WISKUNDIGE TECHNIEKEN 3

J. Stienstra

januari 2009

Voorwoord

Het voor u liggende diktaat WISKUNDIGE TECHNIEKEN 3 (van januari 2009) is een ongewijzigde kopie van het diktaat WISKUNDIGE METHODEN VOOR FYSICI (van januari 2007). Het is een samenvoeging van twee oudere teksten: HILBERTRUIMTEN VOOR FYSICI en INFINITESIMAALREKENING 3. Het hoort bij de cursus WISKUNDIGE TECHNIEKEN 3, waarvoor korte tijd ook de naam WISKUNDIGE METHODEN VOOR FYSICI is gebruikt en die in 2007 is ontstaan door een fusie van de eerste helft van een cursus die in de jaren 2004 t/m 2006 is gegeven onder de naam HILBERTRUIMTEN VOOR FYSICI en de cursus INFINITESIMAALREKENING 3 uit 2001/2002. Bij deze samenvoeging zijn geen veranderingen aangebracht in de oudere teksten. Er is alleen een hoofdstuk over Besselfuncties tussengevoegd. Voorheen was dat een onderwerp uit het tweede deel van Hilbertruimten en werd behandeld uit het boek 'Elementary Differential equations and Boundary Value Problems' van Boyce en DiPrima.

Het deel *Hilbertruimten voor Fysici* van de cursus WISKUNDIGE TECHNIEKEN 3 behandelt wiskundige technieken m.b.t. bijzondere differentiaalvergelijkingen die worden gebruikt in de QUANTUMMECHANICA. Het deel *Infinitesimaalrekening 3* gaat over complexwaardige funkties van een complexe variabele.

Voorwoord over Hilbertruimten

Een *Hilbertruimte* is een *lineaire ruimte* $\mathcal{H}$ voorzien van een *inprodukt* $\langle\,,\,\rangle$, zodat $\mathcal{H}$ *volledig* is t.a.v. de door het inprodukt gedefinieerde afstandsfunktie. Dit laatste betekent: het inprodukt geeft een afstandsfunktie op de lineaire ruimte $\mathcal{H}$:

$$\text{afstand}(v,w) \;=\; \sqrt{\langle v-w, v-w\rangle}\,;$$

met dit afstandsbegrip kunnen we praten over convergentie van rijen van elementen in $\mathcal{H}$; *volledigheid van* $\mathcal{H}$ betekent dat elke rij van elementen in $\mathcal{H}$ die voldoet aan het convergentiekenmerk van Cauchy, een limiet heeft in $\mathcal{H}$. Volledigheid is een voorwaarde opdat $\mathcal{H}$ *Hilbertruimte* genoemd mag worden.

De scalairen die op de lineaire ruimte werken, kunnen zowel reële als complexe getallen zijn. Wij beperken ons in dit diktaat veelal tot reële scalairen.

De lineaire ruimten die men in een eerste cursus Lineaire Algebra tegenkomt, worden vaak vektorruimten genoemd en zijn meestal *eindigdimensionaal*; d.w.z. de vektoren in zo'n ruimte hebben slechts eindig veel (onafhankelijke) coordinaten. De lineaire ruimten in deze cursus bestaan uit funkties op $\mathbb{R}$ (of een interval in $\mathbb{R}$). De waarden van zo'n funktie in de punten van $\mathbb{R}$ fungeren als coordinaten. Veel van de hier beschouwde lineaire ruimten zijn daarom *oneindig dimensionaal.* Maar we zullen ook zien dat door allerlei voorwaarden die aan zo'n funktie kunnen worden opgelegd, de funktiewaarden in verschillende punten van $\mathbb{R}$ niet meer volledig onafhankelijk van elkaar kunnen worden gekozen. Die voorwaarden kunnen zelfs zo stringent zijn dat de lineaire ruimte van funkties die aan die voorwaarden voldoen, toch eindigdimensionaal is.

De uit een eerste cursus Lineaire Algebra bekende begrippen *lineaire deelruimte, lineaire afbeelding, eigenwaarde en eigenvektor, inprodukt* kunnen zonder meer worden overgenomen in de oneindigdimensionale context (althans als men de definities goed heeft gekozen). De voorbeelden van deze begrippen vertonen nu echter een veel grotere variatie aan verschijningsvormen. Andere begrippen, zoals *basis* en *diagonaliseerbaar*, vereisen ingrijpender aanpassingen: in de oneindigdimensionale situatie moet men lineaire combinaties bekijken met oneindig veel termen; dat zijn een soort reeksen en men moet *convergentiekwesties* oplossen; daarbij speelt dan de bovengenoemde *volledigheid* een esentiële rol.

Lineaire afbeeldingen en eigenwaardeproblemen waar we hier in geïnteresseerd zijn, manifesteren zich als lineaire differentiaaloperatoren en differentiaalvergelijkingen. De oplossingen van deze differentiaalvergelijkingen zijn dan de eigenvektoren, maar het is beter om die hier *eigenfunkties* te te noemen. Matrices, en daarmee ook de standaard methode om eigenwaarden te berekenen als wortels van het karakteristieke polynoom, werken niet in de oneindigdimensionale situatie. We zullen nieuwe methoden leren om differentiaalvergelijkingen, en daarmee eigenwaardeproblemen, op te lossen.

Oplossingen van een homogene lineaire differentiaalvergelijking vormen een lineaire deelruimte van de lineaire ruimte van alle funkties op $\mathbb{R}$ (of een geschikt interval). Een andere manier om lineaire deelruimten te maken is door *randvoorwaarden* op te leggen. Het effekt van de combinatie van randvoorwaarden met eigenwaardeproblemen is het belangrijkste thema van dit diktaat en is een van de fundamentele aspekten van (de wiskundige kant van) de quantummechanica.

Inprodukten gaan in dit diktaat pas een rol spelen als we van de interessante differentiaaloperatoren al alle eigenwaarden en eigenfunkties hebben bepaald. Het inprodukt maakt dan nog extra struktuur zichtbaar, waaronder analogieën met het eindigdimensionale geval zoals de kwestie van *diagonaliseerbaarheid* van de beschouwde (differentiaal-)operatoren.

Voor de fysische interpretatie van al deze zaken verwijzen we naar natuurkundecolleges, zoals Quantummechanica.

1 Machtreeksen

1.1 De convergentiestraal

In dit hoofdstuk beschouwen we een klasse van reeksen die voor de theorie van differentieerbare funkties van bijzonder belang is, namelijk die der machtreeksen. Zij α een complex getal, en laat a_n een rij complexe getallen zijn. Dan noemen we de reeks

$$\sum_{n\geq 0} a_n(z-\alpha)^n \tag{1}$$

(met z een complexe variabele) een *machtreeks* rond het punt α. We beschouwen de machtreeks als reeks van funkties in de variabele z. De notatie (1) moet zo opgevat worden dat $a_0(z-\alpha)^0$ betekent a_0.

Uiteraard moeten we eerst onderzoeken voor welke $z \in \mathbb{C}$ de reeks (1) convergeert. Ter vereenvoudiging van het schrijfwerk beperken we ons voorlopig tot machtreeksen rond 0, dus van de vorm

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n. \tag{2}$$

Door achteraf z te vervangen door $z-\alpha$ kan men de hele hier ontwikkelde theorie van machtreeksen rond 0 ook toepassen voor machtreeksen rond een willekeurig punt $\alpha \in \mathbb{C}$.

Ter verdere vereenvoudiging van het schrijfwerk schrijven we in de rest van dit hoofdstuk

$$\sum \qquad \text{in plaats van} \qquad \sum_{n\geq 0}.$$

Lemma 1.1 *Als er een positief reëel getal r is zo dat*

$$a_n = \mathcal{O}\left(r^{-n}\right) \qquad \text{voor} \quad n \to \infty,$$

dan convergeert de reeks $\sum a_n z^n$ (absoluut) voor elke $z \in \mathbb{C}$ met $|z| < r$.

Bewijs: $a_n = \mathcal{O}\left(r^{-n}\right)$ voor $n \to \infty$, betekent dat er een $M > 0$ is zo dat

$$|a_n| \leq M r^{-n} \qquad \text{voor elke} \quad n \geq 0.$$

Dan is voor elke n
$$|a_n z^n| \leq M\big(|z|r^{-1}\big)^n.$$
Als $|z| < r$ is, dan is $|z|r^{-1} < 1$ en convergeert de meetkundige reeks $\sum\big(|z|r^{-1}\big)^n$. De (absolute) convergentie van de reeks $\sum a_n z^n$ volgt nu uit de zogeheten Majorantie Stelling voor reeksen. ■

Gevolg 1.2 *Laat voor zekere $z_0 \neq 0$ de reeks $\sum a_n z_0^n$ convergeren. Dan is de reeks $\sum a_n z^n$ (absoluut) convergent voor elke $z \in \mathbb{C}$ met $|z| < |z_0|$.*

Bewijs: Uit de convergentie van $\sum a_n z_0^n$ volgt $\lim_{n\to\infty} a_n z_0^n = 0$. Er is dus een getal $M > 0$ zo dat voor elke n geldt $|a_n z_0^n| \leq M$. Anders gezegd
$$a_n = \mathcal{O}\left(|z_0|^{-n}\right) \qquad \text{voor} \quad n \to \infty.$$
Pas nu Lemma 1.1 toe. ■

Stelling 1.3 *Voor een machtreeks $\sum a_n z^n$ geldt:*

• ofwel *er is een reëel getal $R \geq 0$ zo dat de reeks $\sum a_n z^n$ convergeert voor elke $z \in \mathbb{C}$ met $|z| < R$ en divergeert voor elke $z \in \mathbb{C}$ met $|z| > R$*

• ofwel *de reeks $\sum a_n z^n$ convergeert voor elke $z \in \mathbb{C}$.*

In dit laatste geval stellen we $R = \infty$.

Bewijs: Neem aan dat voor de gegeven machtreeks niet het tweede geval geldt; d.w.z. neem aan dat er een $z_1 \in \mathbb{C}$ is waarvoor de reeks $\sum a_n z_1^n$ divergeert. Dan is er vanwege Gevolg 1.2 ook een positief reëel getal y_1 waarvoor de reeks $\sum a_n y_1^n$ divergeert (bijvoorbeeld $y_1 = 1 + |z_1|$).

Neem $x_1 = 0$. Dan convergeert de reeks $\sum a_n x_1^n$. Uitgaande van deze x_1 en y_1 construeren we nu induktief twee rijen $\{x_k\}_{k\geq 1}$ en $\{y_k\}_{k\geq 1}$ zodat voor elke $k \geq 1$ de reeks $\sum a_n x_k^n$ convergeert en de reeks $\sum a_n y_k^n$ divergeert. Aangenomen dat we x_k en y_k al hebben, definiëren we
$$\left.\begin{array}{rcl} x_{k+1} &=& \frac{1}{2}(x_k + y_k) \\ y_{k+1} &=& y_k \end{array}\right\} \quad \text{als} \quad \sum a_n \left(\frac{1}{2}(x_k + y_k)\right)^n \quad \text{convergeert}$$
$$\left.\begin{array}{rcl} x_{k+1} &=& x_k \\ y_{k+1} &=& \frac{1}{2}(x_k + y_k) \end{array}\right\} \quad \text{als} \quad \sum a_n \left(\frac{1}{2}(x_k + y_k)\right)^n \quad \text{divergeert}$$
De rij $\{x_k\}_{k\geq 1}$ is dan een monotoon stijgende rij reële getallen, die van boven begrensd is (door y_1). Deze rij heeft dus een limiet, die we R noemen.

Uit de constructie is duidelijk dat voor elke $k \geq 1$

$$|y_k - x_k| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} |y_1 - x_1|.$$

Daarom convergeert ook de rij $\{y_k\}_{k\geq 1}$ naar R:

$$\lim_{k\to\infty} x_k \;=\; \lim_{k\to\infty} y_k \;=\; R.$$

Als nu $z \in \mathbb{C}$ zo is dat $|z| < R$, dan is $|z| < x_k$ voor een zekere k en convergeert de reeks $\sum a_n z^n$ volgens Gevolg 1.2.

Als daarentegen $z \in \mathbb{C}$ zo is dat $|z| > R$, dan is $|z| > y_k$ voor een zekere k en divergeert de reeks $\sum a_n z^n$ volgens Gevolg 1.2. ■

Opmerkingen.

1. De R in de bovenstaande stelling heet de *convergentiestraal* van de machtreeks $\sum a_n z^n$. De (open) cirkelschijf $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < R\}$ heet de *convergentieschijf* van de machtreeks; in geval $R = \infty$ is de convergentieschijf het hele complexe vlak $\mathbb{C}$; in geval $R = 0$ is de convergentieschijf leeg. Als $R \neq \infty$ is, noemt men de cirkel $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = R\}$ de *convergentiecirkel* van de machtreeks.

2. Merk op dat Stelling 1.3 geen uitspraak doet over de convergentie of divergentie van de reeks $\sum a_n z^n$ voor punten z op de convergentiecirkel. Het kan gebeuren dat de reeks in sommige punten van de convergentiecirkel convergeert, terwijl hij in andere punten van de convergentiecirkel divergeert. We zullen hier niet verder ingaan op het, soms heel subtiele, gedrag van machtreeksen op hun convergentiecirkel.

