \end{aligned}$$

We nemen aan dat de rang van de L_i gelijk is aan n, het aantal variabelen x_i. Door invoer van 'slack'-variabelen $x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}$ maken we hiervan een stelsel gelijkheden

$$L_i(\mathbf{x}) + x_{n+i} = b_i \ (i = 1, \ldots, k) \tag{56}$$

$$L_i(\mathbf{x}) = b_i \ (i = k+1, \ldots, m) \tag{57}$$

onder de condities $x_{n+1}, \ldots, x_{n+k} \geq 0$. De variabelen $x_1, \ldots, x_n$ zijn niet aan restricties onderhevig. Omdat de rang van de L_i gelijk is aan n kunnen we $x_1, \ldots, x_n$ uit het stelsel (57) elimineren. De overgebleven variabelen moeten wel allen positief zijn, en dus is ons stelsel in de standaard gedaante gebracht. Om de simplexmethode te starten hebben we een toelaatbaar basispunt nodig. In eenvoudige problemen is deze vaak meteen te zien en kunnen we de simplexmethode meteen starten. In lastiger problemen is het vinden van een toelaatbaar basispunt een eerste stap die we de *eerste fase* van de simplexmethode noemen. Hebben we eenmaal zo'n punt gevonden, dan kunnen we het optimaliseringsprobleem oplossen zoals in de vorige paragraaf beschreven (*tweede fase*).
We gaan uit van het stelsel (55) en geven een algoritme om een toelaatbaar basispunt te vinden, indien dit bestaat. Kies allereerst een basis B en herschrijf het stelsel gelijkheden $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (door lineaire combinatie) in zo'n vorm dat de deelmatrix van A behorend bij de gekozen basis de éénheidsmatrix is. De basisoplossing is nu $x_{i_j} = b_j$ (waarbij $j = 1, \ldots, m$), en $x_i = 0$ voor $i \notin B$ (waarbij we B hebben geschreven als $B = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$). Als er negatieve b_i zijn dan is deze oplossing niet toelaatbaar. In dat geval voeren we de nieuwe variabele z in en beschouwen het probleem om z te minimaliseren onder de condities

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n - z = b_i \ (i = 1, \ldots, m) \tag{58}$$

$$x_1, \ldots, x_n, z \geq 0 \tag{59}$$

Stel $b = \min_i b_i$ en stel dat dit minimum wordt aangenomen voor i_0. Eén toelaatbare oplossing van (59) zien we direct, $x_{i_j} = b_j - b \geq 0$ (waarbij $j = 1, \ldots, m$) en dus $x_{i_0} = 0$, $x_i = 0$ voor $i \notin B$ en $z = -b > 0$ (waarbij we B weer hebben geschreven als $B = \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$). Bovendien is dit een basisoplossing van (59) ten aanzien van de basis

die uit B ontstaat door i_0 weg te halen en z toe te voegen. Pas nu de simplexmethode toe om z te minimaliseren. Het is duidelijk dat dit minimum nul is precies dan als (55) een toelaatbare oplossing heeft. Bovendien zullen we na uitvoering van het simplexalgoritme op een toelaatbare basisoplossing van (59) terecht zijn gekomen. Hieruit volgt, indien het minimum nul is, meteen een toelaatbare basisoplossing van (55).
Ter illustratie van de eerste fase geven we een voorbeeld.

Voorbeeld. In de praktijk blijkt dat bij veel problemen de ongelijkheden $x_i \geq 0$ ($i = 1, \ldots, n$) reeds voorkomen, maar dat $(0, \ldots, 0)$ niet tot de oplossingsverzameling behoort. Bijvoorbeeld,

$$\begin{aligned} x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geq 1 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &\leq 1 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &\leq 2 \\ 2x_2 - x_3 &\leq 1 \end{aligned}$$

Gevraagd wordt een hoekpunt van de oplossingsverzameling te vinden, indien deze bestaat. Het is duidelijk dat $(0, 0, 0)$ geen oplossing van dit stelsel is, omdat $x_1+x_2+x_3 \geq 1$ moet gelden. We voeren eerste 'slack'-variabelen x_4, x_5, x_6, x_7 in. We vinden

$$\begin{aligned} x_1, x_2, \ldots, x_7 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_5 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_6 &= 2 \\ 2x_2 - x_3 + x_7 &= 1 \end{aligned}$$

Schematisch,

$$\left(\begin{array}{rrrrrrr|r} -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

We hebben de eerste rij met -1 vermenigvuldigd om een identiteits-deelmatrix te krijgen. Merk op dat de basis $\{4, 5, 6, 7\}$ geen toelaatbare oplossing geeft. We voeren daarom de nieuwe variabelen x_8 in en bekijken het probleem om $-x_8$ te maximaliseren,

$$\left(\begin{array}{rrrrrrrr|r} -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -z \end{array}\right)$$

Als basis kiezen we $\{5, 6, 7, 8\}$. Eerst schrijven we de doelfunctie uit t.o.v. deze basis en vegen naar een identiteitsdeelmatrix ten aanzien van deze basis door een pivot-operatie op de laatste kolom en eerste rij,

$$\left(\begin{array}{rrrrrrrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z+1 \end{array}\right)$$

Laat nu x_3 toenemen (alternatieve keuzes zijn x_1 en x_2). De derde (en ook de vierde) vergelijking leiden niet tot beperkingen; vanwege de eerste en tweede vergelijking is $x_3 \leq \min\{1, \frac{2}{4}\} = \frac{1}{2}$ en daarom voeren we pivot uit op derde kolom en tweede rij,

$$\begin{array}{rrrrrrrr|r}
1 & 5/4 & 0 & -3/4 & -1/4 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\
0 & -1/4 & 1 & -1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\
4 & -1/4 & 0 & -5/4 & 1/4 & 1 & 0 & 0 & 7/2 \\
1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
\hline
1 & 5/4 & 0 & -3/4 & -1/4 & 0 & 0 & 0 & -z + 1/2
\end{array}$$

Neem als nieuwe basis $\{3, 6, 7, 8\}$. Laat nu x_1 toenemen (nog steeds is x_2 een alternatief). De beperkingen zijn $x_1 \leq \min\{\frac{1}{2}, \infty, \frac{7}{8}, 2\} = \frac{1}{2}$, voer dus pivot uit op eerste kolom en eerste rij,

$$\begin{array}{rrrrrrrr|r}
1 & 5/4 & 0 & -3/4 & -1/4 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\
0 & -1/4 & 1 & -1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\
0 & -21/4 & 0 & 7/4 & 5/4 & 1 & 0 & -4 & 3/2 \\
0 & 7/4 & 0 & -1/4 & 1/4 & 0 & 1 & -1 & 3/2 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -z
\end{array}$$

Alle coëfficiënten van de doelfunctie zijn nu ≤ 0 en dus heeft $-z$ in het basispunt

$$x_1 = 1/2, \;\; x_2 = 0, \;\; x_3 = 1/2, \;\; x_4 = 0, \;\; x_5 = 0, \;\; x_6 = 3/2, \;\; x_7 = 3/2, \;\; x_8 = z = 0$$

een maximale waarde die gelijk blijkt te zijn aan 0 (zie schema). Daarom is het punt met coördinaten

$$x_1 = 1/2, \;\; x_2 = 0, \;\; x_3 = 1/2, \;\; x_4 = 0, \;\; x_5 = 0, \;\; x_6 = 3/2, \;\; x_7 = 3/2$$

een toelaatbaar basispunt voor (55).

6.5 Oefeningen

1. Bepaal de hoekpunten van de polyeders gegeven door de volgende stelsels ongelijkheden

   (a)
   $$\begin{array}{rcl} x_1, x_2 & \geq & 0 \\ x_1 - 3x_2 + a & \geq & 0 \\ -2x_1 + x_2 + b & \geq & 0. \end{array}$$
   Maak de opgave voor verschillende waarden van a, b met $a, b \geq 0$. Maak telkens een schets van de polyeders.

   (b)
   $$\begin{array}{rcl} x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 & \geq & 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 & \geq & 0 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Los de volgende drie problemen op met de simplexmethode.

2. Maximaliseer $3x_1 + 2x_2 + 4x_3$ onder condities
   $$\begin{array}{rcl} x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq & 4 \\ 2x_1 + 3x_3 & \leq & 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 & \leq & 7. \end{array}$$

3. Maximaliseer $5x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 8x_4$ onder de condities

$$\begin{aligned} x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &\leq 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &\leq 3 \end{aligned}$$

4. Maximaliseer $2x_1 + x_2$ onder de condities

$$\begin{aligned} x_1, x_2 &\geq 0 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 3 \\ x_1 + 5x_2 &\leq 1 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 4 \\ 4x_1 + x_2 &\leq 5 \end{aligned}$$

Los de volgende drie lineaire programmeringsproblemen met de hand op (Ontleend aan W.T. van Horssen en A.H.P. van der Burgh, *Inleiding Matrixrekening en Lineaire Optimalisering*, Epsilon uitgaven, Utrecht.)

5. Een timmerfabriek heeft een machine die per dag hoogstens 1000 tijdseenheden in gebruik is. De machine kan grote en kleine kozijnen maken. Het produceren van een klein kozijn kost één tijdseenheid, dat van een groot kozijn twee tijdseenheden. Van het hout dat dagelijks wordt aangevoerd kunnen maximaal 700 kleine en 400 grote kozijnen gemaakt worden. De totale dagproductie is maximaal 800 kozijnen. De winst bij verkoop van een groot en van een klein kozijn bedraagt resp. €400,− en €300,−. Hoeveel grote en kleine kozijnen moet men binnen de gestelde beperkingen produceren om een zo groot mogelijke winst te halen?

6. Op een terrein van 28000 m^2 wil men binnen 24 maanden een aantal wooncomplexen en een aantal voorzieningeneenheden bouwen. De wooncomplexen en de voorzieningeneenheden hebben de volgende eigenschappen,

	grond-oppervlak in m^2	bouwtijd in maanden	kosten per stuk in miljoenen
wooncomplex type I	1000	2	7
wooncomplex type II	1000	3/2	6
voorzieningeneenheid	2000	1	5

   Onder de eventuele toekomstige bewoners is een enquête gehouden. Het blijkt dat de waardering zich verhoudt als 3 (type I) staat tot 5 (type II) staat tot 4 (voorzieningeneenheid). Het terrein hoeft niet helemaal volgebouwd te worden. Men heeft 180 miljoen Euro beschikbaar voor de bebouwing van het terrein. Men wil nu de waardering van de toekomstige bewoners maximaliseren.

7. Een boer woont in een gebied dat herverkaveld moet worden. Hij bezit 110 ha land waarop hij akkerbouw, veeteelt (weidegrond) en tuinbouw bedrijft. Na herverkaveling dienen de oppervlakten ten behoeve van akkers, weide en tuinbouw te voldoen aan de volgende voorwaarden.

(a) de oppervlakte akkers moet ten minste 20 ha groter zijn dan de oppervlakte weide plus tweemaal de oppervlakte tuingrond;

(b) de oppervlakte akkers plus tweemaal de oppervlakte weide mag niet groter zijn dan 50 plus twee maal de oppervlakte tuingrond.

De kosten van herinrichting van de akker-, weide- en tuingrond worden geschat op €2000,−, €3000,−, respectievelijk €8000,− per ha. De boer wil weten hoeveel hectare hij voor elk der bestemmingen zal aanvragen, zó dat de totale hoeveelheid grond gelijk blijft, terwijl de herindelingskosten minimaal zijn.

Het volgende probleem is ontleend aan Chvatal, *Introduction to linear programming*, ...

8. Een elektronica producent moet binnen vier weken 20000 radio's leveren. De klant is bereid $20 te betalen voor elke radio geleverd voor het eind van de eerste week, $18 voor elke radio voor het eind van de tweede week, $16 aan het einde van de derde week en $14 voor de laatste week. Omdat een productiemedewerker hooguit 50 radio's per week kan assembleren, komt de fabrikant arbeidskracht te kort met de huidige 40 medewerkers. Dus moeten er tijdelijke krachten opgeleid en ingeschakeld worden. Een ervaren productiemedewerker kan van de productielijn worden gehaald en ingezet als instructeur voor drie stagiaires. Na een week kan een stagiaire worden ingezet in het productieproces of als instructeur.

   Momenteel zijn er geen andere orders, dus sommige medewerkers kunnen niets te doen hebben als de opdracht is voltooid. Ze moeten echter allemaal, zowel vast als tijdelijk, tot het einde van de vierde week betaald worden. Het weekloon voor een medewerker, of die nu produceert, opleidt, of niets doet, bedraagt $200, het weekloon van een stagiaire bedraagt $100. De productiekosten, afgezien van arbeidsloon, zijn $5 per radio.

   Als voorbeeld zou de fabrikant de volgende strategie kunnen hanteren.