De volgende stelling is in de praktijk veelal toereikend om de convergentiestraal van een machtreeks te bepalen.

Stelling 1.4 *Voor de convergentiestraal R van de machtreeks $\sum a_n z^n$ geldt:*

a. *Als $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$ bestaat, dan is $R = L^{-1}$.*

b. *Als $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = M$ bestaat, dan is $R = M^{-1}$.*

Opmerking. Het bovenstaande is zo bedoeld dat als $L = 0$ of $M = 0$, dan is $R = \infty$, terwijl $L = \infty$ of $M = \infty$ impliceert $R = 0$.

Bewijs: (a) Als L bestaat, dan is

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = L|z|$$

en de conclusie volgt door toepassing van het zogeheten Wortelkenmerk voor reeksen.
(b) volgt op soortgelijke manier door toepassing van het zogeheten Quotient-kenmerk voor reeksen. ∎

Voorbeelden.

1. De meetkundige reeks $\sum z^n$ heeft convergentiestraal 1, immers $L = 1$.
2. De reeks $\sum (n+1)z^n$ heeft convergentiestraal 1, immers $M = 1$.
3. De reeks $\sum \frac{z^n}{n!}$ heeft convergentiestraal ∞, immers $M = 0$.
4. De reeks $\sum n! z^n$ heeft convergentiestraal 0, immers $M = \infty$.
5. Beschouw de reeks $\sum nz^{2n}$; dus $a_{2n} = n$, en $a_{2n+1} = 0$. Hieruit blijkt dat de limieten L en M niet bestaan. Voor de reeks $\sum nw^n$ geldt echter dat $M = 1$, dus $R = 1$. Substitutie $w = z^2$ leert ons nu dat ook de oorspronkelijke reeks convergentiestraal 1 heeft.

1.2 Machtreeksfunkties en hun afgeleiden.

Een machtreeks definieert op zijn convergentieschijf een funktie door

$$f(z) = \sum a_n z^n.$$

We laten zien dat deze funktie oneindig vaak complex differentieerbaar is.

Lemma 1.5 *Laat $\sum a_n z^n$ een machtreeks zijn met convergentiestraal R. Dan heeft ook de machtreeks $\sum_{n\geq 1} na_n z^{n-1}$ convergentiestraal gelijk aan R.*

Bewijs: Als $R \neq \infty$ is en de machtreeks $\sum_{n\geq 1} na_n z^{n-1}$ zou een convergentiestraal groter dan R hebben, dan zou er een z met $|z| > R$ bestaan waarvoor de reeks $\sum_{n\geq 1} na_n z^{n-1}$ absoluut convergeert. Wegens

$$|na_n z^{n-1}| > |a_n z^n| \qquad \text{als} \quad n > |z|.$$

zou daaruit de absolute convergentie van de reeks $\sum a_n z^n$ volgen. Dit zou in tegenspraak zijn met $|z| > R$. *Dus is de convergentiestraal van de machtreeks $\sum_{n\geq 1} na_n z^{n-1}$ niet groter dan R.*

Omdat de convergentiestraal van $\sum_{n\geq 1} na_n z^{n-1}$ minstens 0 is, is het lemma nu bewezen in geval $R = 0$.

In geval $R > 0$ is, nemen we willekeurig een positief reëel getal $c < R$. Uit de convergentie van $\sum a_n c^n$ volgt $\lim_{n\to\infty} a_n c^n = 0$. Dus bestaat er een $K > 0$ zo dat $|a_n c^n| \leq K$ voor alle n. Derhalve is voor elke $z \in \mathbb{C}$:

$$|na_n z^{n-1}| \leq Kc^{-1} n \left(\frac{|z|}{c}\right)^{n-1} \qquad \text{voor} \quad n \geq 1.$$

Volgens bovenstaand voorbeeld (2) heeft de reeks $\sum_{n\geq 1} nw^{n-1}$ convergentiestraal 1. Met het majorantiecriterium zien we nu dat de reeks $\sum_{n\geq 1} na_n z^{n-1}$ convergeert voor $|z| < c$. Omdat dit geldt voor iedere $c < R$, is de convergentiestraal van de machtreeks $\sum_{n\geq 1} na_n z^{n-1}$ minstens R. *We concluderen dat de convergentiestraal van deze machtreeks precies R is.* ■

Met induktie leidt men uit het voorgaande lemma af:

Gevolg 1.6 *Laat $\sum a_n z^n$ een machtreeks zijn met convergentiestraal R. Dan heeft voor elke $j \geq 0$ ook de machtreeks*

$$\sum_{n\geq j} n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-j+1) a_n z^{n-j}$$

convergentiestraal gelijk aan R. ■

Stelling 1.7 *Laat $\sum a_n z^n$ een machtreeks zijn met convergentiestraal $R > 0$. Dan is de funktie f gedefinieerd door*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

complex differentieerbaar op de convergentieschijf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ *en wordt de afgeleide gegeven door*

$$f'(z) = \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}.$$

Bewijs: Fixeer α met $|\alpha| < R$ en kies c zo dat $|\alpha| < c < R$. Voor elke $h \in \mathbb{C}$ die voldoet aan $|h| < c - |\alpha|$, en voor elke $n \geq 2$ is dan volgens het *binomium van Newton*:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{(\alpha+h)^n - \alpha^n}{h} - n\alpha^{n-1} \right| &= |h| \left| \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{k!(n-k)!} h^{n-k-2} \alpha^k \right| \\
&\leq |h| n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{k!(n-k-2)!} |h|^{n-k-2} |\alpha|^k \\
&\leq |h| n(n-1)(|\alpha| + |h|)^{n-2} \\
&\leq |h| n(n-1) c^{n-2}
\end{aligned}$$

Volgens Gevolg 1.6 is de reeks $\sum_{n\geq 2} n(n-1)|a_n|c^{n-2}$ convergent. De voorgaande berekening laat zien dat voor elke $h \in \mathbb{C}$, met $|h| < c - |\alpha|$, geldt

$$\left| \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h} - \sum_{n\geq 1} n a_n \alpha^{n-1} \right| \leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n| c^{n-2}.$$

Door hier nu de limiet voor $h \to 0$ te nemen, zien we dat f complex differentieerbaar is in α, met de gewenste afgeleide. ∎

Door herhaald toepassen van de bovenstaande stelling volgt direkt:

Gevolg 1.8 *Een machtreeks* $\sum a_n z^n$ *met convergentiestraal* $R > 0$ *stelt op zijn convergentieschijf een willekeurig vaak complex differentieerbare funktie* $f(z)$ *voor. Voor elke* $j \geq 0$ *wordt de* j*-de afgeleide* $f^{(j)}(z)$ *gegeven door*

$$f^{(j)}(z) = \sum_{n \geq j} n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-j+1) a_n z^{n-j} \tag{3}$$

In het bijzonder is $a_j = \frac{1}{j!} f^{(j)}(0)$ *voor elke* $j \geq 0$. ∎

Laat U een open deelverzameling van $\mathbb{C}$ zijn. Een funktie $f : U \to \mathbb{C}$ heet *analytisch* (of *holomorf*) indien voor elk punt $\alpha \in U$ een in U gelegen open cirkelschijf D met middelpunt α bestaat zo dat f op D gegeven wordt door een machtreeks:

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-\alpha)^n \tag{4}$$

met $a_n \in \mathbb{C}$.

Wegens Gevolg 1.8 is de analytische funktie f op U willekeurig vaak complex differentieerbaar en zijn de afgeleide funkties $f^{(n)}$ weer analytisch. Verder geldt voor de coefficienten in (4) volgens Gevolg 1.8:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}. \tag{5}$$

We zien dat de machtreeksontwikkeling van de analytische funktie f, op de open schijf D, precies wordt gegeven door de bekende formule van de *Taylorreeks*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n. \tag{6}$$

1.3 Som en produkt van machtreeksen

Laat een tweetal machtreeksen $\sum a_n z^n$ en $\sum b_n z^n$, met convergentiestralen respectievelijk R_1 en R_2, gegeven zijn. Laat $R := \min(R_1, R_2)$ en neem aan dat $R > 0$ is. Deze machtreeksen definiëren funkties

$$f(z) := \sum a_n z^n \qquad \text{en} \qquad g(z) := \sum b_n z^n$$

op de open schijf $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$.

Ook de machtreeks $\sum (a_n + b_n) z^n$ convergeert dan voor elke $z \in D$ en er geldt

$$f(z) + g(z) = \sum (a_n + b_n) z^n \qquad \text{voor} \quad z \in D \tag{7}$$

Voor het produkt $f(z)g(z)$ zullen we de volgende, tamelijk voor de hand liggende, formule bewijzen

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n. \tag{8}$$

Hiertoe merken we eerst op dat volgens de rekenregels voor produkten van *eindige sommen* voor elke $N \geq 0$ geldt

$$\left(\sum_{n=0}^{N} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n + \sum_{n=N+1}^{2N}\left(\sum_{k=n-N}^{N} a_k b_{n-k}\right) z^n.$$

Vervolgens merken we op dat

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=N+1}^{2N}\left(\sum_{k=n-N}^{N} a_k b_{n-k}\right) z^n\right| &\leq \sum_{n=N+1}^{2N}\left(\sum_{k=n-N}^{N} |a_k z^k|\,|b_{n-k} z^{n-k}|\right)\\ &\leq \left(\sum_{k>N/2} |a_k z^k|\right)\left(\sum_{m\geq 0} |b_m z^m|\right) + \left(\sum_{k\geq 0} |a_k z^k|\right)\left(\sum_{m>N/2} |b_m z^m|\right).\end{aligned}$$

De limiet voor $N \to \infty$ van deze laatste uitdrukking is 0. Aldus blijkt:

$$\lim_{N\to\infty}\left|\left(\sum_{n=0}^{N} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{N} b_n z^n\right) - \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n\right| = 0$$

oftewel

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n.$$

Natuurlijk gelden een soortgelijke formules voor som en produkt ook voor machtreeksen rond een willekeurig punt α.

1.4 Enkele belangrijke machtreeksfunkties

Op dit moment hebben we voldoende theorie ontwikkeld om machtreeksontwikkelingen voor enkele bekende complex differentieerbare funkties af te leiden.

Voorbeelden.

1. De meetkundige reeks $\sum_{n\geq 0} z^n$ heeft convergentiestraal 1. De bijbehorende machtreeksfunktie valt op de open schijf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ samen met de funktie $\frac{1}{1-z}$:
$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n \tag{9}$$

Door beide leden van formule (9) te differentiëren en vervolgens met z te vermenigvuldigen vinden we

$$\frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n\geq 1} n z^n \qquad \text{voor} \quad |z| < 1.$$

2. De machtreeks $\sum \frac{z^n}{n!}$ heeft convergentiestraal ∞. Dus is

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

een complex differentieerbare funktie op $\mathbb{C}$. Uit Stelling 1.7 blijkt dat $f'(z) = f(z)$ voor alle $z \in \mathbb{C}$. Bovendien is $f(0) = 1$. Hieruit volgt $f(z) = e^z$. Dus:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{voor} \quad z \in \mathbb{C}. \tag{10}$$

3. Wanneer we de gebruikelijke definitie van de trigonometrische en hyperbolische funkties in termen van de exponentiële funktie uitbreiden naar complexe getallen, vinden we m.b.v. de bovengenoemde reeks voor e^z:

$$\begin{aligned}
\sin z &:= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \\
\cos z &:= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \\
\sinh z &:= \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1} \\
\cosh z &:= \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k}
\end{aligned}$$

geldig voor elke $z \in \mathbb{C}$. Verder blijkt

$$\begin{aligned}
&\sin z = -i \sinh(iz)\,, \qquad \cos z = \cosh(iz)\,, \\
&\sin' z = \cos z\,, \qquad \cos' z = -\sin z\,, \\
&\sinh' z = \cosh z\,, \quad \cosh' z = \sinh z\,.
\end{aligned}$$

4. De machtreeks $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ heeft convergentiestraal 1. Op de open schijf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ hebben we dus de funktie

$$g(z) := \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n. \tag{11}$$

De afgeleide van g is dan

$$g'(z) := \sum_{n\geq 1} (-z)^{n-1} = \frac{1}{1+z}. \tag{12}$$

Wanneer we nu de funktie $(1+z)^{-1}e^{g(z)}$ differentiëren, blijkt:

$$\left((1+z)^{-1}e^{g(z)}\right)' = -(1+z)^{-2}e^{g(z)} + (1+z)^{-1}g'(z)e^{g(z)} = 0.$$

Dus is $(1+z)^{-1}e^{g(z)}$ constant, gelijk aan 1 (want voor $z = 0$ is de funktiewaarde $(1+0)^{-1}e^{g(0)} = 1$, omdat $g(0) = 0$). Anders geschreven:

$$e^{g(z)} = 1 + z. \tag{13}$$

Het ligt nu voor de hand om i.p.v. de neutrale funktienaam g voor deze funktie de naam $\log(1+z)$ te introduceren. Dan wordt (11):

$$\log(1+z) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n. \tag{14}$$

en formule (12) wordt

$$(\log(1+z))' = \frac{1}{1+z}. \tag{15}$$

Opmerking. Aangezien we tot nu toe nog niet beschikten over een goede definitie voor de logaritme van een complex getal, moet men formule (14) interpreteren als een *definitie* van de funktie $\log(1+z)$ op de open schijf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

1.5 Machtreeksen en differentiaalvergelijkingen; een voorbeeld

Nu we beschikken over $\log(1+z)$ kunnen we voor elke $r \in \mathbb{R}$ ook de funktie $(1+z)^r$ op de open schijf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ definiëren door

$$(1+z)^r := e^{r\log(1+z)}. \tag{16}$$

We gaan voor deze funktie de machtreeksontwikkeling (Taylorreeks) rond 0 bepalen.