   Eerste week:

   10 werkers, 30 instructeurs, 90 stagiaires

   productieloon: $8000

   stagiaireloon: $9000

   winst op 500 radio's: $7500

   netto verlies: $9500

   Tweede week:

   120 werkers, 10 instructeurs, 30 stagiaires

   productieloon: $26000

   stagiaireloon: $3000

   winst op 6000 radio's: $78000

   netto winst: $49000

   Derde week:

   160 werkers

   productieloon: $32000

   winst op 8000 radio's: $88000

   netto winst: $56000

   Vierde week:

   110 werkers, 50 zonder werk

   productieloon: $32000

   winst op 5500 radio's: $49500

   netto winst: $17500

   Deze strategie levert een netto winst van $113000. Het doel van de fabrikant is om maximale winst te halen. Formuleer het probleem als een lineaire programmeringsprobleem en los het op met `Mathematica`.

9. Een schoenmaakster vervaardigt schoenen (op maat) van zulke kwaliteit dat zij zich om de verkoop geen zorgen hoeft te maken, in tegendeel, zij kan zelf haar klanten kiezen. Enigszins beperkt wordt zij door de $45\,m^2$ (kwaliteits)leer die zij jaarlijks geleverd krijgt, en bovendien wil zij niet meer dan 8 uur per dag werken. Een computergestuurde speciaalmachine die zij tot haar beschikking heeft kan zij 10 uur per dag laten lopen. Voor deze opgave rekenen we het jaar met 200 werkdagen.

   Om een damesschoen te maken is zij 4 uur bezig en heeft daar bovenop nog 4 uur machinetijd nodig. Hieraan verbruikt zij $0.06\,m^2$ leer en haar (netto)winst is €75. Voor een herenschoen is zij 2 uur bezig met bovenop 5 uur machinetijd, verbruikt zij $0.15\,m^2$ leer en maakt €150 winst.

   (a) Stel de ongelijkheden op die de productie van de schoenmaakster beperken. Geef ook de doelfunctie die de winst beschrijft.

   (b) De schoenmaakster staat hier voor een optimaliseringsprobleem. Hoeveel van elk soort moet zij gemiddeld per jaar verkopen als zij haar winst wil maximaliseren? (Als zij een schoen niet af krijgt, gaat ze er de volgende dag mee verder.)

10. Een fabrikant wil een nieuwe notenmelange op de markt brengen. De belangrijkste ingrediënten zijn amandelen, rozijnen en hazelnoten. Amandelen bevatten voor 5 % vet en voor 40 % suiker, rozijnen bestaan gemakshalve voor 100 % uit suiker en hazelnoten bevatten voor 40 % vet en voor 20 % suiker. Het marketingdepartement heeft een aantal voorwaarden samengesteld. Het vetgehalte moet tussen 7 % en 10 % liggen. Het suikeraandeel moet minstens 50 % zijn. De melange moet voor minstens 20 % uit amandelen bestaan. Het aandeel hazelnoten mag niet hoger zijn dan het aandeel amandelen.

    De prijzen van de ingrediënten zijn (per kilogram) €5 voor amandelen, €2 voor rozijnen en €7 voor hazelnoten. Hoe duur zal de notenmelange (per kilogram) minstens zijn, kosten voor productie en marketing buiten beschouwing gelaten?

Los de volgende lineaire programmeringsproblemen op, enerzijds met de simplexmethode in twee fasen, anderzijds door in $\mathbb{R}^2$ een tekening te maken van het gebied gegeven door de ongelijkheden (grafische methode). Dit zijn 'lastige' problemen: een feasible punt is niet gemakkelijk aan te wijzen, en hoeft zelfs niet te bestaan, of het gebied is onbegrensd en het maximum hoeft niet te bestaan, ... (pathalogische voorbeelden? In de praktijk zit je nogal eens met een soortgelijke situatie).

11. Maximaliseer $3x_1 + x_2$ onder de voorwaarden

$$\begin{aligned} x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_1 - x_2 &\leq -1 \\ -x_1 - x_2 &\leq -3 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 4 \end{aligned}$$

12. Maximaliseer $3x_1 + x_2$ onder de voorwaarden

$$\begin{array}{rcl} x_1, x_2 & \geq & 0 \\ x_1 - x_2 & \leq & -1 \\ -x_1 - x_2 & \leq & -3 \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 2 \end{array}$$

13. Maximaliseer $3x_1 + x_2$ onder de voorwaarden

$$\begin{array}{rcl} x_1, x_2 & \geq & 0 \\ x_1 - x_2 & \leq & -1 \\ -x_1 - x_2 & \leq & -3 \\ 2x_1 - x_2 & \leq & 2 \end{array}$$

14. Maximaliseer $3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4$ onder de voorwaarden

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 & \leq & 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 & \leq & -2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 & \leq & 3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 & \leq & -3 \\ x_3, x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Oefen voor de volgende opgaven eerst op een kleiner probleem

15. We beschouwen het schematische hoogspanningsnet uit onderstaande figuur.

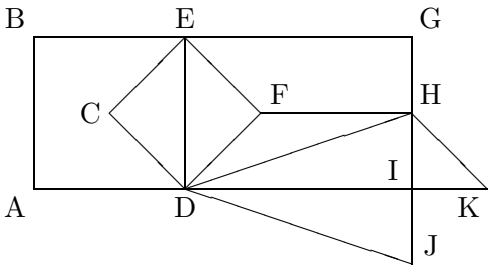
    Hierin zijn A t/m K transformator-stations, waar de hoogspanning omgezet wordt in laagspanning voor de gebruikers. Bij een aantal van deze knooppunten (A, C, F, G, I en K) staat ook een centrale. De capaciteit van de verbindingen is gegeven in het aantal hoogspanningslijnen. Elke hoogspanningslijn heeft een capaciteit van 500 MW.

    De kosten van de productie van één MWh elektriciteit in een centrale van 2 GW zijn €210 en in een centrale van 3 GW is dat €200. Verder moet er rekening gehouden worden met het verlies gedurende het vervoer over de hoogspanningskabels. Dit verlies kost €200 per GWh per kilometer. De onderhoudskosten van het netwerk zijn €200.000 per kilometer kabel per jaar. De onderhoudskosten van een centrale van 2 GW zijn 100 miljoen Euro per jaar en voor een centrale van 3 GW is dat 120 miljoen per jaar.

    Hoe worden de beschikbare middelen optimaal gebruikt om de behoeften te dekken?

    De gezamenlijke elektriciteitsmaatschappijen willen gaan kijken of het hoogspanningsnet niet efficiënter gebruikt kan worden. Ze denken hierbij aan investeringen voor:

    - het weghalen van hoogspanningslijnen (kosten €500.000 per kilometer);
    - het installeren van extra hoogspanningslijnen op een bestaand traject (kosten 1 miljoen Euro per kilometer);



	capaciteit	behoefte
A	3000 MW	3500 MW
B		700 MW
C	2000 MW	500 MW
D		1500 MW
E		2500 MW
F	2000 MW	500 MW
G	3000 MW	1000 MW
H		1000 MW
I	3000 MW	1200 MW
J		1000 MW
K	3000 MW	1300 MW

			afstand	capaciteit
A	-	B	75 km	5
A	-	D	225 km	4
B	-	E	200 km	4
C	-	D	100 km	4
C	-	E	75 km	4
D	-	E	150 km	3
D	-	F	50 km	3
D	-	H	250 km	2
D	-	I	300 km	2
D	-	J	175 km	1
E	-	F	125 km	4
E	-	G	200 km	3
F	-	H	225 km	2
G	-	H	250 km	3
H	-	I	150 km	3
H	-	K	100 km	3
I	-	J	200 km	4
I	-	K	100 km	5

- het weghalen van een centrale (kosten 10 miljoen Euro);
- het ombouwen van een 2 GW centrale naar 3 GW (kosten 150 miljoen Euro);
- het ombouwen van een 3 GW centrale naar 2 GW (kosten 100 miljoen Euro);
- het bouwen van een nieuwe 2 GW centrale (kosten 800 miljoen Euro);
- het bouwen van een nieuwe 3 GW centrale (kosten 900 miljoen Euro);
- het bouwen van een (nieuwe) kerncentrale van 4 GW (kosten 2 miljard, onderhoud 200 miljoen per jaar, productiekosten €175 voor één MWh).

De eis van de elektriciteitsmaatschappijen is dat investeringen zichzelf binnen 3 jaar terugverdienen.

Schrijf een advies aan de elektriciteitsmaatschappijen waarin je (zo mogelijk) één of meer voorstellen tot investeringen doet die aan bovenstaande eisen voldoen. Geef bij elk van je voorstellen een duidelijk kostenplaatje met alle voors en tegens. Vergeet ook niet een vergelijking met de huidige situatie.

16. Ngujini is een dorp van het Ujamaa-volk in Tanzania. Het ligt in het Pare bergdistrict in de buurt van de Kilimanjaro. Het dorp bestaat uit 250 gezinnen. De belangrijkste vorm van levensonderhoud is de landbouw en houtsnijwerk. Dit houtsnijwerk, versierde houten maskers, is veel gevraagd in de omgeving. Ze brengen meestal 50 shilling per stuk op, wat goed betaald is voor vier dagen werk.

De gewassen die door de Ujamaa geteeld worden zijn: koffie, maïs, bananen, bonen, cassaves en aardappels. De dorpelingen doen het werk gezamenlijk. Er is 2500 hectare landbouwgrond aanwezig en al de gewassen doen het goed op deze grond. Dit in tegenstelling tot de grond van de dorpen in de buurt, waar geen koffieplanten willen groeien.

Tot nu toe verbouwden de dorpelingen al hun benodigde voedsel zelf en ze verkochten de koffie en het houtsnijwerk. Onlangs is aan het dorpscomité echter de suggestie gedaan dat het misschien voordeliger is om bijvoorbeeld meer koffie te telen en (een deel van) het benodigde voedsel bij de buren te kopen.

De gemiddelde grootte van een gezin is acht personen, waarvan er vijf meewerken. De verschillende gewassen vergen over het jaar een verschillende hoeveelheid werk. De gemiddelde hoeveelheid werk (in werkdagen per hectare) in een maand staat voor de verschillende gewassen in de eerste tabel. In de tweede tabel staan verder per gewas de gemiddelde consumptie (per persoon per week), de gemiddelde opbrengst (per jaar per hectare) en de gemiddelde in- en verkoopprijs (in shilling).

maand	koffie	maïs	bananen	bonen	cassaves	aardappels
januari	40 wieden	40 wieden	0	40 wieden	0	40 wieden
februari	50 snoeien	40 wieden	1 oogsten	10 oogsten	0	0
maart	2 sproeien	0	0	20 zaaien	40 wieden	0
april	0	6 oogsten	1 oogsten	40 wieden	0	0
mei	50 snoeien	0	0	10 oogsten	0	10 oogsten
juni	40 wieden	0	1 oogsten	0	0	10 oogsten
juli	2 sproeien	0	0	0	0	0
augustus	0	0	46 oogsten snoeien wieden	0	40 wieden	0
september	0	0	0	0	0	50 ploegen
oktober	40 oogsten	0	1 oogsten	0	12 oogsten	20 planten
november	40 oogsten	50 ploegen	0	50 ploegen	50 ploegen	0
december	40 oogsten	10 zaaien	1 oogsten	20 zaaien	10 planten	0

gewas	eenheid	consumptie	opbrengst	inkoopprijs	verkoopprijs
koffie	kilogram	0.000	800	12,00	7,50
maïs	kilogram	0.750	1200	2,00	1,00
bananen	tros	0.250	600	2,50	1,00
bonen	kilogram	0.375	1000	5,50	2,50
cassaves	kilogram	0.500	4000	1,00	0,45
aardappels	kilogram	0.500	4500	0,75	0,35

Opdracht: Geef een advies aan het dorpscomité waarin staat hoeveel van elk soort gewas ze moeten telen, kopen en verkopen om een optimale winst te krijgen. In dit advies moeten minstens de volgende dingen aan de orde komen:

- Het voordeel ten opzichte van de huidige situatie.
- Eventuele aannames die je gemaakt hebt.
- Wat er moet gebeuren als de koffiemarkt inzakt (bijv. de prijs halveert)?
- Wat er moet gebeuren als, door toerisme, de vraag naar maskers toeneemt (bijv. de prijs verdubbelt)?

7 Matrixspellen

7.1 Een voorbeeld

De fundamenten voor de *speltheorie* werden gelegd door J. von Neumann rond 1928. Deze theorie beoogt een modellering te geven voor conflictsituaties of situaties waarin meerdere personen met elkaar concurreren. Het resultaat van een dergelijke modellering zou een optimale strategie moeten zijn om het conflict of de concurrentie op een zo voordelig mogelijke wijze aan te gaan. Het eenvoudigste voorbeeld van een situatie waarin we inderdaad een modellering kunnen geven is dat van de *matrixspellen*. We zullen ons hiertoe beperken. Na de ontdekking van lineaire programmering bleek heel snel dat matrixspellen met behulp van de simplexmethode aangepakt kunnen worden. Om dit in te zien behandelen we eerst een voorbeeld ontleend aan *"The Compleat Strategyst"* van J.D. Williams.