We schrijven

$$f(z) = (1+z)^r.$$

Dan is vanwege de kettingregel en vanwege formule (15)

$$f'(z) = r\frac{1}{1+z}e^{r\log(1+z)} = r\frac{1}{1+z}f(z)$$

dus

$$(1+z)f'(z) = rf(z). \tag{17}$$

We zijn op zoek naar de machtreeksontwikkeling van de funktie $f(z)$ rond 0; d.w.z. we zoeken coëfficiënten $a_n \in \mathbb{C}$ voor $n \geq 0$ zo dat

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

voor z in een klein cirkelschrijfje met middelpunt 0.
Opmerking: Pas als we de coëfficiënten a_n hebben berekend zullen we zien wat de convergentiestraal van de machtreeks is en dus hoe groot we dit cirkelschijfje kunnen nemen.

We vullen deze machtreeksontwikkeling in in de differentiaalvergelijking (17). Het linkerlid wordt dan

$$\begin{aligned}
(1+z)f'(z) &= (1+z)\sum_{n\geq 1} na_n z^{n-1} \\
&= \sum_{n\geq 1} na_n z^{n-1} + z\sum_{n\geq 1} na_n z^{n-1} \\
&= \sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}z^n + \sum_{n\geq 0} na_n z^n \\
&= \sum_{n\geq 0}((n+1)a_{n+1} + na_n)z^n
\end{aligned}$$

Het rechterlid wordt

$$rf(z) = \sum_{n\geq 0} ra_n z^n$$

Linker- en rechterlid zijn aan elkaar gelijk:

$$\sum_{n\geq 0}((n+1)a_{n+1}+na_n)z^n = \sum_{n\geq 0} ra_n z^n$$

Omdat twee machtreeksen alleen maar aan elkaar gelijk zijn als de overeenkomstige coëfficiënten gelijk zijn, voldoen de coëfficiënten a_n dus aan de vergelijkingen:

$$(n+1)a_{n+1}+na_n = ra_n \qquad \text{voor elke } \ n \geq 0.$$

Dit kan men herschrijven als

$$a_{n+1} = \frac{r-n}{n+1}a_n \qquad \text{voor elke } \ n \geq 0. \tag{18}$$

Men noemt (18) een *recursierelatie*. Daarnaast weten we

$$a_0 = f(0) = e^{r\log(1+0)} = e^0 = 1. \tag{19}$$

Met de recursie kan men nu a_1 berekenen uit a_0; vervolgens a_2 uit a_1; a_3 uit a_2 etc.:

$$\begin{aligned} a_1 &= ra_0 = r \\ a_2 &= \frac{r-1}{1+1}a_1 = \frac{r(r-1)}{1.2} \\ a_3 &= \frac{r-2}{2+1}a_2 = \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3} \end{aligned}$$

Het algemene resultaat is

$$a_n = \frac{r\cdot(r-1)\cdot\ldots\cdot(r-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}.$$

Omdat de uitdrukkingen in het rechterlid belangrijk zijn en vaak voorkomen heeft men er een standaardnotatie voor ingevoerd:
Notatie: Voor een reëel getal r en een geheel getal $n > 0$ definieert men

$$\binom{r}{n} := \frac{r\cdot(r-1)\cdot\ldots\cdot(r-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} \tag{20}$$

Verder definieert men $\binom{r}{0} := 1.$

Voor de funktie $f(z) = (1+z)^r$ hebben we m.b.v. de differentiaalvergelijking (17) en de beginwaarde $f(0) = 1$ de machtreeksontwikkeling rond 0 gevonden:

$$(1+z)^r = \sum_{n \geq 0} \binom{r}{n} z^n \tag{21}$$

Wat is de convergentiestraal van deze machtreeks?
Geval 1: r is een geheel getal ≥ 0. Dan is

$$\binom{r}{n} := \frac{r \cdot (r-1) \cdot \ldots \cdot (r-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} = 0 \qquad \text{als} \quad n > r\,,$$

omdat voor $n \geq r+1$ boven de streep de factor $r-(r+1)+1 = 0$ voorkomt. Als r is een geheel getal ≥ 0 is, zijn alle coëfficiënten vanaf de $r+1$-ste gelijk aan 0. De machtreeks heeft slechts eindig veel termen; is dus een polynoom en convergeert voor alle waarden van $z \in \mathbb{C}$. *De convergentiestraal is oneindig*

In het speciale geval dat r een geheel getal ≥ 0 is wordt (21)

$$(1+z)^r = \sum_{n=0}^{r} \binom{r}{n} z^n \tag{22}$$

Deze formule staat bekend als *het Binomium van Newton.* De coëfficiënten $\binom{r}{n}$ noemt men de *binomiaalcoëfficiënten.* Men kan gemakkelijk nagaan dat, wanneer r een geheel getal ≥ 0 is,

$$\binom{r}{n} = \frac{r!}{n!\,(r-n)!}.$$

Voorbeelden

$$\begin{aligned}
(1+z)^0 &= 1 \\
(1+z)^1 &= 1+z \\
(1+z)^2 &= 1+2z+z^2 \\
(1+z)^3 &= 1+3z+3z^2+z^3 \\
(1+z)^4 &= 1+4z+6z^2+4z^3+z^4 \\
(1+z)^5 &= 1+5z+10z^2+10z^3+5z^4+z^5
\end{aligned}$$

Geval 2: r is niet een geheel getal ≥ 0. Dan is

$$\binom{r}{n} \neq 0 \qquad \text{voor alle } \; n \geq 0$$

en is

$$\lim_{n\to\infty} \left| \binom{r}{n+1} \binom{r}{n}^{-1} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|r-n|}{n+1} = 1.$$

Daarom heeft de machtreeks in (21) *convergentiestraal* 1 *en geldt de gelijkheid in (21) alleen maar voor* $|z| < 1$:

$$(1+z)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} z^n \qquad \text{voor} \quad |z| < 1. \tag{23}$$

Voorbeelden

1. Voor $r = -1$ is

$$\binom{-1}{n} = \frac{(-1)\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(-n)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} = (-1)^n$$

en geeft (23) gewoon de meetkundige reeks

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n.$$

2. Voor $r = -2$ is

$$\binom{-2}{n} := \frac{(-2)\cdot(-3)\cdot\ldots\cdot(-n-1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} = (-1)^n(n+1)$$

en geeft (23)

$$\frac{1}{(1+z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^n,$$

een resultaat dat we in feite ook al kennen uit een eerder voorbeeld.

3. Voor $r = \frac{1}{2}$ geeft (23)

$$\sqrt{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} z^n = 1 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{16}z^3 - \frac{5}{128}z^4 + \ldots$$

2 Lineaire ruimten van funkties

We herinneren aan de uit het College Lineaire Algebra bekende definitie van een lineaire ruimte. Zoals gebruikelijk staat $\mathbb{R}$ voor de verzameling van de reële getallen en $\mathbb{C}$ voor de verzameling van de complexe getallen.

Definitie 2.1 Een *lineaire ruimte over* $\mathbb{R}$ (respectievelijk, *over* $\mathbb{C}$) is een verzameling V voorzien van de volgende strukturen

- een regel 'optelling' om aan ieder tweetal elementen $v, w \in V$ een element $v + w \in V$ (de *som* van v en w) toe te voegen
- een regel 'scalarvermenigvuldiging' om aan iedere $v \in V$ en $r \in \mathbb{R}$ (respectievelijk $r \in \mathbb{C}$) een element $rv \in V$ (het *produkt* van r en v) toe te voegen
- een regel 'tegengestelde' die aan iedere $v \in V$ een element $-v \in V$ (de *tegengestelde* van v) toevoegt
- een element $0 \in V$ (het *nulelement*, of de *nulvektor*)

zo dat voor alle $u, v, w \in V$ en alle $r, s \in \mathbb{R}$ (respectievelijk $r, s \in \mathbb{C}$) de onderstaande gelijkheden gelden

$$
\begin{array}{rcll}
(u+v)+w & = & u+(v+w) & \text{(associativiteit optelling)} \\
u+v & = & v+u & \text{(commutativiteit optelling)} \\
0+v & = & v & \text{(neutraal element optelling)} \\
v+(-v) & = & 0 & \text{(inverse voor optelling)} \\
r(u+v) & = & ru+rv & \text{(distributiviteit)} \\
(r+s)u & = & ru+su & \text{(distributiviteit)} \\
r(sv) & = & (rs)v & \text{(associativiteit vermenigvuldiging)} \\
1v & = & v & \text{(neutraal element vermenigvuldiging)}
\end{array}
$$

Opmerking. In het College Lineaire Algebra of het bijbehorende boek is wellicht de term *vektorruimte* (*vector space*) gebruikt voor wat wij hier een *lineaire ruimte* noemen. De elementen van zo'n vektorruimte werden toen *vektoren* genoemd. Wij gebruiken hier de term *lineaire ruimte* omdat we vooral geïnteresseerd zijn in ruimtes waarvan de elementen van nature funkties zijn. Een *funktie* vektor noemen zou dan wellicht verwarrend zijn.

Voorbeelden

1. In het eerste jaar spelen de vektorruimten $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ een hoofdrol. De elementen van $\mathbb{R}^3$ zijn drietallen (a_1, a_2, a_3) van reële getallen, die men componentsgewijs optelt en met een reële scalar vermenigvuldigt:

$$\begin{aligned}(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ r\,(a_1, a_2, a_3) &= (ra_1, ra_2, ra_3)\end{aligned}$$

2. In dit hoofdstuk, dat enige wiskundige achtergrond probeert te schetsen voor het college Quantummechanica, kijken we vooral naar lineaire ruimten waarvan de elementen reëelwaardige funkties zijn op een verzameling U, die men puntsgewijs optelt en met een reële scalar vermenigvuldigt: *Gegeven twee funkties f, $g : U \to \mathbb{R}$ en een scalar $r \in \mathbb{R}$ definiëren we de funkties $f + g$, $rf : U \to \mathbb{R}$ door*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)\,, \qquad (rf)(x) = r\,f(x) \qquad \text{voor elke} \quad x \in U.$$

   We zullen vooral kijken naar het geval waarin U een interval is in $\mathbb{R}$, mogelijk links of/en rechts onbegrensd.

   Zo nu en dan zullen we ook complexwaardige funkties bekijken op een reëel open interval U. Die vormen dan een lineaire ruimte over $\mathbb{C}$.

   In andere voorbeelden, waar we hier weinig aandacht aan besteden, maar die in de natuurkunde toch ook heel belangrijk zijn, is U een deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ of $\mathbb{R}^3$.

3. Wanneer men in het vorige voorbeeld voor U neemt de verzameling $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, dan vindt men in feite gewoon de lineaire ruimte $\mathbb{R}^n$.

4. Neemt men voor U de verzameling $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ van alle niet-negatieve gehele getallen, dan zijn de elementen van de bijbehorende lineaire ruimte precies de (oneindige) rijen $\{a_n\}_{n \geq 0}$ van reële (c.q. complexe) getallen.

We herinneren aan de uit het College Lineaire Algebra bekende definitie van een lineaire deelruimte.

Definitie 2.2 Zij V een lineaire ruimte en W een deelverzameling van V. Dan is W een *lineaire deelruimte van* V als voldaan is aan de volgende drie voorwaarden

1. De verzameling W is *niet leeg*.
2. Als v en w elementen zijn van W dan is ook $v + w \in W$.
3. Als $v \in W$ is en $r \in \mathbb{R}$ dan is $rv \in W$.

Opmerkingen.

1. Per definitie bevat V een element 0. Men kan de eis dat W niet leeg mag zijn, vervangen door de eis dat dit element 0 in W moet liggen.
2. In de bovenstaande definitie zijn $v + w$ en rv a priori elementen van V. De extra eis is dat ze in feite in W liggen.
3. Als W een lineaire deelruimte is van een lineaire ruimte V dan is W zelf ook een lineaire ruimte, met de van V geërfde regels voor optelling, scalarvermenigvuldiging, tegengestelde en nulelement.

Voorbeelden Een lineaire deelruimte van V bestaat uit elementen van V die een aantal extra eigenschappen hebben. Hier zijn een aantal voorbeelden van lineaire deelruimten voor het geval dat V de lineaire ruimte is van alle reëelwaardige funkties op een open interval $U \subset \mathbb{R}$

1. De verzameling van alle *continue funkties* $U \to \mathbb{R}$ is een lineaire deelruimte van V; immers, de nulfunktie is continu, de som van twee continue funkties is continu en ieder veelvoud van een continue funktie is continu.
2. De verzameling van alle *differentieerbare funkties* $U \to \mathbb{R}$ is een lineaire deelruimte van V; immers, de nulfunktie is differentieerbaar, de som van twee differentieerbare funkties is differentieerbaar en ieder veelvoud van een differentieerbare funktie is differentieerbaar.
3. Voor ieder positief geheel getal k is de verzameling van alle *k-maal continu differentieerbare funkties* $U \to \mathbb{R}$ een lineaire deelruimte van V; immers, ... Deze ruimte noteert men vaak als $C^k(U)$.

4. De verzameling van alle *willekeurig vaak differentieerbare funkties* $U \to \mathbb{R}$ is een lineaire deelruimte van V; immers, ... Deze ruimte noteert men vaak als $C^\infty(U)$.

5. Als $a \in U$ een gegeven punt is, dan is de verzameling van alle funkties $f : U \to \mathbb{R}$ die in a nul zijn (d.w.z. $f(a) = 0$) een lineaire deelruimte van V; immers, ...

   Daarentegen is de verzameling van alle funkties $f : U \to \mathbb{R}$ die in a de waarde 1 hebben (d.w.z. $f(a) = 1$) *niet* een lineaire deelruimte van V; bijvoorbeeld omdat de nulfunktie in a niet de waarde 1 heeft.

6. Men zegt dat een funktie $f : U \to \mathbb{R}$ *begrensd* is, als er een constante $M \in \mathbb{R}$ is zo dat voor elke $x \in U$ geldt $|f(x)| < M$; merk op dat hier de constante M van de funktie f afhangt.

   De verzameling van alle *begrensde funkties* $U \to \mathbb{R}$ is een lineaire deelruimte van V; immers, de nulfunktie is begrensd; als f en g begrensde funkties zijn, zeg $|f(x)| < M_1$ en $|g(x)| < M_2$ voor elke $x \in U$, dan is $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)| < M_1+M_2$ voor elke $x \in U$, d.w.z. $f+g$ is een begrensde funktie. Net zo bewijst men, dat als f een begrensde funktie is en $r \in \mathbb{R}$, dan is de funktie rf begrensd.

7. Als $U =]p, q[$, dan is de verzameling van alle funkties $f : U \to \mathbb{R}$ waarvoor $\lim_{x\uparrow q} f(x)$ bestaat als reëel getal, een lineaire deelruimte van V.

   De verzameling van alle funkties $f : U \to \mathbb{R}$ waarvoor $\lim_{x\uparrow q} f(x) = 0$ is, is eveneens een lineaire deelruimte van V.

   Daarentegen, is de verzameling van alle funkties $f : U \to \mathbb{R}$ waarvoor $\lim_{x\uparrow q} f(x) = 1$ is, niet een lineaire deelruimte van V.

8. Drie varianten op het vorige voorbeeld:
   - q mag ∞ zijn;
   - bekijk $\lim_{x\downarrow p} f(x)$ i.p.v. $\lim_{x\uparrow q} f(x)$;
   - ook $p = -\infty$ mag.

9. Zij $P \in \mathbb{R}, P > 0$ gegeven. Men zegt dat een funktie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *periodiek is met periode* P (of kortweg P-periodiek) als voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt $f(x + P) = f(x)$.

De P-periodieke funkties vormen een lineaire deelruimte van V (in dit geval is $U = \mathbb{R}$).

10. Zij $U = \mathbb{R}$ of $U =]-a, a[$ of $U = [-a, a]$ met $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

    Men zegt dat een funktie $f : U \to \mathbb{R}$ een *even funktie* is als $f(-x) = f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. De even funkties vormen een lineaire deelruimte van V.

    Men zegt dat een funktie $f : U \to \mathbb{R}$ een *oneven funktie* is als $f(-x) = -f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. De oneven funkties vormen een lineaire deelruimte van V.

11. De doorsnede $W_1 \cap W_2$ van twee lineaire deelruimten W_1 en W_2 is ook weer een lineaire deelruimte van V.

    Dit betekent dat men deelruimten van V kan maken waarvan de elementen voldoen aan een aantal van de voorwaarden uit de voorgaande voorbeelden.

    Zo is de verzameling van alle begrensde tweemaal continu differentieerbare funkties $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ die voldoen aan $f(1) = 0$ en $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$, een lineaire deelruimte van V.

We herinneren aan de uit het College Lineaire Algebra bekende definitie van een lineaire (on-)afhankelijkheid.

Definitie 2.3 Laat V een lineaire ruimte zijn over $\mathbb{R}$ (resp. over $\mathbb{C}$) en $v_1, \ldots, v_n$ een eindig aantal elementen in V. Men zegt dat $v_1, \ldots, v_n$ *lineair afhankelijk* zijn als er getallen $r_1, \ldots, r_n$ in $\mathbb{R}$ (resp. in $\mathbb{C}$) zijn die niet allemaal 0 zijn en waarvoor geldt

$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_n v_n = 0.$$

Men zegt dat $v_1, \ldots, v_n$ *lineair onafhankelijk* zijn als ze niet lineair afhankelijk zijn; d.w.z. als

$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_n v_n = 0 \qquad \text{impliceert} \qquad r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0.$$

3 Het spectrum van een lineaire operator op een funktieruimte

We herinneren aan de uit het College Lineaire Algebra bekende definitie van een lineaire afbeelding.

Definitie 3.1 Laat V_1 en V_2 twee lineaire ruimtes zijn over $\mathbb{R}$ (respectievelijk over $\mathbb{C}$). Men zegt dan dat een afbeelding $\varphi : V_1 \to V_2$ een *lineaire afbeelding* is als geldt

$$\varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w)\,, \qquad \varphi(rv) = r\,\varphi(v)$$

voor alle v, $w \in V_1$ en $r \in \mathbb{R}$ (respectievelijk $r \in \mathbb{C}$).

Een lineaire afbeelding $\varphi : V \to V$ van een lineaire ruimte V naar dezelfde lineaire ruimte V noemt men vaak een *lineaire operator*.

Voorbeelden

1. Zij $C^0(U)$ de lineaire ruimte van alle continue funkties op U. Voor vaste $a \in U$ is de afbeelding

$$C^0(U) \to \mathbb{R}\,, \qquad f \mapsto f(a)$$

die aan een funktie z'n waarde in a toevoegt, een lineaire afbeelding.

2. Laat $C^1(U)$ resp. $C^2(U)$ de ruimte zijn van de funkties $U \to \mathbb{R}$ die eenmaal resp. tweemaal continu differentieerbaar zijn. Dan is de afbeelding

$$C^2(U) \to C^1(U)\,, \qquad f \mapsto f'$$

die aan een funktie z'n afgeleide toevoegt, een lineaire afbeelding.

3. Laat $C^\infty(U)$ de ruimte zijn van de funkties $U \to \mathbb{R}$ die willekeurig vaak differentieerbaar zijn. Definieer de afbeelding $\varphi : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ door aan een funktie $f \in C^\infty(U)$ toe te voegen de funktie $\varphi(f)$ gegeven door

$$(\varphi(f))(x) \;=\; x^2\, f''(x) + x f'(x) + 3f(x).$$

Dan geeft dit een lineaire afbeelding

$$\varphi : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$$

We herinneren aan de uit het College Lineaire Algebra bekende definitie van eigenwaarde en eigenvektor van een lineaire operator.

Definitie 3.2 Laat V een lineaire ruimte zijn over $\mathbb{R}$ (respectievelijk over $\mathbb{C}$) en $\varphi : V \to V$ een *lineaire afbeelding*. Een getal $\lambda \in \mathbb{R}$ (resp. $\lambda \in \mathbb{C}$) is een *eigenwaarde* van de lineaire operator φ als er een element $v \in V$ is zo dat

$$v \neq 0 \qquad \text{en} \qquad \varphi(v) = \lambda v.$$

Afhankelijk van de context noemt men deze v een *eigenvektor* of een *eigenfunktie* van φ. De verzameling

$$V_\lambda := \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$$

noemt men de *eigenruimte* van de lineaire operator φ bij de eigenwaarde λ.

Opmerking: De vektor 0 is nooit een eigenvektor, maar zit wel altijd in de eigenruimte. Iedere vektor in V_λ die niet 0 is, is een eigenvektor van φ bij de eigenwaarde λ.

Definitie 3.3 De verzameling van alle eigenwaarden van de lineaire operator $\varphi : V \to V$ noemen we het *spectrum* van φ.

Opmerking: We zijn hier, vergeleken met de literatuur, een beetje slordig met de terminologie. De definitie die men in de literatuur vindt is: *het spectrum van φ is de verzameling van die complexe getallen λ waarvoor de operator $\varphi - \lambda I$ geen begrensde inverse heeft.* Hier is $I : V \to V$ de identieke afbeelding , d.w.z. $I(v) = v$ voor elke $v \in V$.

Als λ een eigenwaarde is van φ heeft $\varphi - \lambda I$ überhaupt geen inverse. Wat wij hier het spectrum van φ noemen is dus een deelverzameling van wat in de literatuur het spectrum van φ wordt genoemd. Het laatste kan echter meer getallen bevatten. De subtiliteit zit in het woordje “begrensde”. Op deze subtiliteit willen we in deze cursus niet ingaan. De bovenstaande definitie is voor de ons voor ogen staande voorbeelden voldoende.

Lemma 3.4

1. *Voor elk getal λ is de verzameling $V_\lambda := \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$ een lineaire deelruimte van V. Deze deelruimte bestaat uit meer dan alleen het nulelement precies dan als λ een eigenwaarde van φ is.*

2. *Laat $\varphi, \psi : V \to V$ twee lineaire operatoren zijn op een lineaire ruimte V over $\mathbb{R}$ (resp. over $\mathbb{C}$) en laat $a, b \in \mathbb{R}$ (resp. $a, b \in \mathbb{C}$). Definieer de afbeeldingen*

$$a\varphi + b\psi : V \to V \qquad \text{en} \qquad \varphi\psi : V \to V$$

door: voor elke $v \in V$ is

$$\begin{aligned} (a\varphi + b\psi)(v) &= a\varphi(v) + b\psi(v)\,, \\ (\varphi\psi)(v) &= \varphi(\psi(v))\,. \end{aligned}$$

Dan zijn $a\varphi + b\psi$ en $\varphi\psi$ ook weer lineaire operatoren op V.

Bewijs: wordt aan de lezer overgelaten. ■

Opmerking: Men noemt $\varphi\psi$ de *samenstellling* of het *produkt* van de operatoren φ en ψ. In plaats van $\varphi\psi$ gebruikt men ook vaak de notatie $\varphi \circ \psi$. In het algemeen zijn de operatoren $\varphi\psi$ en $\psi\varphi$ niet aan elkaar gelijk. In het bijzondere geval dat wel geldt $\varphi\psi = \psi\varphi$ zegt men dat de operatoren φ en ψ *commuteren*.

Lemma 3.5 *Laat $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ verschillende eigenwaarden zijn van een lineaire operator $\varphi : V \to V$. Laat $v_1, \ldots, v_n \in V$ bijbehorende eigenvektoren zijn (d.w.z. v_j is eigenvektor bij eigenwaarde λ_j).*
Dan zijn $v_1, \ldots, v_n$ lineair onafhankelijk.

Bewijs: Schrijf I voor de identieke afbeelding $V \to V$, d.w.z. $I(v) = v$ voor elke $v \in V$. Dan hebben we ook de lineaire operatoren $\varphi - \lambda_j I$ voor $j = 1, 2, \ldots, n$ en hun samenstellingen, zoals $(\varphi - \lambda_1 I)(\varphi - \lambda_2 I) \circ \ldots \circ (\varphi - \lambda_{n-1} I)$.

Merk op dat

$$(\varphi - \lambda_1 I)(\varphi - \lambda_2 I) \circ \ldots \circ (\varphi - \lambda_{n-1} I)v_i = (\lambda_i - \lambda_1)(\lambda_i - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda_i - \lambda_{n-1})v_i$$

en dat dit 0 is voor $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Veronderstel dat V een lineaire ruimte is over $\mathbb{R}$ en dat $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ zo zijn dat

$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_n v_n = 0.$$

Laten we op deze relatie de operator $(\varphi - \lambda_1 I)(\varphi - \lambda_2 I) \circ \ldots \circ (\varphi - \lambda_{n-1} I)$ los, dan vinden we

$$(\lambda_n - \lambda_1)(\lambda_n - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda_{n-1}) r_n v_n = 0.$$

Omdat $\lambda_1, \ldots \lambda_{n-1}$ allemaal ongelijk λ_n zijn en omdat v_n een eigenvektor is, dus $v_n \neq 0$, volgt hieruit $r_n = 0$.

Op precies dezelfde manier bewijst men $r_j = 0$ voor $j = 1, 2, \ldots, n$. Dus zijn $v_1, \ldots, v_n$ lineair onafhankelijk.

Het voorgaande bewijs werkt zonder wijziging ook als V een lineaire ruimte is over $\mathbb{C}$ en $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{C}$ zijn. ■

Voorbeelden

1. Neem de lineaire ruimte $C^0(\mathbb{R})$ van alle continue reële funkties op $\mathbb{R}$ en bekijk de lineaire operator $J : C^0(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ gegeven door aan een funktie $f \in C^0(\mathbb{R})$ toe te voegen de funktie $J(f)$ gegeven door $(J(f))(x) = f(-x)$.

   Laat λ een eigenwaarde zijn van J en f een bijbehorende eigenfunktie. Dan is enerzijds

   $$(J^2(f))(x) = (J(J(f)))(x) = (J(f))(-x) = f(-(-x)) = f(x)\,,$$

   dus $J^2(f) = f$, en anderzijds

   $$J^2(f) = J(\lambda f) = \lambda J(f) = \lambda^2 f.$$

   Dus $\lambda^2 f = f$. Omdat f niet de nulfunktie is, moet $\lambda^2 = 1$ zijn. We zien dat getallen anders dan 1 en -1 geen eigenwaarden kunnen zijn.