De kampeerders. Een echtpaar, genaamd Xander en Yvonne, kampeert elk jaar in een bepaald gebied in de bergen. Xander kampeert het liefst op plaatsen met zo groot mogelijke hoogte, Yvonne houdt het liever op de lagere plekken. Het gebied waar ze kamperen wordt doorsneden door een viertal noord-zuid paden en een viertal oost-west paden. De kampeerders kamperen op één van de 16 kruisingen. Om ieder een gelijke stem te geven mag Xander het oost-west pad kiezen en Yvonne het noord-zuid pad. De hoogten van de diverse kruisingen staan in het volgende schema weergegeven,

7	2	5	1
2	2	3	4
5	3	4	4
3	2	1	6

De oost-west paden noemen we van boven naar onder Xander1 tot en met Xander4. De noord-zuid paden geven we van links naar rechts aan met Yvonne1 tot en met Yvonne4. Hoewel Xander1 het voordeel van een hoge piek heeft kan deze keuze voor Xander slecht aflopen als Yvonne besluit Yvonne4 te kiezen. Er van uitgaand dat Yvonne geen domme keuze zal maken is Xander gedwongen de hoge pieken te laten wat ze zijn en in plaats daarvan te zoeken naar mogelijkheden die hem niet al te laag zullen brengen. In dit opzicht lijkt Xander3 de beste keuze, Xander weet dat hij niet lager dan 3 zal komen. Voor Yvonne heeft het geen zin lang stil te blijven staan bij de allerlaagste dalletjes en het beste voor haar is uit te kijken naar een pad dat een zo klein mogelijke maximale hoogte heeft. Dit is Yvonne2 met als maximale hoogte 3. Dit is dezelfde hoogte die Xander als minimum had. Dit is een toevallige omstandigheid, die wordt veroorzaakt door het optreden van een zogenaamd *zadelpunt* in de matrix. Een matrix met matrixelementen a_{ij} heeft een zadelpunt als geldt dat

$$\min_j \max_i (a_{ij}) = \max_i \min_j (a_{ij}).$$

Als één van de spelers een andere keuze doet kan dit alleen maar slechter voor hem of haar uitpakken. Doen beide spelers een andere keuze dan zijn de gevolgen niet te voorspellen, maar één van de twee zal slechter uit zijn dan met de optimale 3. In dit geval is het duidelijk wat de spelers te doen staat.

Wat gebeurt er als onze matrix geen zadelpunt zou hebben. We veranderen onze matrix op één punt,

7	2	5	1
2	2	3	4
5	3	4	4
3	6	1	6

Als Yvonne en Xander dezelfde overwegingen als te voren kiezen, dan komt Yvonne uit op maximale hoogte 5 bij Yvonne3 en Xander op minimale hoogte 3 bij Xander3. Men krijgt de indruk dat er voor beide spelers enige winst hierop te behalen valt. Neem bijvoorbeeld Yvonne. Door elk jaar Yvonne3 te kiezen loopt ze de kans dat Xander dit doorkrijgt waardoor ze elk jaar op de nare hoogte 5 terecht komt. In antwoord hierop zou Yvonne de keuze Yvonne3 ook met Yvonne2 kunnen afwisselen. Stel dat ze Yvonne2 of Yvonne3 kiest, elk met kans 1/2. Haar verwachting van de hoogte waarop ze terecht komt is bij Xander1, 2, 3 respectievelijk 4 gelijk aan 7/2, 5/2, 7/2 resp. 7/2. In het ongustigste geval is haar gemiddelde verwachting 7/2, hetgeen altijd nog beter is dan elk jaar op hoogte 5 te zitten. Yvonne heeft hierbij een *gemengde strategie* gevolgd, in tegenstelling tot de *zuivere stategie* (=één keus met kans 1) uit de voorgaande situatie. Op dezelfde manier kan Xander zijn vooruitzichten verbeteren door het volgen van een gemengde strategie. Kiest hij zijn wegen met kansen 5/14, 0, 5/14, 4/14 dan zijn Xander's verwachtte hoogten 72/14, 49/14, 53/14, 49/14 als Yvonne pad 1, 2, 3 resp. 4 kiest. Het minimum hiervan is 49/14 = 7/2, iets gunstiger dan elk jaar op 3 zitten. Merk nu op dat Yvonne's verwachting en die van Xander beide op 7/2 liggen. Ditmaal is dat geen toeval(!) maar een gevolg van de *minimax stelling* van J. von Neumann (zie Stelling 7.2.1).

7.2 Theorie

We beschrijven nu een matrixspel in het algemeen. Er zijn twee spelers die we weer Xander en Yvonne zullen noemen. Bij het spel dat ze spelen heeft Xander m mogelijke zetten en Yvonne heeft er n. Als Xander zet i speelt en Yvonne zet j dan verdient Xander een bedrag a_{ij}. Dit kan een geldbedrag zijn dat Yvonne moet uitbetalen (als a_{ij} positief is) of het bereiken van een kampeerplaats op zekere hoogte zoals in het voorbeeld. In elk geval moet Yvonne trachten Xander's opbrengst zo klein mogelijk te maken. Op zijn beurt streeft Xander naar een zo groot mogelijke winst. Stel

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Merk op dat Xander rijen kiest van A terwijl Yvonne kolommen kiest. Stel dat Xander speelt volgens de gemengde strategie $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)^{\mathrm{T}}$ waarin $x_i \geq 0$ voor alle i en $\sum_i x_i = 1$. Zijn minimale winstverwachting bij deze strategie is

$$\min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{y}$$

waarin het minimum wordt genomen over alle gemengde strategieën van Yvonne, dat wil zeggen alle vectoren $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}}$ met $y_j \geq 0$ voor alle j en $\sum_j y_j = 1$. Xander is uit op een maximale winstverwachting en deze is gelijk aan

$$\max_{\mathbf{x}} \min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{y}.$$

Bekijken we nu de situatie vanuit Yvonne's standpunt. De maximale winst die Xander kan verwachten bij Yvonne's strategie $\mathbf{y}$ is gelijk aan

$$\max_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{y}.$$

Yvonne wil graag dit maximum zoveel mogelijk drukken. Het beste wat ze in dit streven kan bereiken is

$$\min_{\mathbf{y}} \max_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{y}.$$

Nu volgt een opmerkelijk resultaat van J.von Neumann (1928),

Stelling 7.2.1 (Minimax stelling) *Zij A een $m \times n$ matrix zoals boven gegeven. Dan geldt, met bovenstaande notaties,*

$$\max_{\mathbf{x}} \min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{y} = \min_{\mathbf{y}} \max_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{y}.$$

waarin de maxima en minima genomen worden over alle kansvectoren $\mathbf{x}$ en $\mathbf{y}$ met lengten m respektievelijk n.

Er is blijkbaar een uniek getal dat voor beide spelers als het best haalbare geldt. Dit getal noemen we de *waarde* van het spel. Een verdere observatie is dat een gemengde strategie van een speler, mits deze optimaal is, aan de tegenstander bekend mag zijn zonder dat dit de vooruitzichten van de speler benadeelt.
We laten nu het verband zien met lineaire programmeringsproblemen. Allereerst een opmerking. Er geldt namelijk dat

$$\min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{y} = \min_{j} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i.$$

Met andere woorden, onder de beste strategieën van Yvonne tegenover Xander's $\mathbf{x}$ bevindt zich altijd een pure strategie. Voor het bewijs hiervan noteren we met $\mathbf{e}_j$ de vector met lengte n, overal nullen, behalve op de j^e plaats waar een 1 staat. De vectoren $\mathbf{e}_j$ staan dus voor de pure strategieën van Yvonne. Er geldt

$$\min_{j} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i = \min_{j} \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{e}_j.$$

Omdat de pure strategieën een deelverzamelingvormen van alle strategieën, geldt

$$\min_{j} \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{e}_j \geq \min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A \mathbf{y}.$$

Anderzijds geldt

$$\begin{aligned}\min_{\mathbf{y}} \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{y} &= \min_{\mathbf{y}} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{e}_k\, y_k \\ &\geq (\min_j \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{e}_j) \min_{\mathbf{y}} \left(\sum_k y_k \right) = \min_j \mathbf{x}^{\mathrm{T}} A\mathbf{e}_j.\end{aligned}$$

Uit beide ongelijkheden volgt de gelijkheid.
Zoals we nu hebben gezien zit Xander met het volgende probleem: maximaliseer

$$\min_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i$$

onder de condities

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \qquad x_i \geq 0 \qquad (i = 1,\ 2, \ldots, m).$$

De belangrijke observatie is dat dit kan worden geherformuleerd als een lineair programmeringsprobleem: maximaliseer z onder de condities

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i &\geq z \qquad (j = 1,\ 2, \ldots, n) \\ \sum_{i=1}^{m} x_i &= 1, \quad x_i \geq 0 \qquad (i = 1,\ 2, \ldots, m).\end{aligned}$$

In het geval van het kampeerdersprobleem vinden we het stelsel ongelijkheden

$$\begin{aligned} x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ -(7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4) + z &\leq 0 \\ -(2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4) + z &\leq 0 \\ -(5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4) + z &\leq 0 \\ -(x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4) + z &\leq 0 \end{aligned}$$

Stel $z = x_9$ en voer de 'slack'-variabelen x_5, x_6, x_7, x_8 in. Het stelsel ongelijkheden gaat dan over in het volgende stelsel gelijkheden,

1	1	1	1	0	0	0	0	0	1
-7	-2	-5	-3	1	0	0	0	1	0
-2	-2	-3	-6	0	1	0	0	1	0
-5	-3	-4	-1	0	0	1	0	1	0
-1	-4	-4	-6	0	0	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

en de ongelijkheden $x_1, \ldots, x_8 \geq 0$. Merk op dat er geen restricties op $z = x_9$ zijn. We elimineren dus eerst z uit ons stelsel door een pivot op de vierde rij en laatste kolom.

1	1	1	1	0	0	0	0	0	1
-2	1	-1	-2	1	0	-1	0	0	0
3	1	1	-5	0	1	-1	0	0	0
-5	-3	-4	-1	0	0	1	0	1	0
4	-1	0	-5	0	0	-1	1	0	0
5	3	4	1	0	0	-1	0	0	0

Laat nu de vierde vergelijking en de variabele z weg,

1	1	1	1	0	0	0	0	1
-2	1	-1	-2	1	0	-1	0	0
3	1	1	-5	0	1	-1	0	0
4	-1	0	-5	0	0	-1	1	0
5	3	4	1	0	0	-1	0	0

Kies als basis $\{4, 5, 6, 8\}$. De bijbehorende basisoplosing luidt, $x_1 = x_2 = x_3 = x_7 = 0$ en $x_4 = 1$, $x_5 = 2$, $x_6 = 5$, $x_8 = 5$. Na een pivot operatie op eerste rij vierde kolom staat er

1	1	1	1	0	0	0	0	1
0	3	1	0	1	0	-1	0	2
8	6	6	0	0	1	-1	0	5
9	4	5	0	0	0	-1	1	5
4	2	3	0	0	0	-1	0	-1

Laat nu x_1 stijgen. Voer een pivot uit op de eerste kolom en vierde rij,

0	5/9	4/9	1	0	0	1/9	$-1/9$	4/9
0	3	1	0	1	0	-1	0	2
0	22/9	14/9	0	0	1	$-1/9$	$-8/9$	5/9
1	4/9	5/9	0	0	0	$-1/9$	1/9	5/9
0	2/9	7/9	0	0	0	$-5/9$	$-4/9$	$-29/9$

Laat nu x_3 stijgen. Voer een pivot uit op de derde kolom en derde rij,

0	$-1/7$	0	1	0	$-2/7$	1/7	1/7	2/7
0	10/7	0	0	1	$-9/14$	$-13/14$	4/7	2
0	11/7	1	0	0	9/14	$-1/14$	$-4/7$	5/14
1	3/7	0	0	0	$-5/14$	$-1/14$	3/7	5/14
0	-1	0	0	0	$-1/2$	$-1/2$	0	$-7/2$

We zien dat het maximum van z gelijk is aan $7/2$ en dat dit maximum wordt aangenomen in $x_1 = 5/14$, $x_2 = 0$, $x_3 = 5/14$, $x_4 = 2/7$. Een aardig detailpunt is dat dit niet het enige punt is waar z een maximum heeft. Dit is te zien aan het feit dat in het laatste schema de coëfficiënt van x_8 in de doelfunctie nul is. Door x_8 te variëren vinden we ook andere punten waarin $z = 7/2$.

7.3 Oefeningen

1. Twee spelers, A en B, verbergen elk een dubbeltje of een stuiver. Als beide spelers dezelfde munt verstoppen, krijgt A beide munten; indien niet, dan krijgt B beide munten. Wat zijn de optimale strategieën? Is dit een eerlijk spel? Wat kun je zeggen wanneer de waarde van de munten x resp. y bedragen?