Om te laten zien dat 1 en -1 ook werkelijk eigenwaarden zijn, geven we expliciete voorbeelden van eigenfunkties: $\cos x$ is een eigenfunktie bij de eigenwaarde 1 en $\sin x$ is een eigenfunktie bij de eigenwaarde -1.

Conclusie: *Het spectrum van de lineaire operator J op de lineaire ruimte $C^0(\mathbb{R})$ is $\{-1, 1\}$. De eigenruimte bij de eigenwaarde 1 is de ruimte van alle even continue funkties en de eigenruimte bij de eigenwaarde -1 is de ruimte van alle oneven continue funkties. Beide eigenruimtes zijn oneindig dimensionaal.*

2. Neem de lineaire ruimte $C^\infty(\mathbb{R})$ van alle willekeurig vaak differentieerbare reële funkties op $\mathbb{R}$ en bekijk de lineaire operator $D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ gegeven door $Df = f'$, de afgeleide van de funktie f. Om te zien of een reëel getal λ een eigenwaarde van D is moeten we een oplossing, anders dan de nulfunktie, vinden voor de differentiaalvergelijking

$$f' = \lambda f.$$

Het is bekend dat de oplossingen van deze differentiaalvergelijking zijn $ce^{\lambda x}$ met c een reële constante.

Conclusie: *Het spectrum van de lineaire operator D op de lineaire ruimte $C^\infty(\mathbb{R})$ is $\mathbb{R}$. De eigenruimte bij de eigenwaarde λ is 1-dimensionaal, met $e^{\lambda x}$ als basis.*

3. Neem weer de lineaire ruimte $C^\infty(\mathbb{R})$ van alle willekeurig vaak differentieerbare reële funkties op $\mathbb{R}$ en bekijk nu de lineaire operator $D^2 : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ gegeven door $D^2 f = f''$, de tweede afgeleide van de funktie f. Om te zien of een reëel getal λ een eigenwaarde van D^2 is moeten we een oplossing, anders dan de nulfunktie, vinden voor de differentiaalvergelijking

$$f'' = \lambda f.$$

Het is bekend dat de oplossingen van deze differentiaalvergelijking zijn

$$\begin{array}{rcc} c_1 e^{x\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-x\sqrt{\lambda}} & \text{als} & \lambda > 0 \\ c_1 + c_2 x & \text{als} & \lambda = 0 \\ c_1 \cos(x\sqrt{-\lambda}) + c_2 \sin(x\sqrt{-\lambda}) & \text{als} & \lambda < 0 \end{array}$$

met c_1 en c_2 reële constanten.

Conclusie: *Het spectrum van de lineaire operator* D^2 *op de lineaire ruimte* $C^\infty(\mathbb{R})$ *is* $\mathbb{R}$*. De eigenruimte bij de eigenwaarde* λ *is* 2-*dimensionaal, met basis* $\{e^{x\sqrt{\lambda}}, e^{-x\sqrt{\lambda}}\}$ *als* $\lambda > 0$*, respectievelijk* $\{1, x\}$ *als* $\lambda = 0$*, respectievelijk* $\{\cos(x\sqrt{-\lambda}), \sin(x\sqrt{-\lambda})\}$ *als* $\lambda < 0$.

4. Neem nu de lineaire ruimte $C^\infty_{\text{even}}(\mathbb{R})$ van alle even reëelwaardige funkties op $\mathbb{R}$, die willekeurig vaak differentieerbaar zijn. Met de kettingregel kan men gemakkelijk inzien dat de afgeleide van een even funktie een oneven funktie is en dat de afgeleide van een oneven funktie een even funktie is. De tweede afgeleide van een even funktie is dus weer een even funktie. De lineaire operator D^2 uit het voorgaande voorbeeld beeldt dus de deelruimte $C^\infty_{\text{even}}(\mathbb{R})$ binnen zichzelf af; d.w.z. D^2 induceert een lineaire operator

   $$D^2_{\text{even}} : C^\infty_{\text{even}}(\mathbb{R}) \to C^\infty_{\text{even}}(\mathbb{R}).$$

   Om te zien of een reëel getal λ een eigenwaarde van D^2_{even} is moeten we een even funktie, anders dan de nulfunktie, vinden die voldoet aan de differentiaalvergelijking

   $$f'' = \lambda f.$$

   Gelet op wat over deze differentiaalvergelijking is gezegd in het voorgaande voorbeeld, blijken nu de oplossingen te worden gegeven door

   $$\begin{array}{rcl} c\cosh(x\sqrt{\lambda}) & \text{als} & \lambda > 0 \\ c & \text{als} & \lambda = 0 \\ c\cos(x\sqrt{-\lambda}) & \text{als} & \lambda < 0 \end{array}$$

   met c een reële constante.

   Conclusie: *Het spectrum van de lineaire operator* D^2_{even} *op de lineaire ruimte* $C^\infty_{\text{even}}(\mathbb{R})$ *is* $\mathbb{R}$*. De eigenruimte bij de eigenwaarde* λ *is* 1-*dimensionaal, met basis* $\cosh(x\sqrt{\lambda})$ *als* $\lambda > 0$*, respectievelijk* 1 *als* $\lambda = 0$*, respectievelijk* $\cos(x\sqrt{-\lambda})$ *als* $\lambda < 0$.

5. Neem nu, voor een positief reëel getal P, de lineaire ruimte $C^\infty_{P-\text{per}}(\mathbb{R})$ van alle P-periodieke reëelwaardige funkties op $\mathbb{R}$, die willekeurig vaak differentieerbaar zijn. Met de kettingregel kan men gemakkelijk inzien dat de afgeleide van een P-periodieke funktie weer een P-periodieke funktie is. De lineaire operator D^2 uit voorbeeld 3 hierboven beeldt

dus de deelruimte $C^\infty_{P-\mathrm{per}}(\mathbb{R})$ binnen zichzelf af; d.w.z. D^2 induceert een lineaire operator

$$D^2_{P-\mathrm{per}} : C^\infty_{P-\mathrm{per}}(\mathbb{R}) \to C^\infty_{P-\mathrm{per}}(\mathbb{R}).$$

Om te zien of een reëel getal λ een eigenwaarde van $D^2_{P-\mathrm{per}}$ is moeten we een P-periodieke funktie, anders dan de nulfunktie, vinden die voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$f'' = \lambda f.$$

Uit de oplossingen van deze differentiaalvergelijking in voorbeeld 2 moeten we de P-periodieke selecteren:

Het geval $\lambda > 0$: als de funktie $c_1 e^{x\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-x\sqrt{\lambda}}$ P-periodiek is, dan is voor ieder geheel getal k

$$c_1 e^{kP\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-kP\sqrt{\lambda}} = c_1 + c_2.$$

Als $c_1 \neq 0$ is dan heeft het linkerlid voor $k \to \infty$ limiet $\pm\infty$ en het rechterlid limiet $c_1 + c_2$. Dat kan niet! Dus moet $c_1 = 0$ zijn. Dan is $c_2 = c_2 e^{-kP\sqrt{\lambda}}$ voor elke $k \in \mathbb{Z}$. Nemen we nu weer de limiet voor $k \to \infty$ dan blijkt ook $c_2 = 0$ te zijn. We zien: *als $\lambda > 0$ is, dan is de enige periodieke oplossing de nulfunktie; en dus is λ geen eigenwaarde van $D^2_{P-\mathrm{per}}$.*

Het geval $\lambda = 0$: als de funktie $c_1 + c_2 x$ P-periodiek is, dan is $c_1 + c_2 P = c_1$. Dus is $c_2 = 0$. De funktie is constant, gelijk aan c_1. Alle constante funkties zijn, uiteraard, periodiek. We zien: 0 *is een eigenwaarde van $D^2_{P-\mathrm{per}}$; de bijbehorende eigenfunkties zijn de constante funkties (behalve de nulfunktie).*

Het geval $\lambda < 0$: bekijk de funktie $f(x) = c_1 \cos(x\sqrt{-\lambda}) + c_2 \sin(x\sqrt{-\lambda})$ en neem aan dat deze funktie P-periodiek is en dat f niet de nulfunktie is. Standaard trigonometrische formules laten zien dat we f ook kunnen schrijven als

$$f(x) = a\cos(\beta + x\sqrt{-\lambda})$$

met $a > 0$, $0 \leq \beta < 2\pi$ en $c_1 = a\cos\beta$, $c_2 = -a\sin\beta$. De funktie f neemt z'n maximale waarde a aan precies in de punten

$x_k = (2\pi k - \beta)/\sqrt{-\lambda}$ met $k \in \mathbb{Z}$. Vanwege de veronderstelde P-periodiciteit neemt f dan ook de maximale waarde a aan in $x_0 + P$. Er moet dus een geheel getal k zijn zo dat

$$P - \beta/\sqrt{-\lambda} = (2\pi k - \beta)/\sqrt{-\lambda}\,;$$

oftewel $P = 2\pi k/\sqrt{-\lambda}$. We zien: *als er geen geheel getal k is zo dat $P = 2\pi k/\sqrt{-\lambda}$ dan is λ* niet *een eigenwaarde van de lineaire operator $D^2_{P-\mathrm{per}}$; als er wel een geheel getal k is zo dat $P = 2\pi k/\sqrt{-\lambda}$ dan is λ* wel *een eigenwaarde van de lineaire operator $D^2_{P-\mathrm{per}}$.*

Conclusie: *Het spectrum van de lineaire operator $D^2_{P-\mathrm{per}}$ op de lineaire ruimte $C^{\infty}_{P-\mathrm{per}}(\mathbb{R})$ is*

$$\left\{ -\frac{4\pi^2 k^2}{P^2} \quad \middle| \quad k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

De eigenruimte bij de eigenwaarde 0 is 1-dimensionaal en bestaat uit de constante funkties. De eigenruimte bij de eigenwaarde $-\frac{4\pi^2k^2}{P^2}$ (met $k \neq 0$) is 2-dimensionaal, met basis $\cos(\frac{2\pi k}{P}x)$ en $\sin(\frac{2\pi k}{P}x)$.

Opmerking: De operator $D^2_{P-\mathrm{per}}$ wordt gegeven door de dezelfde formule als de operator D^2 uit voorbeeld 3 (namelijk $D^2_{P-\mathrm{per}}f = D^2 f = f''$). Toch heeft hij een ander spectrum. We moeten in deze kwesties dus nauwkeurig in de gaten houden op welke ruimte de lineaire operator is gedefinieerd; beperking tot een lineaire deelruimte leidt al gauw tot een kleiner spectrum.

4 Speciale operatoren, hun spectra en eigenfunkties

In deze paragraaf bekijken we enkele lineaire operatoren die van belang zijn in, bijvoorbeeld, de Quantummechanica. Voor de fysische achtergrond van deze operatoren verwijzen we naar het college Quantummechanica.

4.1 De Hermite operator

De *Schrödinger eigenwaarde vergelijking* voor de lineaire harmonische oscillator luidt, na enige normalisatie,

$$\psi''(x) + (\lambda - x^2)\psi(x) = 0. \tag{24}$$

Het gaat hier in eerste instantie om het bepalen van de eigenwaarden en eigenfunkties van de lineaire operator

$$D_{\mathrm{Sch}} : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})\,, \qquad (D_{\mathrm{Sch}}\psi)(x) = \psi''(x) - x^2\psi(x)$$

In (24) is $-\lambda$ dan de eigenwaarde en ψ een bijbehorende eigenfunktie.

We zullen eerst dit eigenwaarde probleem behandelen, en vervolgens bekijken welke beperkende invloed een tweede eis vanuit de fysica (de eigenfunktie $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ moet begrensd zijn) heeft op het spectrum.

In plaats van rechtstreeks het spectrum van de Schrödinger operator D_{Sch} te bepalen bepalen we het spectrum van de Hermite operator

$$D_{\mathrm{Her}} : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})\,, \qquad D_{\mathrm{Her}}(f) := e^{x^2/2} D_{\mathrm{Sch}}(e^{-x^2/2} f).$$

Uit deze definitie van D_{Her} men ziet meteen:

$\psi(x)$ is een eigenfunktie van D_{Sch} bij de eigenwaarde $-\lambda$

precies dan als

$e^{x^2/2}\psi(x)$ is een eigenfunktie van D_{Her} bij de eigenwaarde $-\lambda$.