2. U en uw tegenstander kiezen elk een geheel getal tussen 1 en 1000 (inclusief 1, 1000). Als uw getal x kleiner is dan het getal y van uw tegenstander, dan wint u, tenzij $x = y - 1$, in welk geval u verliest. Als x groter is dan y, dan verliest u, behalve wanneer $x = y + 1$, in welk geval u wint. Bij $x = y$ is het gelijk spel. Wat is uw beste strategie?

3. Xander en Yvonne bepalen gemeenschappelijk een pyramide, en wel als volgt. Xander bepaalt de grootte van de pyramide en Yvonne mag de kleur kiezen. Afhankelijk van de zo verkregen pyramide betaalt Yvonne vervolgens een bedrag aan Xander, de waarden zijn: €6 voor de grote rode pyramide, €2 voor de kleine rode pyramide, €1 voor de grote gele pyramide, €5 voor de kleine gele pyramide, €3 voor de grote blauwe pyramide en €4 voor de kleine blauwe pyramide.

   (a) Formuleer dit als een matrixspel met een 2×3 matrix A.

   (b) Bepaal de waarde van het spel door een optimale strategie van Yvonne te berekenen. Herformuleer hiervoor haar minimalizeringsprobleem als een lineair programmeringsplobleem.

   (c) Bepaal een optimale strategie van Xander.

4. **Morra.** We onderzoeken het volgende spel. Twee spelers steken elk, op hetzelfde moment, één of twee vingers op en raden tevens het aantal opgestoken vingers van de tegenstander. Als een speler het aantal van de tegenstander heeft geraden, en de tegenstander is hier niet in geslaagd, dan krijgt genoemde speler evenveel Euros van zijn tegenstander als het genoemde aantal. Stel een opbrengstmatrix op voor dit spel. Zijn er zadelpunten? Formuleer dit probleem als lineaire programmeringsprobleem en bepaal de optimale (gemengde) strategie voor beide spelers met `simplex`. Als je nog tijd over hebt, doe dan hetzelfde voor het spel waarbij één, twee of drie vingers kunnen worden opgestoken.

5. Stel dat de uitbetalingsmatrix A een $m \times m$ anti-symmetrische matrix is, d.w.z., $A^{\mathrm{T}} = -A$.

   (a) Bewijs dat de waarde van het bijbehorend matrixspel gelijk is aan 0.

   (b) Bewijs dat de optimale gemengde rij-strategie $\mathbf{x}$ ook een optimale gemengde kolom-strategie $\mathbf{y}$ is en visa verse.

6. **Colonel Blotto's problem.** (ontleend aan J.D.Williams, *The compleat Strategyst*). The Task Force Commander, who had feared he would not make contact with the Reds, now feared he had too much contact; for his companies at both advance points had become fully engaged, within a 10-minute interval.

When he planned this operation, G-2 had estimated the enemy at 600 men, whereas his own Intelligence now fixed the number at 1000 (probably 5 companies). So his two batallions of riflemen (6 companies) appeared to have an edge of about a company, instead of the comfortable factor two he had planned on. His orders were to 'destroy the maximum number of enemy, at the least cost to your Command'. The General Staff observer, a colonel who had attached himself for the duration of the mission, had been quietly amused when the Commander read this impossible directive to his batallion and company commanders, which served to confirm the Commander's view on visiting General Staff personnel.

His Baker and Dog companies were engaged at some distances to the northeast and to the northwest, respectively, of his main body. The remaining four companies were at hand and could be used in support of either point. As he waited for his batallion commanders to join him, he wondered what the General Staff man - now scratching his back against the tree - would do if the responsibility were his. He would probably look less relaxed, by God.

'And how does it look to you, Colonel? Remind you of anything out of the Second Punic War?'

'Curiously enough, it does remind me of something - something more remote than the Second Punic. Ever heard of Game Theory?'

'The term is not even hauntingly familiar'

'I spent some time one summer with people - by the way, you familiar with the Zombie? - well, among other things, there was a lot of talk about this Game Theory, a mathematical business supposed to have some bearing on warfare. One of the illustrations was one called Colonel Blotto's Problem - you'll pardon me; fairly typical of their irreverent attitude, I'm afraid; very undisciplined crowd. Anyway, the curious thing is that Blotto was faced with much the same situation.'

'What did the Theory suggest he do? Negotiate?'

'Worse than that. They say - remember, this isn't *my* idea - they say you should keep your eyes on that ant - no, the one on your map case. When it reaches a grease spot, look at the second hand on your watch. If it points to 6 seconds or less , you should divide your force equally between the threatened points. If it reads between 6 and 30 seconds, give the entire reserve to Dana; if between 30 and 54 seconds, give it to Harry; if between 54 and 60 seconds, pick out a new ant'.

'Now isn't that a hell of a thing? ... Well, let's go'.

De analyse gaat als volgt. Er zijn 6 Blauwe en 5 Rode compagnies. Ze zijn op twee plekken met elkaar in slag, op compagnie-sterkte. Blauw kan zijn compagnies verdelen in de verhoudingen 5:1, 4:2, 3:3, 2:4, 1:5 en Rood in 4:1, 3:2, 2:3, 1:4. We nemen aan dat gelijke sterkten op een plek gelijk eindigen, en dat de tegenstander door een meerderheid op een plek wordt weggevaagd. De opbrengst voor Blauw is het aantal verslagen vijandelijke compagnies verminderd met het eventueel aantal verloren compagnies. Dus als Blauw met de verdeling 4:2 vecht tegen Rood met de verdeling 2:3, dan wint Blauw op de eerste plek 2 maar verliest 2 op de andere

plek. De ‘winst’ van Blauw is dus 0. Deze manier van tellen lijkt in redelijke overeenstemming met de sfeer van het probleem, en is niet in tegenspraak met de orders voor Blauw, die trouwens zinloos zijn. Stel de opbrengstmatrix op voor Blauw en bepaal de optimale gemengde strategie voor Blauw. Vergelijk dit met de boven gegeven oplossing.

8 Simulated Annealing

Simulated annealing (ook wel 'stochastisch koelen' geheten) is een algemene flexibele methode om bij benadering te optimaliseren. Men gebruikt de methode vooral als het te moeilijk is om exact te optimaliseren.
We geven twee voorbeelden: Het *handelsreizigersprobleem* en het *Grootschalige integratieprobleem*.

8.1 Het handelsreizigersprobleem

Een handelsreiziger moet met zijn waar een aantal steden langs. Zeg steden S_1 tot en met S_n. Hij woont zelf in S_1 en daar wil hij dan ook beginnen en eindigen. Hij is in het bezit van een afstanden-tabel waarin voor ieder tweetal steden de lengte L_{ij} van de kortste weg van S_i naar S_j staat. Er geldt $L_{ij} = L_{ji}$. Hij wil nu weten in welke volgorde hij de steden het beste kan bezoeken. (Hij wil niet teveel kilometers rijden.) Hij zoekt dus naar een permutatie π van $1, \ldots, n$ zo dat de totale lengte van de route, dat is dus $L_{\pi(n),\pi(1)} + \sum_{i=1}^{n} L_{\pi(i),\pi(i+1)}$, minimaal is. Zeg hij moet dertig steden langs, dus $n = 30$. (Hij logeert onderweg in hotels.) Er zijn helaas wel $30! = 265252859812191058636308480000000$ permutaties van de getallen 1 tot en met 30. Men kan nog wel aannemen dat $\pi(1) = 1$, maar dan nog zijn er veel teveel mogelijkheden. De handelsreiziger krijgt dan ook van een deskundige te horen dat, als het een beetje tegen zit, hij het wel vergeten kan: Dit probleem staat bekend als '*NP compleet*', en dat houdt in dat men zeer beroemd kan worden door te vertellen hoe je het minimum vindt. De handelsreiziger zal zich tevreden moeten stellen met een niet al te lange route voor zijn rondreis. Dus niet het echte minimum, maar gewoon een route die niet al te stom is. Simulated annealing kan daarbij helpen.

8.2 Het grootschalige integratieprobleem

Een fabrikant van *integrated circuits* wil een nieuwe chip ontwerpen. Er moeten flink wat onderdelen op. Ze zijn niet allemaal even groot, maar ze hebben wel een eenvoudige vorm (rechthoeken). Hij weet hoe groot de chip wordt. Hij hoopt wel dat de onderdelen er op passen. Hij wil weten waar hij ze moet plaatsen. Simulated annealing kan daarbij helpen.
Literatuur: E.H.L. Aarts & C.L. Liu, *"Simulated Annealing and Circuit Layout"*, Nieuw Archief voor Wiskunde, Vierde Serie, Deel 9, Maart 1991, 13–39.

8.3 Een analogie

Onafhankelijk van elkaar merkten Cerny en het team Kirkpatrick, Gelatt & Vechi op dat de natuur al een oplossing heeft voor het vinden van redelijke benaderingen van een minimum. Zoals een smid kan vertellen, maakt het voor het eindresultaat veel uit of je een witgloeiend stuk metaal snel afkoelt of juist heel langzaam. (Dat laatste heet temperen, in het Engels *to anneal*.) In de statistische mechanica legt men dit verschil als volgt uit: Bij afkoelen zoekt het systeem een toestand van lagere energie. Gebeurt dit met grote haast dan blijft het systeem in een lokaal minimum van energie hangen, waar

het niet meer uit komt. Bij temperen daarentegen krijgt het systeem de kans om zijn weg naar beneden te vinden. Men vergelijke dit met het verschil tussen een bergwandelaar die valt en een die lopend het dal zoekt. De eerste zal ergens in een kuil belanden, maar vast niet beneden in het grote dal waar het eten wacht. De lopende toerist zal af en toe omhoog gaan, maar voornamelijk naar beneden. Als hij niet oplet belandt hij in het verkeerde dal en komt dus toch niet zo laag als hij zou willen, maar wel een stuk lager dan de ander. De methode "kijk niet rond, maar ga recht naar beneden tot je in de bodem van een kuil zit" heet *greedy* (hebberig). Simulated annealing probeert beter te doen dan dat, door temperen na te bootsen.
Voor dat nabootsen moet men dus dingen bedenken die als analogon kunnen dienen voor "de energie van een toestand" en "temperatuur". We werken dit uit voor het handelsreizigersprobleem. De handelsreiziger wilde de totale lengte van de rondreis minimaliseren, dus dat nemen we als definitie van energie. Dus een *toestand* definiëren we als te zijn een permutatie π van $\{1, \ldots, n\}$ en de *energie* van die toestand is $L_{\pi(n),\pi(1)} + \sum_{i=1}^{n} L_{\pi(i),\pi(i+1)}$. Dit lag voor de hand, want we willen 'streven naar lage energie' laten corresponderen met 'streven naar korte rondweg'. Maar nu de temperatuur. Wat de statistische mechanica zegt, is dat als T de temperatuur is, in graden Kelvin, dus vanaf het absolute nulpunt gemeten, dat dan de waarschijnlijkheid dat het metaal zich in toestand nummer i bevindt evenredig is aan

$$e^{\frac{-E_i}{kT}}$$

(Boltzmann-verdeling.) Hierbij is k de zogenaamde constante van Boltzmann, en E_i de energie van toestand nummer i. De constante van Boltzmann hangt af van de meeteenheden, dus we mogen die wel gelijk aan 1 denken. De energie hadden we al bedacht, en de *temperatuur* is nu domweg een positief getal T dat we kunnen kiezen.
Het verband tussen temperatuur en de waarschijnlijkheid van een toestand willen we nu in overeenstemming brengen met bovenstaande formule van Boltzmann. Daartoe ontwerpen we een Markovketen. De toestanden van de Markovketen zijn de reeds afgesproken toestanden. Dus een toestand is een rondreis die door een permutatie π beschreven wordt. Laten we zeggen dat een rondreis uit n wegen bestaat, waarbij een 'weg' tussen twee opeenvolgende steden loopt. (Opeenvolgend in de bij π behorende volgorde.) Als mogelijke overgang in de Markovketen nemen we de vervanging van een rondreis door een andere die er maar liefst $n-2$ wegen mee gemeen heeft. (Twee rondreizen die $n-1$ wegen gemeen hebben zijn het zelfde, dus we nemen overgangen tussen rondreizen die nog net van elkaar verschillen.) We noemen een toestand buur van een andere als er een mogelijke overgang tussen de twee is, dus als ze $n-2$ wegen gemeenschappelijk hebben. Dat zullen ook buren worden in de graaf die bij de Markovketen hoort. Zij b het aantal buren van een toestand i. (Het is voor alle toestanden het zelfde, dus we hoeven geen b_i te schrijven. Dat maakt de formules wat eenvoudiger en de analogie overtuigender. Zie *loc. cit.*—Aarts en Liu dus—voor algemenere formules.)
De overgangswaarschijnlijkheid nemen we nu als volgt: De waarschijnlijkheid p_{ij} van de mogelijke overgang van toestand j naar zijn buurtoestand i stellen we op

$$p_{ij} = \begin{cases} e^{(E_j - E_i)/T}/b & \text{als } E_j < E_i, \\ 1/b & \text{anders.} \end{cases}$$

Om er een echte Markovketen van te maken voegen we nog de overgang van een toestand naar zichzelf toe met de waarschijnlijkheid

$$p_{ii} = 1 - \sum_{j \neq i} p_{ji}.$$

Terzijde: Merk op dat dit een reusachtig Markovketen is: i loopt over alle $n!$ toestanden. Het is dus ondoenlijk om de hele matrix (p_{ij}) uit te schrijven of om de hele bijbehorende graaf te tekenen. Maar gelukkig is dat ook nergens voor nodig. Men rekent p_{ij} pas uit als men in toestand j zit en heeft geloot om de overgang naar i te beschouwen. Als dan $E_j < E_i$, dan neemt men de stap met kans $e^{(E_j - E_i)/T}$ (de factor $1/b$ zit al in het loten.) En voor het berekenen van $E_j - E_i$ hoeft men ook alleen maar te kijken naar het verschil tussen de beide toestanden. Merk op dat je p_{ii} nooit uit hoeft te rekenen. Die hoort gewoon bij het geval dat je de gelote stap niet uitvoert.
Wat we voor elkaar gekregen hebben is dat de stationaire toestand van de Markovketen inderdaad aan de wet van Boltzmann voldoet. Dit blijkt uit de relatie

$$p_{ij} e^{-E_j/T} = p_{ji} e^{-E_i/T}$$

en het volgende lemma.