Anderzijds geeft de volgende berekening een hanteerbare vorm voor de operator D_{Her}:

$$\begin{aligned} D_{\mathrm{Her}}(f) &= e^{x^2/2} D_{\mathrm{Sch}}(e^{-x^2/2} f) = e^{x^2/2}\left[(e^{-x^2/2} f)'' - x^2 e^{-x^2/2} f\right] \\ &= e^{x^2/2}\left[(-x e^{-x^2/2} f + e^{-x^2/2} f')' - x^2 e^{-x^2/2} f\right] \end{aligned}$$

$$= e^{x^2/2}\left[-e^{-x^2/2}f + x^2e^{-x^2/2}f - xe^{-x^2/2}f' - xe^{-x^2/2}f' + e^{-x^2/2}f''\right] - x^2 f$$
$$= f'' - 2xf' - f$$

De Schrödinger eigenwaarde vergelijking (24) voor de funktie ψ is equivalent met de vergelijking

$$f''(x) - 2xf'(x) + (\lambda - 1)\, f(x) = 0 \qquad (25)$$

voor de funktie $f = e^{x^2/2}\psi$. Men noemt (25) de *vergelijking van Hermite.*

We proberen een oplossing van (25) te vinden die wordt gegeven door een machtreeks:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Voor zo'n machtreeks is

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ f''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n \end{aligned}$$

en dus

$$f''(x) - 2xf'(x) + (\lambda-1)\, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (2n+1-\lambda)a_n\right]x^n$$

We zien dat de machtreeksfunktie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking (25) precies dan als de coëfficiënten voldoen aan de *recursie relatie*

$$a_{n+2} = \frac{2n+1-\lambda}{(n+2)(n+1)}\, a_n \qquad \text{voor} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

oftewel

$$a_n = \frac{2n-3-\lambda}{n(n-1)}\, a_{n-2} \qquad \text{voor} \quad n = 2, 3, 4, 5, \ldots$$

De coëfficiënten a_0 en a_1 zijn blijkbaar vrij te kiezen. De andere coëfficiënten liggen dan vast door de recursie:
als n even is dan

$$a_n = \frac{(2n-3-\lambda)(2n-7-\lambda)\cdot\ldots\cdot(1-\lambda)}{n!}\cdot a_0$$

als n oneven is dan

$$a_n = \frac{(2n-3-\lambda)(2n-7-\lambda)\cdot\ldots\cdot(3-\lambda)}{n!}\cdot a_1.$$

Zo blijkt

$$f(x) = a_0 \cdot H_\lambda^{\text{even}}(x) \; + \; a_1 \cdot H_\lambda^{\text{oneven}}(x) \tag{26}$$

met

$$\begin{aligned} H_\lambda^{\text{even}}(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-\lambda)(5-\lambda)\cdot\ldots\cdot(4k-3-\lambda)}{(2k)!}\cdot x^{2k} \\ H_\lambda^{\text{oneven}}(x) &= x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3-\lambda)(7-\lambda)\cdot\ldots\cdot(4k-1-\lambda)}{(2k+1)!}\cdot x^{2k+1} \end{aligned}$$

De recursierelatie laat zien

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+2}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1-\lambda}{(n+2)(n+1)} = 0.$$

Volgens een eenvoudige variant van Stelling 1.4 bewijst dit dat de machtreeksen $f(x)$, $H_\lambda^{\text{even}}(x)$ en $H_\lambda^{\text{oneven}}(x)$ convergentiestraal ∞ hebben; d.w.z. ze definiëren funkties op de hele reële lijn $\mathbb{R}$.

Het voorgaande leert dat $H_\lambda^{\text{even}}(x)$ en $H_\lambda^{\text{oneven}}(x)$ een basis vormen van de lineaire ruimte van *machtreeksoplossingen* van de differentiaalvergelijking (25). Men kan bewijzen dat in feite $H_\lambda^{\text{even}}(x)$ en $H_\lambda^{\text{oneven}}(x)$ een basis vormen van de lineaire ruimte van alle $C^\infty(\mathbb{R})$-*oplossingen* van (25).

Conclusie:

Het spectrum van de Hermite operator D_{Her} op de lineaire ruimte $C^\infty(\mathbb{R})$ is $\mathbb{R}$. De eigenruimte bij de eigenwaarde $-\lambda$ is 2-dimensionaal en heeft als basis $H_\lambda^{\text{even}}(x)$ en $H_\lambda^{\text{oneven}}(x)$

Het spectrum van de Schrödinger operator D_{Sch} op de lineaire ruimte $C^\infty(\mathbb{R})$ is $\mathbb{R}$. De eigenruimte bij de eigenwaarde $-\lambda$ is 2-dimensionaal en heeft als basis $e^{-x^2/2}H_\lambda^{\text{even}}(x)$ en $e^{-x^2/2}H_\lambda^{\text{oneven}}(x)$

Fysisch relevant zijn alleen die oplossingen van de Schrödinger vergelijking (24) die begrensde funkties zijn op $\mathbb{R}$. Om die te vinden onderzoeken we eerst het groeigedrag van de funkties $H_\lambda^{\text{even}}(x)$ en $H_\lambda^{\text{oneven}}(x)$.

De definitie van $H_\lambda^{\mathrm{even}}(x)$ laat zien dat, wanneer λ een geheel getal is van de vorm $\lambda = 4N+1$ met $N \in \mathbb{Z}, N \geq 0$, dan zijn in de reeks van $H_\lambda^{\mathrm{even}}(x)$ de coëfficiënten met $k > N$ nul en dus is $H_{4N+1}^{\mathrm{even}}(x)$ een polynoom:

$$H_{4N+1}^{\mathrm{even}}(x) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{N!}{(2k)!(N-k)!} 4^k x^{2k}. \tag{27}$$

De bijbehorende oplossing van de Schrödinger vergelijking (24) is

$$e^{-x^2/2} H_{4N+1}^{\mathrm{even}}(x)$$

en dat is inderdaad een begrensde funktie (de limieten voor $x \to \infty$ en voor $x \to -\infty$ zijn 0). *Voor* $\lambda = 4N+1$ *met* $N \in \mathbb{Z}, N \geq 0$ *hebben we dus een fysisch acceptabele oplossing.*

Veronderstel nu dat λ niet een getal is van de vorm $4N+1$ met $N \in \mathbb{Z}, N \geq 0$. Dan zijn alle coëfficiënten in de machtreeks $H_\lambda^{\mathrm{even}}(x) = \sum_{k=0}^\infty c_k x^{2k}$ ongelijk 0. Uit de recursierelatie voor twee opeenvolgende coëfficiënten weten we dat

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{4k+1-\lambda}{(2k+2)(2k+1)} = \frac{1}{k+1}\left(1 - \frac{1+\lambda}{4k+2}\right)$$

Als $k > \lambda + \frac{1}{2}$ is dan is $\frac{1+\lambda}{4k+2} < \frac{1}{4}$ en dus

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} > \frac{1}{k+1} \cdot \frac{3}{4}$$

Zij nu m het kleinste positieve gehele getal groter dan $\lambda + \frac{1}{2}$. Dan is voor $k \geq m$

$$\frac{c_k}{c_m} > \frac{m!}{k!} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{k-m}.$$

We zien

$$H_\lambda^{\mathrm{even}}(x) = P(x) + m! c_m \left(\frac{3}{4}\right)^{-m} Q(x)$$

met

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} \left[c_k - c_m \frac{m!}{k!}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-m}\right] x^{2k} \\ Q(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{3}{4}\right)^k x^{2k} + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{c_k}{m! c_m}\left(\frac{3}{4}\right)^m x^{2k} \end{aligned}$$

Dan is

$$Q(x) > \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{3}{4}\right)^k x^{2k} = e^{3x^2/4} \qquad \text{voor alle} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Kijken we naar de bijbehorende oplossing van de Schrödinger vergelijking,

$$e^{-x^2/2} H_\lambda^{\text{even}}(x) = e^{-x^2/2} P(x) + m! c_m \left(\frac{3}{4}\right)^{-m} e^{-x^2/2} Q(x),$$

dan zien we dat $e^{-x^2/2}P(x)$ begrensd is op $\mathbb{R}$, maar dat $e^{-x^2/2}Q(x) > e^{x^2/4}$ is en dus onbegrensd. Ook $e^{-x^2/2}H_\lambda^{\text{even}}(x)$ is dus onbegrensd en daarom fysisch onacceptabel.

Een analoge situatie geldt voor $H_\lambda^{\text{oneven}}(x)$: als $\lambda = 4N + 3$ met $N \in \mathbb{Z}, N \geq 0$ dan is $H_\lambda^{\text{oneven}}(x)$ een polynoom:

$$H_{4N+3}^{\text{oneven}}(x) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \frac{N!}{(2k+1)!(N-k)!} 4^k x^{2k+1} \tag{28}$$

en is de oplossing $e^{-x^2/2}H_{4N+3}^{\text{oneven}}(x)$ van de Schrödinger vergelijking fysisch acceptabel. Als daarentegen λ niet van de vorm $4N+3$ met $N \in \mathbb{Z}, N \geq 0$ is, dan is de oplossing $e^{-x^2/2}H_\lambda^{\text{oneven}}(x)$ van de Schrödinger vergelijking onbegrensd en daarom fysisch onacceptabel.

Tot slot merken we op dat uit (26) blijkt

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= 2a_0\, H_\lambda^{\text{even}}(x) \\ f(x) - f(-x) &= 2a_1\, H_\lambda^{\text{oneven}}(x). \end{aligned}$$

We zien dat $e^{-x^2/2}f(x)$ een begrensde oplossing van de Schrödinger vergelijking is, precies dan als $a_0\, e^{-x^2/2}H_\lambda^{\text{even}}(x)$ en $a_1\, e^{-x^2/2}H_\lambda^{\text{oneven}}(x)$ begrensde funkties zijn; d.w.z. dan en slechts dan als

$$(a_0 = 0 \quad \text{en} \quad \lambda = 4N+3) \qquad \text{of} \qquad (a_1 = 0 \quad \text{en} \quad \lambda = 4N+1)$$

met $N \in \mathbb{Z}, N \geq 0$.

Conclusie:

De enige eigenwaarden van de Schrödinger operator D_{Sch} waarvoor een begrensde eigenfunktie bestaat zijn de negatieve oneven gehele getallen. Een *begrensde eigenfunktie bij de eigenwaarde* $-(2n+1)$ *is een veelvoud van* $e^{-x^2/2}H_{2n+1}^{\text{even}}(x)$ *(respectievelijk* $e^{-x^2/2}H_{2n+1}^{\text{oneven}}(x)$*) als* n *even (respectievelijk oneven) is.*

Wanneer men zo'n eigenfunktie vermenigvuldigt met een reëel getal $\neq 0$, dan krijgt men natuurlijk weer een eigenfunktie. Het is gebruikelijk de polynomen zo te normaliseren dat de hoogste graads coëfficiënt 2^n is; d.w.z. men neemt

$$H_n(x) := \begin{cases} (-1)^{n/2}\,\frac{n!}{(n/2)!}\,H_{2n+1}^{\text{even}}(x) & \text{als } n \text{ even is} \\ 2\,(-1)^{(n-1)/2}\,\frac{n!}{((n-1)/2)!}\,H_{2n+1}^{\text{oneven}}(x) & \text{als } n \text{ oneven is} \end{cases} \tag{29}$$

Men noemt de polynomen $H_n(x)$ *Hermite polynomen.* De graad van het polynoom $H_n(x)$ is n. De eerste paar Hermite polynomen zij:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2-2 \\ H_3(x) &= 8x^3-12x \\ H_4(x) &= 16x^4-48x^2+12 \\ H_5(x) &= 32x^5-160x^3+120x \end{aligned}$$

Het toevoegen van de eis dat alleen eigenwaarden van de Schrödinger operator D_{Sch} fysisch acceptabel zijn waarvoor een *begrensde* eigenfunktie bestaat, leidt dus tot een interessante en drastische beperking. We zouden dit graag zien als het gevolg van het beperken van de lineaire operator D_{Sch} tot een geschikte lineaire deelruimte van $C^\infty(\mathbb{R})$. De deelruimte bestaande uit de begrensde willekeurig vaak differentieerbare funkties is hiervoor niet geschikt omdat er begrensde funkties $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ bestaan waarvoor $D_{\text{Sch}}f$ niet een begrensde funktie is (bijvoorbeeld D_{Sch} voegt aan de constante funktie 1 toe de onbegrensde funktie x^2). Een deelruimte die wel goed werkt is de ruimte $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ van zogeheten *Schwartz funkties* op $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{voor alle gehele getallen } i,j \geq 0 \\ \text{is } x^i f^{(j)}(x) \text{ een begrensde funktie} \end{array} \right\};$$

hier is $f^{(j)} = \frac{d^j f}{dx^j}$ de j-de afgeleide van f.

Duidelijk is dat de Schrödinger operator deze ruimte wel in zichzelf afbeeldt. De conclusie van de voorgaande discussie is:

Conclusie:
Het spectrum van de Schrödinger operator op de ruimte van Schwartz funkties,

$$D_{\text{Sch}}: \ \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

is de verzameling van de negatieve oneven gehele getallen. De eigenruimte bij de eigenwaarde $-(2n+1)$ *is* 1*-dimensionaal, met basis* $e^{-x^2/2}H_n(x)$.

Terugkijkend op de voorgaande discussie zien we dat we ook voor de Hermite operator D_{Her} de waargenomen beperking van het spectrum kunnen duiden als een beperking van de operator tot een lineaire deelruimte van $C^\infty(\mathbb{R})$ namelijk tot de ruimte Polynomen van alle polynoomfunkties op $\mathbb{R}$:

Conclusie:
Het spectrum van de Hermite operator op de ruimte van polynoomfunkties,

$$D_{\text{Her}}: \ \mathsf{Polynomen} \to \mathsf{Polynomen},$$

is de verzameling van de negatieve oneven gehele getallen. De eigenruimte bij de eigenwaarde $-(2n+1)$ *is* 1*-dimensionaal, met basis* $H_n(x)$.

4.2 De Legendre operator

Bij de bestudering van het hoekmoment (*angular momentum*) in de Quantummechanica stuit men op de *vergelijking van Legendre*:

$$(1-x^2)f''(x) - 2xf'(x) + \lambda f(x) = 0. \tag{30}$$

Het gaat hierbij in eerste instantie om het bepalen van de eigenwaarden en eigenfunkties van de operator

$$D_{\text{Leg}}: \ C^\infty(]-1,1[) \longrightarrow C^\infty(]-1,1[)\,,$$
$$(D_{\text{Leg}}f)(x) = (1-x^2)f''(x) - 2xf'(x).$$

In (30) is $-\lambda$ dan de eigenwaarde en f de bijbehorende eigenfunktie. We zullen eerst dit eigenwaarde probleem behandelen en daarna het effekt bekijken van een tweede fysische eis (f moet begrensd zijn).

We proberen een oplossing van (30) te vinden die wordt gegeven door een machtreeks:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Voor zo'n machtreeks is

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ f''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n \end{aligned}$$

en dus

$$\begin{aligned} &(1-x^2)f''(x) - 2xf'(x) + \lambda f(x) = \\ &\quad = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n(n-1) + 2n - \lambda)a_n\right] x^n \end{aligned}$$

We zien dat de machtreeks $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ een oplossing is van de differentiaalvergelijking (30) precies dan als de coëfficiënten voldoen aan de *recursie relatie*

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+2)(n+1)} a_n \qquad \text{voor} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

oftewel

$$a_n = \frac{(n-1)(n-2) - \lambda}{n(n-1)} a_{n-2} \qquad \text{voor} \quad n = 2, 3, 4, 5, \ldots$$

De coëfficiënten a_0 en a_1 zijn blijkbaar vrij te kiezen. De andere coëfficiënten liggen dan vast:
als n even is dan

$$a_n = \frac{((n-1)(n-2) - \lambda)((n-3)(n-4) - \lambda) \cdot \ldots \cdot (3 \cdot 2 - \lambda)(-\lambda)}{n!} \cdot a_0$$

als n oneven is dan

$$a_n = \frac{((n-1)(n-2) - \lambda)((n-3)(n-4) - \lambda) \cdot \ldots \cdot (2 \cdot 1 - \lambda)}{n!} \cdot a_1$$

Zo blijkt

$$f(x) = a_0 F_\lambda^{\text{even}}(x) + a_1 F_\lambda^{\text{oneven}}(x) \tag{31}$$

met

$$
\begin{aligned}
F_\lambda^{\text{even}}(x) &= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\lambda)(2\cdot 3-\lambda)\cdot\ldots\cdot((2k-2)(2k-1)-\lambda)}{(2k)!}x^{2k}\\
F_\lambda^{\text{oneven}}(x) &= x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1\cdot 2-\lambda)\cdot\ldots\cdot((2k-1)(2k)-\lambda)}{(2k+1)!}x^{2k+1}
\end{aligned}
$$

De recursie relatie laat zien

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+2}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)-\lambda}{(n+2)(n+1)}=1$$

Volgens een eenvoudige variant van Stelling 1.4 bewijst dit dat de machtreeksen $f(x)$, $F_\lambda^{\text{even}}(x)$ en $F_\lambda^{\text{oneven}}(x)$ convergentiestraal 1 hebben (d.w.z. ze definiëren funkties op het open interval $]-1,1[$), tenminste als niet alle a_n vanaf een zekere index 0 zijn. Als er een N is zodat $a_n=0$ voor alle $n>N$ dan wordt de machtreeks een polynoom en is zijn convergentiestraal ∞.

Het voorgaande leert dat $F_\lambda^{\text{even}}(x)$ en $F_\lambda^{\text{oneven}}(x)$ een basis vormen van de lineaire ruimte van *machtreeksoplossingen* van de differentiaalvergelijking (30). Men kan bewijzen dat in feite $F_\lambda^{\text{even}}(x)$ en $F_\lambda^{\text{oneven}}(x)$ een basis vormen van de lineaire ruimte van alle $C^\infty(]-1,1[)$-*oplossingen* van (30).

Conclusie:

Het spectrum van de Legendre operator D_{Leg} op de lineaire ruimte $C^\infty(]-1,1[)$ is $\mathbb{R}$. De eigenruimte bij de eigenwaarde $-\lambda$ is 2-dimensionaal en heeft als basis $F_\lambda^{\text{even}}(x)$ en $F_\lambda^{\text{oneven}}(x)$

Fysisch relevant zijn alleen die oplossingen van de Legendre vergelijking (30) die begrensde funkties zijn op $]-1,1[$. Om die te vinden onderzoeken we eerst het groeigedrag voor $x\uparrow 1$ en $x\downarrow -1$ van de funkties $F_\lambda^{\text{even}}(x)$ en $F_\lambda^{\text{oneven}}(x)$.

De definitie van $F_\lambda^{\text{even}}(x)$ laat zien dat, wanneer λ een geheel getal is van de vorm $2N(2N+1)$ met $N\in\mathbb{Z}$, $N\geq 0$, dan zijn in de reeks van $F_\lambda^{\text{even}}(x)$ de coëfficiënten met $k>N$ nul en is dus $F_{2N(2N+1)}^{\text{even}}(x)$ een polynoom. Zo'n polynoom is een continue funktie op de hele reële lijn $\mathbb{R}$ en is dus zeker begrensd op het eindige interval $]-1,1[$. Deze oplossing is daarom fysisch acceptabel.

Merk op dat

$$\begin{aligned} 2m(2m+1) - 2N(2N+1) &= 4m^2 + 2m - 4N^2 - 2N \\ &= 4(m+N)(m-N) + 2(m-N) \\ &= -4(N-m)(N+\tfrac{1}{2}+m). \end{aligned}$$

Hiermee vereenvoudigt de formule voor $F^{\text{even}}_{2N(2N+1)}(x)$ tot:

$$F^{\text{even}}_{2N(2N+1)}(x) = \sum_{k=0}^{N} (-4)^k \frac{N! \cdot (N+\frac{1}{2})(N+\frac{1}{2}+1) \cdot \ldots \cdot (N+\frac{1}{2}+k-1)}{(2k)!(N-k)!} x^{2k} \tag{32}$$

Veronderstel nu dat λ niet een getal is van de vorm $2N(2N+1)$ met $N \in \mathbb{Z}, N \geq 0$. Dan zijn alle coëfficiënten in de machtreeks $F^{\text{even}}_{\lambda}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{2k}$ ongelijk 0. Uit de recursierelatie voor twee opeenvolgende coëfficiënten weten we dat

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{2k(2k+1) - \lambda}{(2k+2)(2k+1)} = \frac{k}{k+1}\left(1 - \frac{\lambda}{2k(2k+1)}\right)$$

We weten dat de reeks $\sum_{j \geq 1} \frac{|\lambda|}{2j(2j+1)}$ convergeert Er is dus een positief geheel getal m zo dat $0 < \sum_{j=m}^{\infty} \frac{|\lambda|}{2j(2j+1)} < \frac{1}{2}$. Kies zo'n m. Dan is voor $k > m$:

$$\begin{aligned} \frac{c_k}{c_m} &= \frac{m}{k} \prod_{j=m}^{k-1} \left(1 - \frac{\lambda}{2j(2j+1)}\right) \\ &\geq \frac{m}{k} \prod_{j=m}^{k-1} \left(1 - \frac{|\lambda|}{2j(2j+1)}\right) \\ &> \frac{m}{k} \left(1 - \sum_{j=m}^{k-1} \frac{|\lambda|}{2j(2j+1)}\right) && \text{zie (33)} \\ &> \frac{m}{2k} \end{aligned}$$

Hierbij is herhaaldelijk gebruikt: als $a, b \in \mathbb{R}$ zo zijn dat $ab > 0$ dan is

$$(1-a)(1-b) = 1 - (a+b) + ab > 1 - (a+b) \tag{33}$$

We zien dat voor $x \in]-1, 1[$

$$F^{\text{even}}_{\lambda}(x) = P(x) + \frac{mc_m}{2} Q(x)$$

met

$$
\begin{aligned}
P(x) &= 1+\sum_{k=1}^{m-1}\left[c_k - c_m\frac{m}{2k}\right]x^{2k} \\
Q(x) &= \sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k}x^{2k} + \sum_{k=m}^{\infty}\frac{2c_k}{mc_m}x^{2k} \\
&> \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}x^{2k} = -\log(1-x^2)
\end{aligned}
$$

Hieruit blijkt dat $F_\lambda^{\text{even}}(x)$ niet een begrensde funktie is op het interval $]-1,1[$ en daarom fysisch onacceptabel is.

Een analoge situatie geldt voor $F_\lambda^{\text{oneven}}(x)$: als $\lambda=(2N+1)(2N+2)$ voor een geheel getal $N\geq 0$ dan is $F_{(2N+1)(2N+2)}^{\text{oneven}}(x)$ een polynoom en fysisch acceptabel; als λ niet van de vorm $(2N+1)(2N+2)$, met $N\geq 0$ geheel, is, dan is $F_\lambda^{\text{oneven}}(x)$ niet begrensd en fysisch onacceptabel.

Tot slot merken we op dat uit (31) blijkt

$$
\begin{aligned}
f(x)+f(-x) &= 2a_0\,F_\lambda^{\text{even}}(x) \\
f(x)-f(-x) &= 2a_1\,F_\lambda^{\text{oneven}}(x).
\end{aligned}
$$

We zien dat $f(x)$ een begrensde oplossing van de Legendre vergelijking is, precies dan als $a_0F_\lambda^{\text{even}}(x)$ en $a_1F_\lambda^{\text{oneven}}(x)$ begrensde funkties zijn; d.w.z. dan en slechts dan als

$$
a_0=0 \text{ en } \lambda=(2N+1)(2N+2) \qquad \text{of} \qquad a_1=0 \text{ en } \lambda=2N(2N+1)
$$

met $N\in\mathbb{Z}, N\geq 0$.
We zien:
De enige eigenwaarden van de Legendre operator D_{Leg} waarvoor een begrensde eigenfunktie bestaat zijn de gehele getallen van de vorm $-n(n+1)$ met $n\in\mathbb{Z}, n\geq 0$. De begrensde eigenfunktie bij de eigenwaarde $-n(n+1)$ is een veelvoud van $F_{n(n+1)}^{\text{even}}(x)$ (respectievelijk $F_{n(n+1)}^{\text{oneven}}(x)$) als n even (respectievelijk oneven) is.

De polynomen $F_{n(n+1)}^{\text{even}}(x)$ en $F_{n(n+1)}^{\text{oneven}}(x)$ noemt men *Legendre polynomen.* Het is gebruikelijk deze zo te normaliseren dat ze in 1 de waarde 1 hebben.

De gebruikelijke notatie voor de aldus genormaliseerde Legendre polynomen is $P_n(x)$:

$$P_n(x) = \begin{cases} F^{\text{even}}_{n(n+1)}(x)/F^{\text{even}}_{n(n+1)}(1) & \text{als } n \text{ even} \\ F^{\text{oneven}}_{n(n+1)}(x)/F^{\text{oneven}}_{n(n+1)}(1) & \text{als } n \text{ oneven} \end{cases}$$

Men kan bewijzen dat voor elke $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$ geldt

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^m (2n-2m)!}{2^n m!(n-2m)!(n-m)!}\, x^{n-2m},$$

waarbij $[n/2]$ het grootste gehele getal $\leq n/2$ voorstelt.

De eerste paar Legendre polynomen zijn

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3-3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3) \end{aligned}$$

Het toevoegen van de eis dat alleen eigenwaarden van de Legendre operator D_{Leg} fysisch acceptabel zijn waarvoor een *begrensde* eigenfunktie bestaat, leidt dus tot een interessante en drastische beperking. We zouden dit graag zien als het gevolg van het beperken van de lineaire operator D_{Leg} tot een geschikte lineaire deelruimte van $C^\infty(]-1,1[)$. De deelruimte bestaande uit de begrensde willekeurig vaak differentieerbare funkties is hiervoor niet geschikt omdat er begrensde funkties $f \in C^\infty(]-1,1[)$ bestaan waarvoor $D_{\text{Leg}}f$ niet een begrensde funktie is (bijvoorbeeld $\sqrt{1-x^2}$). Een deelruimte die wel goed werkt is de ruimte $C^\infty_{\text{begrensd}}(]-1,1[)$ van alle funkties f op het open interval $]-1,1[$ die willekeurig vaak differentieerbaar zijn en waarvan alle afgeleiden $f^{(j)}$ $(j \geq 0)$ begrensd zijn.

Conclusie:

Het spectrum van de Legendre operator D_{Leg} op de lineaire ruimte $C^\infty_{\text{begrensd}}(]-1,1[)$ bestaat uit alle getallen van de vorm $-n(n+1)$ met $n \geq 0$

geheel. De eigenruimte bij de eigenwaarde $-n(n+1)$ *is* 1*-dimensionaal met als basis het Legendre polynoom* $P_n(x)$*.*

5 Inprodukten en Symmetrische operatoren

We herinneren aan de uit het College Lineaire Algebra bekende definitie van een in produkt op een lineaire ruimte V over $\mathbb{R}$.