Lemma 8.3.1 *Zij P een a-periodieke $m \times m$ kansmatrix van een Markovketen en q een kansvector van lengte m (d.w.z. $0 \leq q_i \leq 1$ en $\sum_i q_i = 1$) zo dat $p_{ij} q_j = p_{ji} q_i$ voor alle i, j. Dan is q een eigenvector bij eigenwaarde een. Stel nu dat deze eigenwaarde multipliciteit één heeft, en dus dominant is. Dan beschrijft q dus de kansverdeling op lange termijn.*

Het bewijs laten we aan de lezer over.

8.4 Het algoritme

Hoe gaat het nu verder? We implementeren de analogie als volgt. Kies eerst een hoge temperatuur. Hoger dan de "energie-verschillen" die je van een overgang verwacht. Dus zeg flink groter dan de maximale afstand tussen de steden. Laat nu bij die temperatuur de Markovketen een flink aantal stappen doen. De uitkomst is dan een toestand die aan een kansverdeling voldoet die in de buurt ligt van de Boltzmann-verdeling die bij die hoge temperatuur hoort. En omdat T hoog is zijn alle toestanden ongeveer even waarschijnlijk. Dus op deze manier hebben we zomaar een toestand verkregen. We hadden net zo goed kunnen loten. Maar goed.
Neem die uitkomst nu als startpunt van een nieuwe Markovketen, die hoort bij een iets lagere temperatuur. Laat nu bij die temperatuur de Markovketen een flink aantal stappen doen. De uitkomst is dan een toestand die aan een kansverdeling voldoet die in de buurt ligt van de Boltzmann-verdeling die bij die nieuwe temperatuur hoort.
Neem die uitkomst nu als startpunt van een nieuwe Markovketen, die hoort bij een iets lagere temperatuur. Laat nu bij die temperatuur de Markovketen een flink aantal stappen doen. De uitkomst is dan een toestand die aan een kansverdeling voldoet die in de buurt ligt van de Boltzmann-verdeling die bij die nieuwe temperatuur hoort.

Enzovoort, tot de temperatuur flink laag is. Wat je dan hebt is een kansverdeling met een sterke voorkeur voor toestanden met lage energie, en dat is precies wat we willen. Waarom beginnen we dan niet meteen met lage temperatuur? Dat is omdat bij lage temperatuur het veel meer stappen vergt voor de kansverdeling om in de buurt van de stationaire verdeling te komen. De aanloop met de Markovketens van hogere temperatuur dient om de verdeling zo vast in de buurt te brengen van de juiste verdeling. Inderdaad liggen de stationaire verdelingen voor naburige temperaturen dicht bij elkaar, zoals men aan de Boltzmann formule ziet. Zoals men in de statistische mechanica zegt: We blijven liefst in de buurt van thermisch evenwicht. (Thermisch evenwicht is een naam voor de stationaire toestand.) Zoals ook uit de analogie met de bergwandelaar duidelijk is moet men niet te 'greedy' zijn. Blijft natuurlijk de vraag hoe langzaam je moet koelen of hoe vaak je bij vaste temperatuur de Markovketen moet herhalen. (Dat komt op het zelfde neer.)
Statistische analyse is hierover gauw te pessimistisch omdat het moeilijk is goed te verwerken hoe gemakkelijk men in het energie-landschap rondwandelt. Het is belangrijk dat het geheel inderdaad wat weg heeft van een gewoon berglandschap waarin lage plekken zich bevinden te midden van veel tamelijk lage plekken. Maar zo'n kwaliteit is lastig te quantificeren. In de praktijk koelt men dan ook gauw wat sneller af dan theoretisch verantwoord lijkt. Anders duurt het ook gewoon te lang. Wel neemt de kwaliteit van het antwoord af als er te snel wordt gekoeld. Gewoon experimenteren dus. Interactief kunnen heel aardige resultaten worden bereikt.

8.5 Het geval van grootschalige integratie

De implementatie volgt het zelfde stramien. We beslissen eerst per onderdeel welke eindig vele mogelijke plaatsingen op de chip we zullen beschouwen. Als toestand voor de Markovketens nemen we dan een keuze van een plaatsing voor elk van de onderdelen en als energie de mate waarin onderdelen elkaar daarbij overlappen, of buiten de chip uitsteken. (Overlappen of uitsteken zijn natuurlijk ongewenst; de ideale toestand hoort bij plaatsing zonder overlap of uitsteken, en dat is dan het geval van energie nul.) Als toegestane overgang nemen we weer een minimale verandering. Dus dit keer wordt bij een toegestane overgang één onderdeel verplaatst. Verdere details laten zich hopelijk raden.

8.6 Oefeningen

1. Bewijs Lemma 8.3.1.

2. Zij P een $m \times m$ kansmatrix van een Markovketen en q een kansvector van lengte m (d.w.z. $0 < q_i \leq 1$ en $\sum_i q_i = 1$) zo dat $P_{ij}q_j = P_{ji}q_i$ voor alle i, j. Dan is P geconjugeerd aan een symmetrische matrix en zijn dus alle eigenwaarden reëel.

3. Een Hamiltonpad in een (ongerichte) graaf g is een rondweg die over de bogen van de graaf loopt en die elke knoop precies een keer aan doet. Er zijn goede algoritmen om naar Hamiltonpaden te zoeken, maar het kan ook met simulated annealing geprobeerd worden. Daartoe neemt men als steden de punten (knopen)

van de graaf en definieert men de volgende afstand tussen twee knopen. Als de twee steden door een boog verbonden zijn is de afstand 0 en anders 1. Duidelijk is dat een rondweg van lengte nul het zelfde is als een Hamiltonpad. Probeer in een aantal grafen een Hamiltonpad te vinden met behulp van `hamiltonpad`. Zoek ook goede koeltrajecten. In `petersen` en `tutte` vind je voorbeelden van grafen zonder Hamiltonpad, die toch 'zeer samenhangend' zijn.

4. Soms is het duidelijk wanneer de handelsreiziger een kortste rondweg heeft gevonden. Probeer bijvoorbeeld eens
```
figure(1);stdn=lattice(3,3);
figure(2);tsp(stdn,afstanden(stdn),0.02,0.99);
```
Waarom is het bij
```
figure(1);stdn=lattice(6,6);
figure(2);tsp(stdn,afstanden(stdn),0.02,0.99);
```
anders?

5. Onderzoek het verschil in gedrag tussen `greedy` en `tsp` aan de hand van enige voorbeelden. (Gebruik bijvoorbeeld `stdn=maaksteden;` of `stdn=rand(30,2);` of `stdn=showsteden(tutte);` om voorbeelden te genereren.)

6. Probeer goede koeltrajecten te vinden bij enige pakkingsproblemen. Bijvoorbeeld vindt men met
```
m=[13,12;ones(26,1)*[2,3]];vlsi(m,.34,0.999);
```
na lang wachten soms een perfecte pakking van zesentwintig 'dozen' van twee bij drie in een ruimte van dertien bij twaalf, wat best een indrukwekkende prestatie is. (Bij pech onderbreken en opnieuw opwarmen.) Wie minder geduld heeft kan beter kleinere gevallen proberen.

9 Wachtrijen

9.1 Inleiding

Het begin van de wachttijdtheorie wordt gemarkeerd door de publicatie *The theory of probabilities and telephone conversation* uit 1909 van A. K. Erlang. Deze wiskundige in dienst van de Deense telefoon maatschappij was geïnteresseerd in de berekening van het aantal lijnen dat nodig was om binnenkomende gesprekken af te handelen zonder dat er onacceptabel lange wachttijden ontstaan. Tot in de jaren '40 bleef de wachttijdtheorie beperkt tot gebruik in de telefonie, maar later volgden ook vele andere toepassingen. Dit is geen wonder want er zijn legio situaties waarin men in een rij moet wachten op een service die geleverd wordt. Bekende voorbeelden zijn de rijen in winkels, bankinstellingen, geldautomaten, tolovergangen of de wachtkamer van de dokter. In de wat minder persoonlijke sfeer kunnen we denken aan vliegtuigen die wachten op toestemming tot landing, het lossen van schepen, de KPN-inlichtingen dienst (er zijn nog 'enkele' wachtenden voor u) en multi-user computers.

Om te begrijpen waarom wachttijdtheorie niet eenvoudig is kijken we naar het model van één wachtrij en één bedieningseenheid. Een geldautomaat met de bekende rijen erachter is hier een voorbeeld van. Stel dat er elke τ_{in} minuten precies één klant arriveert en stel dat de bedieningstijd precies τ_{uit} minuten is. Als $\tau_{\text{in}} < \tau_{\text{uit}}$ dan hebben we een probleem, we kunnen een rij verwachten die steeds langer wordt. Bij situaties waarin de verwerkingscapaciteit van de service kleiner is dan het klantenaanbod krijgen we automatisch steeds langer wordende rijen. Voor dit soort evidente situaties hebben we uiteraard geen theorie nodig, de verwerkingscapaciteit moet eenvoudigweg verhoogd worden. Als echter $\tau_{\text{in}} \geq \tau_{\text{uit}}$ dan zien we dat elke klant die aankomt meteen kan worden afgehandeld. "Wat is dus het probleem?", kan men zich afvragen. Punt is dat de werkelijkheid anders is, de klanten arriveren *gemiddeld* om de τ_{in} minuten. Het kan dus gebeuren dat gedurende korte perioden klanten met een veel hogere frequentie arriveren. Als deze frequentie de verwerkingscapaciteit overtreft ontstaat er een rij wachtenden. Een zelfde opmerking geldt voor de bedieningstijd τ_{uit}, ook dit is vaak een gemiddelde. Sommige klanten vergen immers meer tijd dan anderen, en bij bewerkelijke klanten kennen we allemaal het verschijnsel dat de rij erachter steeds groter wordt. Een belangrijke vraag waar de wachtrijtheorie zich mee bezighoudt is hoe lang bij gegeven τ_{in} en τ_{uit} de rij wachtenden kan worden.

Behalve het één rij-één bedieningseenheid model zijn er nog een groot aantal andere wachtrijmodellen. We noemen er twee van, het één rij-meerdere bedieningseenheden model en het meer rijen-evenveel bedieningseenheden model. Bij het eerste kunnen we denken aan een winkel met meerdere verkopers achter de toonbank. Door regels van beleefdheid of het trekken van nummertjes wordt ervoor gezorgd dat klanten in volgorde van aankomst worden geholpen. Ander voorbeeld is een Amerikaanse bank waarin mensen achter een streep in een rij moeten wachten tot ze door één van de loketbedienden geroepen worden. De rijen achter de loketten in een Nederlands postkantoor of achter de kassa's in een supermarkt zijn een voorbeeld van het meer rijen- evenveel bedieningseenheden model.

Binnen deze modellen kunnen we nog een grote variatie van regels en klantengedrag on-

derscheiden. Een onschuldig voorbeeld hiervan is het 'rij-hoppen'. We kennen allemaal het gevoel dat we bij een postkantoor de verkeerde rij hebben gekozen. Soms is het lonend om dan gauw naar een andere rij over te springen. Dit effect kan in een model worden meegenomen. Een gedrag waar serieus rekening mee moet worden gehouden is dat klanten kunnen afhaken. Bij lange rijen zal het snel gebeuren dat klanten niet meer aansluiten maar hun heil elders zoeken. Om dit klantenverlies te voorkomen moet een winkel ervoor zorgen dat er meer bediening komt. Echter, te veel bediening is weer kostbaar en het is zaak voor het management hier een middenweg tussen te vinden. Een variant die ook nog wel eens voorkomt is dat sommige klanten een hogere prioriteit hebben dan anderen. Ze krijgen voorrang boven andere klanten. Voorbeeld is de eerste hulp post in een ziekenhuis. Een patiënt met een acute hartaanval zal een veel hogere prioriteit hebben dan iemand met een verzwikte voet. In ons model moeten we dus rekening houden met verschillende typen klanten.
Deze grote variatie aan mogelijkheden maakt dat het uitwerken van een model best wel een lastige zaak kan worden. Voor een relatief klein aantal modellen is een volledige oplossing bekend. Omdat zelfs deze bekende oplossingen niet voor iedereen toegankelijk zijn, maakt men heel veel gebruik van computersimulaties om het gedrag van de wachtrij te bestuderen. Dit is voor ons een uitstekende gelegenheid om computeropdrachten te maken.

9.2 Poissonprocessen

Een veel gebruikt principe bij de opstelling van modellen voor aankomst van klanten of levering van services is de aanname dat kansen op gebeurtenissen homogeen in de tijd zijn. Stel we hebben een systeem waarin een bepaalde gebeurtenis om de zoveel tijd kan plaatsvinden. Praktische voorbeelden zijn winkels met als gebeurtenis de aankomst van een klant, een populatie met als gebeurtenis dat een individu sterft of een radioactief preparaat met als gebeurtenis dat een atoom vervalt. In veel gevallen vinden dergelijke gebeurtenissen op volkomen willekeurige tijdstippen plaats. In dat soort gevallen lijkt de volgende aanname heel redelijk,

Poissonproces. De kans $p_1(\Delta t)$ dat er in een tijdsinterval Δt precies één gebeurtenis plaatsvindt is gelijk aan $\nu\Delta t + o(\Delta t)$, waarin ν een zekere positieve constante is. De kans $p_0(\Delta t)$ dat er geen gebeurtenis in een tijdsinterval Δt plaatsvindt is $p_0(\Delta t) = 1 - \nu\Delta t + o(\Delta t)$.

Merk op dat bovenstaande aanname impliceert dat de kans op twee of meer gebeurtenissen gelijk is aan $o(\Delta t)$. Een systeem met gebeurtenissen die volgens bovenstaande aanname verdeeld zijn noemt men een *Poissonproces*. De parameter ν zullen we de *karakteristieke frequentie* noemen. Voor Poissonprocessen hebben we een tweetal uitspraken die we regelmatig zullen gebruiken.

Stelling 9.2.1 *Beschouw een Poissonproces met karakteristieke frequentie ν. Dan is de kans $p_k(t)$ dat er in een tijdsinterval t precies k gebeurtenissen plaatsvinden gelijk aan*

$$p_k(t) = \frac{(\nu t)^k e^{-\nu t}}{k!}.$$

Bewijs. Kies $\Delta t > 0$. We drukken $p_k(t + \Delta t)$ uit in de $p_i(t)$ en $p_j(\Delta t)$. De kans dat in $[0, t + \Delta t]$ precies k gebeurtenissen plaatsvinden is gelijk aan de som over $i = 0, \ldots k$ van de kansen dat in $[0, t]$ precies $k - i$ gebeurtenissen plaatsvinden en in $[t, t + \Delta t]$ precies i gebeurtenissen. Echter, de kans dat in $[t, t + \Delta t]$ twee of meer gebeurtenissen plaatsvinden is $o(\Delta t)$. Als $i > 1$ dragen deze gebeurtenissen dus alleen aan de $o(\Delta t)$ term bij. We vinden,

$$p_k(t + \Delta t) = p_k(t)p_0(\Delta t) + p_{k-1}(t)p_1(\Delta t) + o(\Delta t).$$

Uit onze aannamen volgt dat $p_1(\Delta t) = \nu\Delta t + o(\Delta t)$, $p_0(\Delta t) = 1 - \nu\Delta t + o(\Delta t)$. Dus

$$p_k(t + \Delta t) = p_k(t) + \nu(p_{k-1}(t) - p_k(t))\Delta t + o(\Delta t).$$

Aannemende dat $p_{-1}(t) = 0$ gaat dit resultaat ook voor $k = 0$ op. Breng $p_k(t)$ naar links, deel door Δt en laat $\Delta t \to 0$.

$$p_k'(t) = \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{p_k(t + \Delta t) - p_k(t)}{\Delta t} = \nu(p_{k-1}(t) - p_k(t)).$$

Strikt genomen hebben we alleen de existentie van de rechtsafgeleide van p_k aangetoond. We kunnen een analoge beschouwing ook voor negatieve Δt uitvoeren en zo de differentieerbaarheid van p_k aantonen (doe dit!). Merk op dat $p_k' + \nu p_k = \nu p_{k-1}$. In het geval $k = 0$ vinden we $p_0' + \nu p_0 = 0$ en dus $p_0(t) = p_0 e^{-\nu t}$ voor zekere constante p_0. Vermenigvuldig $p_k' + \nu p_k = \nu p_{k-1}$ aan beide zijden met $e^{\nu t}$. We vinden

$$(e^{\nu t} p_k)' = \nu e^{\nu t} p_{k-1}.$$

Omdat $p_k(0) = 0$ als $k \geq 1$ volgt hieruit dat

$$e^{\nu t} p_k(t) = \nu \int_0^t e^{\nu t} p_{k-1}(t) dt$$

voor $k > 0$. Door inductie naar k en $p_0(t) = p_0 e^{-\nu t}$ zien we gemakkelijk dat

$$e^{\nu t} p_k(t) = \frac{(\nu t)^k}{k!} p_0.$$

De som over alle kansen $p_k(t)$ moet 1 zijn. Dit geeft

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = p_0 e^{-\nu t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu t)^k}{k!} = p_0.$$

Conclusie, $p_0 = 1$ en ons resultaat is bewezen. □

Om een interpretatie te krijgen van de constante ν berekenen we het verwachtte aantal gebeurtenissen dat in een tijdsinterval t plaatsvindt. Het is duidelijk dat deze verwachting gelijk is aan $\sum_{k=0}^{\infty} k p_k(t)$. Volgens voorgaande stelling is dit gelijk aan $\sum_{k=0}^{\infty} k(\nu t)^k e^{-\nu t}/k! = \nu t e^{-\nu t} \sum_{k=1}^{\infty} (\nu t)^{k-1}/(k-1)! = \nu t$. De interpretatie van ν is nu duidelijk, het is het verwachtte aantal gebeurtenissen per tijdseenheid. De grootheid $\tau = 1/\nu$ zullen we de *karakteristieke tijd* van het Poissonproces noemen. Het is de gemiddelde tijdsduur tussen twee gebeurtenissen. Een direct gevolg van de stelling is de volgende stelling.

Stelling 9.2.2 *Beschouw een Poissonproces met karakteristieke frequentie ν. Dan is de kans dat in een tijdsinterval ter lengte t een gebeurtenis plaatsvindt gelijk aan $1 - e^{-\nu t}$.*

Bewijs. De gevraagde kans is gelijk aan $1 - p_0(t)$ waarin $p_0(t)$, de kans dat er geen gebeurtenis plaatsvindt, in de vorige stelling is uitgerekend. □

9.3 Aankomst van klanten, serviceverlening

Het simpelste model van aankomst van klanten is de *deterministische* aankomst. Dat wil zeggen, om de t minuten komt er een klant binnen. Een redelijk voorbeeld is het afsprakensysteem bij de dokter. In veel andere gevallen is de aankomst van klanten helemaal niet deterministisch. Voor deze situaties moeten we gebruik maken van kansmodellen. Hierin onderscheiden we twee soorten, de *empirische* modellen en de *theoretische* modellen. Bij een empirisch model bestudeert men de aankomst van klanten over een langere tijd en aannemende dat deze gegevens ook in de toekomst juist zijn, gebruikt men ze bij de planning van toekomstige services. Bij theoretische modellen gebruikt men vaak een Poissonproces. In het bijzonder geldt dan dat de kans op aankomst van k klanten in een tijdsinterval t gelijk is aan $(\lambda t)^k e^{-\lambda t}/k!$. Hierin is λ het gemiddelde aantal klanten dat per tijdseenheid arriveert.

Modellering van de tijd die een service-eenheid erover doet om een klant af te handelen is lastiger dan die voor de aankomst van klanten en vaak is men aangewezen op een empirisch model voor de afhandelingstijd. De lengte van de afhandelingstijd bevat weliswaar elementen uit de kansrekening, maar is ook sterk afhankelijk van het *klantgedrag*. Dit kunnen we goed zien bij de tijdmelding door de telefoondienst. Er is sprake van slechts één service, maar de tijdsduur ervan ligt niet duidelijk vast. De opbeller kan net op het moment binnenkomen dat het laatste deel van een melding wordt uitgesproken. Hij of zij moet dus even wachten op de volgende melding en heeft uiteraard een langere tijd nodig dan iemand die net voor een melding binnenkomt. Hiervoor zou eventueel een theoretisch model uit de kansrekening kunnen worden opgesteld. Helaas wordt dit weer verstoord door het klantgedrag. Er zijn mensen die voor de zekerheid de tijd graag vaker willen horen en dus twee of meer mededelingen aan de lijn blijven. Om hoeveel mensen het hier gaat is alleen maar proefondervindelijk te bepalen. Ook in gevallen waar meer services worden aangeboden is het klantgedrag sterk verantwoordelijk voor de verdeling van servicetijden. Een postkantoor in Nederland kent vele vormen van service, en elke service heeft een redelijk bepaalde afhandelingstijd. Helaas is het percentage mensen dat alleen postzegels wil een grootheid die nauwelijks te modelleren valt. Ook in dit geval is men aangewezen op een empirisch model voor de serviceverlening.

Het meest gebruikte theoretische model voor serviceverlening is dat van een Poissonproces waarin per tijdseenheid gemiddeld μ klanten worden afgehandeld. De kans dat in een tijdsinterval t een klant wordt afgehandeld is dan $1 - e^{-\mu t}$.

Zoals eerder gezegd moeten we het gebruik van deze verdeling in praktische situaties altijd zeer kritisch bekijken.

9.4 Een model met deterministische service

Als eerste bekijken we een model voor een één rij-één bedieningseenheid waarvan de service begint en eindigt op een rij welbepaalde tijdstippen $t_0, t_1, t_2, \ldots$ Voor de eenvoud kiezen we $t_n = n\tau$ voor zekere servicetijd τ. We kijken op deze tijdstippen naar het aantal klanten dat zich in het systeem bevindt. Omdat één klant geholpen wordt is de lengte van de rij wachtenden normaal gesproken één minder. Het aantal klanten in het systeem zullen we kortweg het *aantal klanten* noemen. Het aantal klanten dat nog niet bediend wordt noemen we de *lengte van de wachtrij*. Zij $p_k(n)$ de kans dat op tijdstip t_n er k klanten aanwezig zijn. Zij q_m de kans dat er in het tijdvak τ precies m klanten arriveren. We kunnen hiervoor de Poissonverdeling nemen, maar voorlopig doen we dit nog niet en bekijken de algemene situatie. We merken nu op dat we te maken hebben met een Markovketen met oneindig veel toestanden, namelijk de mogelijke aantallen klanten in het systeem. Stel we hebben l klanten op tijdstip t_n. In het volgende tijdvak gaat er één klant af door de geleverde service (d.w.z., als $l > 0$) en komen er m klanten bij met een kans q_m. Voor de matrixelementen van de Markovketen impliceert dit dat $M_{l+m-1,l} = q_m$ als $l > 0$ en $M_{m,0} = q_m$. We vinden

$$\begin{pmatrix} p_0(n+1) \\ p_1(n+1) \\ p_2(n+1) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 & q_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ q_1 & q_1 & q_0 & 0 & 0 & \ldots \\ q_2 & q_2 & q_1 & q_0 & 0 & \ldots \\ \vdots & & & & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(n) \\ p_1(n) \\ p_2(n) \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

We hebben al eerder Markovketen met eindig veel toestanden gezien en bewezen dat de kansverdeling naar een stationaire toestand convergeert als we irreducibiliteit en a-periodiciteit hebben. We moeten echter oppassen met generalisatie met oneindig veel toestanden. Als bijvoorbeeld alle p_i positief zijn zien we gemakkelijk dat de Markovketen irreducibel en a-periodiek is. Er hoeft echter geen convergentie naar een stationaire toestand op te treden. Denk aan een voorbeeld waarin per bedieningstijd gemiddeld meer dan één klant binnenkomt. De wachtrij wordt steeds langer en is dus niet stabiel. De precieze voorwaarden waaronder convergentie naar een stationaire toestand optreedt zijn lastig te beschrijven. Het vinden van de stationaire oplossingen zelf is in dit geval ook nog een subtiele bezigheid. We zullen daarom van verdere analyse afzien.

9.5 Een model met probabilistische service

Ter voorbereiding van wat grotere modellen beschouwen we het probleem van één machine en één onderhoudsmonteur. In een fabriek draait een machine in principe 24 uur per dag. Er is één monteur aanwezig om eventuele problemen te verhelpen. Op den duur blijkt dat een draaiende machine gemiddeld na één uur een storing heeft. Een monteur doet gemiddeld 15 minuten over een reparatie. Aannemende dat het optreden van storingen en reparaties plaatsvinden volgens een Poissonproces, hoeveel tijd staat de machine gemiddeld stil? Je zou kunnen denken dat dit 25% van de tijd is, $15/60 \times 100\%$. Klopt dit? Als je er niet meteen uit komt kunnen we proberen een model te vinden dat deze situatie beschrijft. Het beste is nu dit model in continue tijd te bestuderen, in tegenstelling tot de vorige paragraaf waar we discrete tijdstappen namen. Zij λ de

storingsfrequentie per uur en μ de reparatiefrequentie. In ons geval zouden dit $\lambda = 1$ en $\mu = 4$ zijn. Zij $p_0(t)$ de kans dat op tijdstip t de machine draait en $p_1(t)$ de kans dat er storing is. We zullen een stelsel differentiaalvergelijkingen voor p_0, p_1 opstellen. Gegeven $p_0(t)$, $p_1(t)$, wat zijn de kansen op tijdstip $t + \Delta t$? Merk op, $p_0(t + \Delta t)$ is gelijk aan de kans dat op tijdstip t de machine draaiende was en er geen storing plaatsvond in $[t, t + \Delta t]$ plus de kans dat er op tijdstip t een storing was en er in $[t, t + \Delta t]$ een reparatie plaatsvond. Deze kansen zijn respectievelijk $p_0(t)(1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t))$ en $p_1(t)(\mu\Delta t + o(\Delta t))$. Dus,

$$p_0(t + \Delta t) = p_0(t)(1 - \lambda\Delta t) + p_1(t)\mu\Delta t + o(\Delta t).$$

Trek aan beide zijden $p_0(t)$ af en deel door Δt,

$$\frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)\Delta t + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Laat $\Delta t \to 0$ en we vinden,

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t).$$

Op vrijwel analoge manier kunnen we afleiden dat

$$p_1'(t) = \lambda p_0(t) - \mu p_1(t).$$

Merk allereerst op dat we door optellen van beide vergelijkingen krijgen $p_0'(t)+p_1'(t) = 0$, m.a.w. $p_0(t) + p_1(t)$ is constant. en zo hoort het ook, we weten namelijk dat de som van beide kansen altijd 1 is. Verder kunnen we dit gebruiken om de eerste vergelijking op te lossen. Substitueer $p_1(t) = 1 - p_0(t)$ in de eerste vergelijking, en er komt

$$p_0'(t) = -(\lambda + \mu)p_0(t) + \mu.$$

Dit is een eerste orde lineaire vergelijking en de algemene oplossing luidt $p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + Ce^{-(\lambda+\mu)t}$. Gevolg, $\lim_{t\to\infty} p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$. In ons voorbeeld is deze limiet 4/5, hetgeen inhoudt dat de machine 80% van de tijd draait.
We beschouwen nu een model voor een wachtrij bestaande uit één rij en één bedieningseenheid met probabilistische aankomst- en servicetijd. Nieuwe klanten arriveren volgens een Poissonverdeling met frequentie λ en de servicetijden zijn exponentieel verdeeld met parameter μ. Ook nu stellen we weer een model op met continue tijd. Zij $p_k(t)$ de kans dat er op tijdstip t precies k klanten aanwezig zijn. We kijken nu wat de waarde van $p_k(t + \Delta t)$ voor voldoend kleine Δt zal zijn. Stel eerste $k > 0$. In het tijdsinterval $[t, t + \Delta t]$ arriveert er een klant met kans $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ en wordt er een service geleverd met kans $\mu\Delta t + o(\Delta t)$. De kans dat er niets gebeurt is $(1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t))(1 - \mu\Delta t + o(\Delta t)) = 1 - (\lambda + \mu)\Delta t + o(\Delta t)$. De kans dat er in dit tijdvak twee of meer gebeurtenissen plaatsvinden is 1 minus de bovenstaande kansen, en dus $o(\Delta t)$. We vinden,

$$p_k(t + \Delta t) = p_k(t)(1 - \lambda\Delta t - \mu\Delta t) + p_{k-1}(t)\lambda\Delta t + p_{k+1}(t)\mu\Delta t + o(\Delta t) \quad k > 0$$

Breng de term $p_k(t)$ naar links, deel door Δt en laat $\Delta t \to 0$.

$$p_k'(t) = \mu p_{k+1}(t) - (\lambda + \mu)p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) \quad k = 1, 2, \ldots$$

Voor het geval $k = 0$ moeten we ons realiseren dat we alleen op 0 klanten kunnen komen als in $[t, t + \Delta t]$ een service wordt geleverd voor één klant (kans $\mu\Delta t$) of als er niets gebeurt bij 0 klanten (kans $1 - \lambda\Delta t$). Aankomst van klanten maakt het aantal alleen maar positief. Door een soortgelijke beschouwing als boven vinden we

$$p_0'(t) = \mu p_1(t) - \lambda p_0(t).$$

Samengevat,

$$\begin{array}{rcrrr}
p_0'(t) & = & & -\lambda p_0(t) & +\mu p_1(t) \\
p_1'(t) & = & \lambda p_0(t) & -(\lambda+\mu)p_1(t) & +\mu p_2(t) \\
p_2'(t) & = & \lambda p_1(t) & -(\lambda+\mu)p_2(t) & +\mu p_3(t) \\
\cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\
p_k'(t) & = & \lambda p_{k-1}(t) & -(\lambda+\mu)p_k(t) & +\mu p_{k+1}(t) \\
\cdots & & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Dit is een oneindig stelsel van lineaire eerste orde differentiaalvergelijkingen. Volledige oplossing hiervan is lang niet eenvoudig. Rond 1920 schreef Erlang deze vergelijkingen reeds op, maar pas in de jaren '50 werd een rigoureuze oplossing bekend! Wij zullen niet op deze theorie ingaan. Wat we wel kunnen is een stationaire oplossing bepalen en hopen dat in praktische gevallen het systeem naar deze stationaire oplossing convergeert. Dit is precies wat men in de praktijk doet.
Stel we hebben een stationaire oplossing $p_0(t) = p_0$, $p_1(t) = p_1$, $p_2(t) = p_2, \ldots$. Ingevuld in ons stelsel differentiaalvergelijkingen,

$$\begin{array}{rcrrr}
0 & = & & -\lambda p_0 & +\mu p_1 \\
0 & = & \lambda p_0 & -(\lambda+\mu)p_1 & +\mu p_2 \\
0 & = & \lambda p_1 & -(\lambda+\mu)p_2 & +\mu p_3 \\
\cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & = & \lambda p_{k-1} & -(\lambda+\mu)p_k & +\mu p_{k+1} \\
\cdots & & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Merk op dat we vanaf de tweede vergelijking te maken hebben met een tweestaps recursie voor de rij $p_0, p_1, p_2, \ldots$. Van deze recursie zou een éénstaps matrixrecursie met een 2×2 matrix gemaakt kunnen worden die men dan bestudeert met methoden uit een vorig hoofdstuk. Hier volgen we een iets snellere methode. Stel voor het gemak even $\lambda/\mu = \rho$. Uit de eerste vergelijking volgt $p_1 = (\lambda/\mu)p_0 = \rho p_0$. Uit de tweede vergelijking volgt $p_2 = (1 + \rho)p_1 - \rho p_0 = \rho^2 p_0$. Vervolgens is het erg eenvoudig om met inductie te laten zien dat $p_k = \rho^k p_0$. Om p_0 zelf te bepalen gebruiken we de eis dat de som van alle p_k gelijk moet zijn aan 1. Dus, $1 = p_0 \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k$. Merk op dat de oneindige som alleen maar zin heeft als $\rho < 1$, ofwel $\lambda < \mu$, met andere woorden, in het geval dat de aankomstfrequentie lager is dan de bedieningsfrequentie. We vinden dan $p_0 = 1 - \rho$ en $p_k = \rho^k(1 - \rho)$.
Met behulp van de gevonden kansverdeling kunnen we diverse grootheden, zoals de gemiddelde lengte van de wachtrij, berekenen. Zij K het gemiddeld aantal klanten in

het systeem. Dan geldt,

$$K = \sum_{k=0}^{\infty} k\rho^k(1-\rho)$$

Gebruik makend van $\sum_{k\geq 0} kx^k = x/(1-x)^2$ vinden we

$$K = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}.$$

Om de gedachten te bepalen, bij een aankomstfrequentie die 80% bedraagt van de servicefrequentie kunnen we gemiddeld $0.8/(1-0.8) = 4$ klanten in het systeem verwachten. Verder kunnen we ook de kans bepalen dat er minstens 4 klanten zijn. Dit is namelijk precies $\sum_{k\geq 4} \rho^k(1-\rho) = \rho^4$. In ons geval is dit $0.8^4 = 0.4096$, hetgeen wil zeggen dat er ongeveer 40% van de tijd 4 of meer klanten zijn. We kunnen ook het gemiddelde aantal wachtenden berekenen, d.w.z. het aantal klanten dat nog niet in behandeling is. Zij L dit aantal. Dan geldt

$$L = \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\rho^k(1-\rho) = \rho^2/(1-\rho).$$

In ons geval, $L = 0.8^2/0.2 = 3.2$.

9.6 Geboorte-sterfteprocessen

Beschouw onze onderhoudsmonteur uit de vorige paragraaf. Hij was gemiddeld 20% van de tijd actief en het ligt daarom voor de hand hem het beheer over meerdere machines te geven. Het begrip wachtrij is nu wat duidelijker, op elk moment kunnen er een aantal machines zijn in afwachting van reparatie. Stel we hebben N machines. Als er op zeker moment n stuks inactief zijn, dan is de frequentie waarmee één van de overige storing krijgt gelijk aan $(N-n)\lambda$, het aantal draaiende machines maal de storingsfrequentie van één machine. We hebben hier te maken met een wachtrij waarvan de aankomstfrequentie afhangt van het aantal klanten in het systeem. Een ander voorbeeld van een dergelijke wachtrij is de telefoonlijn waar een maximaal aantal wachtenden, zeg N, op kan staan. Zitten er minder dan N klanten op de lijn dan is de aankomstfrequentie een bepaald getal λ, zijn er N klanten dan is deze frequentie 0, er komen immers geen nieuwe klanten bij. Ook van de servicezijde is het mogelijk dat de gemiddelde servicetijd afhangt van het aantal klanten in het systeem. Bijvoorbeeld bij één wachtrij met N service-eenheden. Stel dat elke service-eenheid frequentie μ heeft en stel dat er n klanten in het systeem zijn. Als $n \leq N$ dan is elke klant in behandeling en de totale servicefrequentie bedraagt $n\mu$. Wordt het aantal klanten groter dan N dan blijft de servicefrequentie op $N\mu$. Deze variatie van servicecapaciteit wordt nog duidelijker bij het ideale koude buffet. Gemiddeld heeft een persoon een bepaalde tijd nodig om zijn of haar hapje op te scheppen, hetgeen overeenkomt met een bepaalde servicefrequentie μ. Idealerwijs kan elke gast meteen beginnen met opscheppen en bij aanwezigheid van n gasten geeft dit een totale servicefrequentie $n\mu$.
Wachtrijen waarbij de aankomst- en servicefrequentie afhangt van het aantal klanten worden *geboorte-sterfteprocessen* genoemd. Deze benaming is afkomstig uit toepassingen

in de populatiedynamica. Aankomst komt dan overeen met de geboorte van een individu en serviceverlening komt ironisch genoeg met sterfte overeen. Stel dat de aankomst- en servicefrequentie bij n klanten in het systeem gelijk zijn aan λ_n respectievelijk μ_n. Zij wederom $p_n(t)$ de kans op n klanten ten tijde t. Met dezelfde argumenten als in de voorgaande paragraaf kunnen we beredeneren dat

$$p_0(t+\Delta t) = p_0(t)(1-\lambda_0\Delta t) + p_1(t)\mu_1\Delta t + o(\Delta t)$$

en voor $k \geq 1$,

$$p_k(t+\Delta t) = p_k(t)(1-\lambda_k\Delta t - \mu_k\Delta t) + p_{k-1}(t)\lambda_{k-1}\Delta t + p_{k+1}(t)\mu_{k+1}\Delta t + o(\Delta t).$$

Na de limietovergang $\Delta t \to 0$ vinden we,

$$\begin{array}{rcrrr}
p_0'(t) & = & & -\lambda_0 p_0(t) & +\mu_1 p_1(t) \\
p_1'(t) & = & \lambda_0 p_0(t) & -(\lambda_1+\mu_1)p_1(t) & +\mu_2 p_2(t) \\
p_2'(t) & = & \lambda_1 p_1(t) & -(\lambda_2+\mu_2)p_2(t) & +\mu_3 p_3(t) \\
\cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\
p_k'(t) & = & \lambda_{k-1}p_{k-1}(t) & -(\lambda_k+\mu_k)p_k(t) & +\mu_{k+1}p_{k+1}(t) \\
\cdots & & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Bovenstaand stelsel differentiaalvergelijkingen is slechts in een beperkt aantal gevallen opgelost. Wij vermelden hier alleen het resultaat van Karlin, McGregor en Reuter dat oplossingen naar een stationaire toestand convergeren dan en slechts dan als de reeks

$$1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2} + \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2\mu_3} + \cdots$$

convergeert. Om er achter te komen wat de stationaire oplossing precies is, substitueren we weer $p_k(t) = p_k$ in de vergelijkingen,

$$\begin{array}{rcrrr}
0 & = & & -\lambda_0 p_0 & +\mu_1 p_1 \\
0 & = & \lambda_0 p_0 & -(\lambda_1+\mu_1)p_1 & +\mu_2 p_2 \\
0 & = & \lambda_1 p_1 & -(\lambda_2+\mu_2)p_2 & +\mu_3 p_3 \\
\cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & = & \lambda_{k-1}p_{k-1} & -(\lambda_k+\mu_k)p_k & +\mu_{k+1}p_{k+1} \\
\cdots & & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Uit de eerste vergelijking volgt $p_1 = (\lambda_0/\mu_1)p_0$, uit de tweede $p_2 = (\lambda_1+\mu_1)p_1/\mu_2 - \lambda_0 p_0/\mu_2 = \lambda_1 p_1/\mu_2 + (\mu_1/\mu_2)(p_1 - (\lambda_0/\mu_1)p_0) = (\lambda_0\lambda_1/\mu_1\mu_2)p_0$. Door inductie naar k kunnen we laten zien dat $p_k = (\lambda_0\cdots\lambda_{k-1}/\mu_1\cdots\mu_k)p_0$. Opdat $\sum_{k\geq 0} p_k = 1$ moet de reeks

$$1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2} + \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2\mu_3} + \cdots$$

dus convergeren. Wederom is het mogelijk in deze evenwichtsituatie de voor ons interessante grootheden te berekenen. We zullen dit doen voor een tweetal voorbeelden.
We beginnen met een wachtrij en twee bedieningseenheden. Zij λ de aankomstfrequentie en $\mu/2$ de servicefrequentie per bedieningseenheid. We moeten in ieder geval $\lambda < \mu$

hebben. Verder geldt dat de twee bedieningseenheden samen zorgen voor een servicefrequentie $\mu_1 = \mu/2$ en $\mu_n = \mu$ als $n \geq 2$. Voor een wachtrij in evenwicht geldt in deze situatie, $p_k = 2\rho^k p_0$ voor $k \geq 1$, waarin $\rho = \lambda/\mu$. Om p_0 te bepalen gebruiken we $\sum_{k\geq 0} p_k = 1$, ofwel $1 = p_0(1 + 2\rho + 2\rho^2 + \cdots) = p_0(1+\rho)/(1-\rho)$. Dus,

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho}.$$

Het gemiddeld aantal klanten in het systeem wordt nu gegeven door

$$K = \sum_{k\geq 0} k p_k = 2(\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + \cdots)p_0 = 2\rho/(1-\rho^2).$$

Vergelijken we dit met de waarde van K voor een enkele bedieningseenheid met capaciteit μ dan zien we dat bij twee bedieningseenheden op halve capaciteit de waarde van K groter is. Heb je hier een verklaring voor? Berekenen we echter de gemiddelde lengte L van de wachtrij,

$$L = \sum_{k\geq 2} (k-2) p_k = 2(\rho^3 + 2\rho^4 + 3\rho^5 + \cdots)p_0 = 2\rho^3/(1-\rho^2)$$

dan zien we dat deze kleiner is dan bij een rij met één bedieningseenheid. Heb je hier een verklaring voor?

9.7 Oefeningen

Het model voor een geboorte-sterfte proces met geboortefrequenties λ_0, $\lambda_1, \ldots$ en sterftefrequenties μ_1, $\mu_2, \ldots$ dat we in deze opgaven zullen gebruiken wordt gegeven door het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{array}{lcccc}
p_0'(t) & = & & -\lambda_0 p_0(t) & +\mu_1 p_1(t) \\
p_1'(t) & = & \lambda_0 p_0(t) & -(\lambda_1+\mu_1) p_1(t) & +\mu_2 p_2(t) \\
p_2'(t) & = & \lambda_1 p_1(t) & -(\lambda_2+\mu_2) p_2(t) & +\mu_3 p_3(t) \\
\cdots & & \cdots & \cdots & \cdots \\
p_k'(t) & = & \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) & -(\lambda_k+\mu_k) p_k(t) & +\mu_{k+1} p_{k+1}(t) \\
\cdots & & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Hierin is $p_k(t)$ de kans dat er op tijdstip t precies k klanten in het systeem zijn. In de evenwichtstoestand geldt dat $p_k = (\lambda_0 \cdots \lambda_{k-1}/\mu_1 \cdots \mu_k)p_0$.

1. Bij het ideale koude buffet, d.w.z. elke persoon die aankomt kan direct voor zichzelf opscheppen, is de aankomstfrequentie constant gelijk aan λ en de selfservicefrequentie μ. Modelleer deze situatie met een geboorte-sterfte proces en bereken de stationaire kansverdeling en het gemiddeld aantal klanten in het systeem.

2. Een kleine telefonische inlichtingendienst heeft twee telefonisten en ook twee lijnen. Als twee lijnen bezet zijn krijgt een eventuele volgende klant geen gehoor en moet de hoorn weer op de haak leggen. Stel dat een telefonist per uur gemiddeld 20 telefoontjes afhandelt en dat er gemiddeld 30 klanten per uur opbellen.

(a) Modelleer deze situatie door een geschikt gekozen geboorte-sterfte proces en geef een stelsel differentiaalvergelijkingen voor $p_0(t)$, $p_1(t)$, $p_2(t)$.

(b) Bereken de stationaire oplossing.

(c) Hoeveel klanten zullen er gemiddeld per uur de "in gesprek"-toon horen? Hoeveel procent van de tijd zullen beide telefonisten gemiddeld niets te doen hebben?

3. Lees de help-instructie bij `wachtrij`. Simuleer met behulp van dit programma een wachtrij met 1 server en constante aankomstfrequentie (< 1). Doe dit voor diverse aankomstfrequenties. Bekijk ook de wachttijden die optreden. Omdat het hier om een simulatie met kansen betreft zal herhaling van een commando niet hetzelfde resultaat opleveren. Hoe lang moet een simulatie volgens jou duren opdat er redelijk stabiele gemiddelden tevoorschijn komen? Komt de gemiddelde wachtrijlengte overeen met de waarde die tijdens het college is afgeleid? (bij aankomstfrequentie r bedraagt deze $r^2/(1-r)$).

   Stel nu dat we de server opsplitsen in een drietal servers, elk met eenderde capaciteit van de oorspronkelijke. Wat is het effect op de gemiddelde rijlengte, het gemiddelde aantal klanten in het systeem en op de wachttijden? Heb je een verklaring voor deze effecten?

4. In een fabriek draaien twee machines in principe 24 uur per dag. Al die tijd is er een onderhoudsmonteur aanwezig. Elk van de machines heeft gemiddeld eens in de twee uur storing. Gemiddeld doet de monteur een uur over een reparatie. Modelleer deze situatie als geboorte-sterfte proces met geschikt gekozen λ_n, μ_n. Zij $p_k(t)$ de kans dat er op tijdstip t precies k machines storing hebben. Geef een stelsel differentiaalvergelijkingen voor $p_0(t)$, $p_1(t)$ gebruik makend van $p_k(t) = 0$ als $k > 2$ en $p_0(t)+p_1(t)+p_2(t) = 1$. Laat zien dat, ongeacht de begincondities, de kansen $p_0(t)$, $p_1(t)$ naar de evenwichtstoestand convergeren. Wat zijn de waarden van p_0, p_1, p_2 in de evenwichtstoestand? Bereken in de evenwichtstoestand het gemiddelde aantal machines dat storing heeft. Hoeveel procent van de tijd heeft een monteur gemiddeld niets te doen?

   Voer een simulatie met het programma `wachtrij` uit en controleer je resultaten.

   Hoeveel procent van de tijd is een machine gemiddeld draaiende?

5. In een wachtrij met 1 server zullen klanten niet zo snel aansluiten als er een lange rij is. De aankomstfrequentie neemt dus af bij groter wordende rijlengte. Neem aan dat $\lambda_n = \lambda/(n+1)$ voor alle $n \geq 0$. De servicefrequentie is constant en bedraagt μ. Bepaal de stationaire kansverdeling en het gemiddelde aantal klanten in het systeem. Simuleer deze situatie ook met `wachtrij` en vergelijk de resultaten met de theoretische resultaten.

Index

a-periodieke matrix, 27
aanvaardbaar punt, 117
attractief, 6
attractor, 97
autonoom, 62, 84

basis, 117
basispunt, 117
beginvoorwaarden, 63
bifurcatie, 13
Boltzmann formule, 138

centrumpunt, 88
chaos, 10
coëfficiënten vector, 113
convex, 114

defectieve kansmatrix, 29
dekpunt, 6, 48
demping, 67
differentiaalvergelijking, 83
doelfunctie, 116
dominant, 25
dominante eigenvector, 25
dominante eigenwaarde, 25
draagcapaciteit, 5

Ehrenfest urnenmodel, 32
elektrische schakeling, 67
epidemie, 59
Euler, 100
evenwichtsoplossing, 88
existentiestelling, 83

fase van simplexalgoritme, 120
faseruimte, 95
feasible solution, 117
frequentie, 61, 66

geboorte-sterfteproces, 149
gemengde strategie, 130
gemiddeld, 149, 151
gemiddelde, 29, 93
gerichte graaf, 26
gesloten pad, 26
graaf van een matrix, 26
groeifactor, 4
grootschalige integratie, 137

halfruimte, 113
Hamilton systeem, 93
handelsreiziger, 137
harmonische oscillator, 66
herten, 17
hoekpunt, 114
homogeen, 63, 64

instabiel, 7
integraalkromme, 84
integreerbaar systeem, 92
integrerende factor, 63
irreducibele matrix, 27
iteratiediagram, 8

Jacobi-matrix, 48
Julia, Gaston, 50

kampeerders, 129
kansmatrix, 23
kansvector, 23
karakteristieke vergelijking, 64
knooppunt, 88
kolom-eigenvector, 25

lengte van een pad, 26
Lesliematrix, 22
limiet cykel, 94
lineaire d.v., 64
lineaire ongelijkheden, 110
lineaire programmering, 111, 116
lineaire vorm, 113
linearisatie, 49, 88
links eigenvector, 25
logistische groei (continu), 73
logistische groei (discreet), 5
Lorenz, 97
Lotka–Volterra model, 93

Malthus model, 4
Malthus, Thomas, 4
Markovketen, 22
matrixspel, 129
Michaelis–Menten functie, 104
minimax stelling, 131
model, 2

neushoorns, 43
Newton proces, 15
Nicholson-Bailey, 48
nilpotent, 27
numerieke oplossing, 62, 100

orde, 64, 101
overgangsmatrix, 24

pad, 26
particuliere oplossing, 65
periodiciteit, 9, 10, 61
periodiciteit van een matrix, 27
Perron–Frobenius, 27
pivot, 119
Poincaré–Bendixon, 95
Poissonproces, 143
polyeder, 114
polytoop, 114
populatiegroei, 4

quasi-periodieke baan, 97

radioactiviteit, 60
rechts eigenvector, 25
recursie, 6, 47
reducibele matrix, 27
repulsief, 6
resonantie, 67
Ricker model, 5
rij-eigenvector, 25
roofdier-prooidier model, 104
rupswespmodel, 47

Sarkovski, 11
scheiding van variabelen, 62
simplexmethode, 111, 117
simulated annealing, 138
slack-variabele, 117, 120
slinger, 95
speltheorie, 129
spiraalpunt, 88
stabiliteit, 6, 10, 48, 88
standaard gedaante, 117
stationair, 88
stelsel d.v.'s, 83
sterns, 21
strategie, 130
strijdig, 113
stroomlijn, 84

Tacoma-brug, 69
tennis, 44

uniciteitsstelling, 83

vectorveld, 84
veersysteem, 65
Verhulst model (discreet), 5
Volterra effect, 93

wachtrij, 143
Waddengebied, 21
wrijving, 66

zadelpunt, 88, 129
zuivere strategie, 130