Definitie 5.1 Zij V een lineaire ruimte over $\mathbb{R}$. Een *inprodukt* op V is een funktie

$$\langle\,,\,\rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

d.w.z. een regel om aan ieder tweetal elementen $v, w \in V$ een reëel getal $\langle v, w\rangle$ toe te voegen, zo dat voor alle $u, v, w \in V$ en $r \in \mathbb{R}$ is voldaan aan de volgende eisen

$$\begin{array}{rcll} \langle v, w\rangle & = & \langle w, v\rangle & \text{(symmetrie)} \\ \langle u, v+w\rangle & = & \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle & \text{(additiviteit)} \\ \langle rv, w\rangle & = & r\langle v, w\rangle & \text{(homogeniteit)} \\ \langle v, v\rangle & > & 0 \quad \text{als} \quad v \neq 0 & \text{(positiviteit)} \end{array}$$

Om op een lineaire ruimte V over $\mathbb{C}$ een goed werkend inprodukt te krijgen moet men de formule voor de symmetrie aanpassen:

Definitie 5.2 Zij V een lineaire ruimte over $\mathbb{C}$. Een *inprodukt* op V is een funktie

$$\langle\,,\,\rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C},$$

d.w.z. een regel om aan ieder tweetal elementen $v, w \in V$ een complex getal $\langle v, w\rangle$ toe te voegen, zo dat voor alle $u, v, w \in V$ en $r \in \mathbb{C}$ is voldaan aan de volgende eisen

$$\begin{array}{rcll} \langle v, w\rangle & = & \overline{\langle w, v\rangle} & \text{(symmetrie)} \\ \langle u, v+w\rangle & = & \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle & \text{(additiviteit)} \\ \langle rv, w\rangle & = & r\langle v, w\rangle & \text{(homogeniteit)} \\ \langle v, v\rangle & > & 0 \quad \text{als} \quad v \neq 0 & \text{(positiviteit)} \end{array}$$

Symmetrie betekent in dit geval dat $\langle v, w\rangle$ de complex geconjugeerde is van $\langle w, v\rangle$. Voor $w = v$ staat hier $\langle v, v\rangle = \overline{\langle v, v\rangle}$ en dus is $\langle v, v\rangle$ een reëel getal. Bij de positiviteitseis gaat het dus om het positief zijn van een reëel getal!

Uit de homogeniteit volgt, zowel in het reële als in complexe geval, dat

$$\langle 0, 0\rangle = 0.$$

Uit de symmetrie en additiviteit volgt, zowel in het reële als in complexe geval, dat

$$\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle \qquad \text{voor alle } \ u, v, w \in V$$

Uit de symmetrie en homogeniteit volgt in het reële geval dat

$$\langle v, rw\rangle = r\langle v, w\rangle \qquad \text{voor alle } \ v, w \in V \ , \ r \in \mathbb{R},$$

en in het complexe geval dat

$$\langle v, rw\rangle = \overline{r}\langle v, w\rangle \qquad \text{voor alle } \ v, w \in V \ , \ r \in \mathbb{C}.$$

Definitie 5.3 De hierna gedefinieerde begrippen *norm, ongelijkheid van Schwarz, loodrechte stand* worden in het reële en het complexe geval door dezelfde formules gegeven. Vandaar dat in deze definitie niet apart wordt gerefereerd aan $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$.

Zij V een lineaire ruimte met een inprodukt $\langle \, , \, \rangle$. Dan wordt de *norm* $\| \, v \, \|$ van een element $v \in V$ gedefinieerd door

$$\| \, v \, \| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

(Dit is de wortel uit een niet-negatief reëel getal!)

Er geldt dan de *ongelijkheid van Schwarz*:

$$|\langle v, w\rangle| \leq \| \, v \, \| \, \| \, w \, \| \qquad \text{voor alle } \quad v, w \in V.$$

Men zegt dat twee elementen $v, w \in V$ *loodrecht op elkaar staan* als

$$\langle v, w\rangle = 0$$

Voorbeelden

1. Het *standaard inprodukt* op $\mathbb{R}^2$ wordt gegeven door

$$\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2)\rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2.$$

2. Het *standaard inprodukt* op $\mathbb{C}^2$ wordt gegeven door

$$\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2)\rangle = v_1 \overline{w_1} + v_2 \overline{w_2}.$$

3. Definieer voor $(v_1, v_2), (w_1, w_2) \in \mathbb{R}$
$$\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle = 2v_1w_1 + 3v_2w_2 - v_1w_2 - v_2w_1.$$
Dit is een inprodukt op $\mathbb{R}^2$.

4. Neem de lineaire ruimte $C^0([-1, 1])$ van alle continue reëelwaardige funkties op het interval $[-1, 1]$. Definieer voor $f, g \in C^0([-1, 1])$
$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$
Dit is een inprodukt op $C^0([-1, 1])$.

5. Neem de lineaire ruimte $C^0([-1, 1])$ van alle continue reëelwaardige funkties op het interval $[-1, 1]$. Definieer voor $f, g \in C^0([-1, 1])$
$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\sqrt{1 - x^2}dx.$$
Dit is een inprodukt op $C^0([-1, 1])$.

6. Neem in de lineaire ruimte $C^0(\mathbb{R})$ bestaande uit alle continue reëelwaardige funkties op $\mathbb{R}$ de lineaire deelruimte
$$V = \{f \in C^0(\mathbb{R}) \mid f(x) = \mathcal{O}\left(e^{x^2/3}\right) \quad \text{voor } |x| \to \infty\}.$$
Definieer voor $f, g \in V$
$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}dx.$$
Dit is een inprodukt op V.

Definitie 5.4 Zij V een lineaire ruimte over $\mathbb{R}$ voorzien van een inprodukt $\langle ., . \rangle$. Zij
$$\varphi : V \longrightarrow V$$
een lineaire afbeelding.

1. Men zegt dat φ een *symmetrische afbeelding* is (t.a.v. het gegeven inprodukt) als
$$\langle \varphi(v), w \rangle = \langle v, \varphi(w) \rangle \qquad \text{voor alle } \ v, w \in V.$$

2. Men zegt dat φ een *orthogonale afbeelding* is (t.a.v. het gegeven inprodukt) als
$$\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle \qquad \text{voor alle } \ v, w \in V.$$

Voor complexe ruimten met inprodukt heeft men dezelfde begrippen, maar gebruikt men meestal de volgende terminologie:

Definitie 5.5 Zij V een lineaire ruimte over $\mathbb{C}$ voorzien van een inprodukt $\langle ., . \rangle$. Zij
$$\varphi : V \longrightarrow V$$
een lineaire afbeelding.

1. Men zegt dat φ een *Hermitese afbeelding* is (t.a.v. het gegeven inprodukt) als
$$\langle \varphi(v), w \rangle = \langle v, \varphi(w) \rangle \qquad \text{voor alle } \ v, w \in V.$$

2. Men zegt dat φ een *unitaire afbeelding* is (t.a.v. het gegeven inprodukt) als
$$\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle \qquad \text{voor alle } \ v, w \in V.$$

Voorbeelden

1. Neem $\mathbb{R}^2$ met het standaard inprodukt en een lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeven door een matrix
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

De *getransponeerde* (of gespiegelde) van de afbeelding A wordt gegeven door de matrix

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Dan is

$$\begin{array}{rcl} A \ \text{symmetrisch} & \Leftrightarrow A^T = A \Leftrightarrow & a_{12} = a_{21} \\ A \ \text{orthogonaal} & \Leftrightarrow A^T A = I \Leftrightarrow & a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \\ & & \text{en} \ \ a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ & & \text{en} \ \ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \\ & \Leftrightarrow AA^T = I \Leftrightarrow & a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1 \\ & & \text{en} \ \ a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ & & \text{en} \ \ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0; \end{array}$$

hier is I de 2×2-eenheids matrix: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Neem $\mathbb{C}^2$ met het standaard inprodukt en een lineaire afbeelding $A : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ gegeven door een matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

De *geconjugeerd getransponeerde* (of geconjugeerd gespiegelde) van de afbeelding A wordt gegeven door de matrix

$$A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} \end{pmatrix}.$$

Dan is

$$\begin{array}{rcl} A \ \text{Hermites} & \Leftrightarrow A^* = A \Leftrightarrow & a_{12} = \overline{a_{21}} \ \ \text{en} \ \ a_{11},\, a_{22} \ \text{reëel} \\ A \ \text{unitair} & \Leftrightarrow A^* A = I \Leftrightarrow & |a_{11}|^2 + |a_{21}|^2 = 1 \\ & & \text{en} \ \ |a_{12}|^2 + |a_{22}|^2 = 1 \\ & & \text{en} \ \ a_{11}\overline{a_{12}} + a_{21}\overline{a_{22}} = 0 \\ & \Leftrightarrow AA^* = I \Leftrightarrow & |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 = 1 \\ & & \text{en} \ \ |a_{21}|^2 + |a_{22}|^2 = 1 \\ & & \text{en} \ \ a_{11}\overline{a_{21}} + a_{12}\overline{a_{22}} = 0 \end{array}$$

3. Neem de lineaire ruimte $C^\infty_{\text{begrensd}}(]-1,1[)$ van alle willekeurig vaak differentieerbare funkties f op het open interval $]-1,1[$ waarvan alle afgeleiden $f^{(j)}$ $(j \geq 0)$ begrensd zijn. Voorzie deze lineaire ruimte van het inprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx \qquad \text{voor} \quad f, g \in C^\infty_{\text{begrensd}}(]-1,1[).$$

Merk op dat deze oneigenlijke integraal convergeert.

Bekijk nu de Legendre operator D_{Leg} op de ruimte $C^\infty_{\text{begrensd}}(]-1,1[)$:

$$(D_{\text{Leg}}f)(x) = (1-x^2)f''(x) - 2xf'(x).$$

Dit is een symmetrische operator t.a.v. het gegeven inprodukt. Om dat in te zien merken we eerst op

$$(D_{\text{Leg}}f)(x) = ((1-x^2)f'(x))'$$

en vervolgens rekenen we

$$\begin{aligned}
\langle D_{\text{Leg}}f, g\rangle &= \int_{-1}^{1} ((1-x^2)f'(x))'g(x)dx \\
&\hspace{12em}\text{(partiële integratie)} \\
&= \Big[(1-x^2)f'(x)g(x)\Big]_{x=-1}^{x=1} - \int_{-1}^{1}(1-x^2)f'(x)g'(x)dx \\
&= -\int_{-1}^{1}(1-x^2)f'(x)g'(x)dx
\end{aligned}$$

In deze laatste uitdrukking komen f en g symmetrisch voor; d.w.z. er verandert niets wanneer we f en g omwisselen. Wanneer we in $\langle D_{\text{Leg}}f, g\rangle$ f en g omwisselen dan vinden we $\langle D_{\text{Leg}}g, f\rangle$. Dus is

$$\langle D_{\text{Leg}}f, g\rangle = \langle D_{\text{Leg}}g, f\rangle = \langle f, D_{\text{Leg}}g\rangle.$$

Dit bewijst dat D_{Leg} inderdaad een symmetrische operator is t.a.v. het gegeven inprodukt.

4. Neem de ruimte Polynomen van alle polynoomfunkties op $\mathbb{R}$ voorzien van het inprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}dx \qquad \text{voor polynomen} \quad f, g.$$

Bekijk de operator van Hermite op de ruimte van polynoomfunkties,

$$(D_{\text{Her}}f)(x) = f''(x) - 2xf'(x) - f(x).$$

Dan is dit een symmetrische operator t.a.v. het gegeven inprodukt; inderdaad, merk eerst op

$$(f''(x) - 2xf'(x))e^{-x^2} = \left(f'(x)e^{-x^2}\right)'$$

en reken dan verder:

$$\begin{aligned}
\langle D_{\text{Her}}f, g\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}(f''(x) - 2xf'(x) - f(x))g(x)e^{-x^2}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(f'(x)e^{-x^2}\right)' g(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}dx \\
&= \left[g(x)f'(x)e^{-x^2}\right]_{x\to-\infty}^{x\to\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} g'(x)f'(x)e^{-x^2}dx \\
&\quad - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g'(x)e^{-x^2}dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}dx
\end{aligned}$$

Deze laatste uitdrukking is symmetrisch in f en g. Dus concluderen we

$$\langle D_{\text{Her}}f, g\rangle = \langle f, D_{\text{Her}}g\rangle;$$

d.w.z. de operator van Hermite is inderdaad symmetrisch t.a.v. het gegeven inprodukt.

5. Neem de ruimte van Schwartz funkties $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ voorzien van het inprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx \qquad \text{voor} \quad f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

De hier voorkomende oneigenlijke integralen convergeren: omdat f en g Schwartz funkties zijn, zijn de funkties $f(x)$, $g(x)$, $xf(x)$, $xg(x)$ begrensd en dus is ook $(1+x^2)f(x)g(x)$ begrensd; d.w.z. er is een constante M zo dat

$$|f(x)g(x)| < \frac{M}{1+x^2} \qquad \text{voor alle } \ x \in \mathbb{R}.$$

Omdat de integraal $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ convergeert, convergeert ook de integraal $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$.

Bekijk nu de Schrödinger operator op $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$(D_{\mathrm{Sch}}f)(x) = f''(x) - x^2 f(x).$$

Dan is D_{Sch} een symmetrische operator t.a.v. het gegeven inprodukt; inderdaad

$$\begin{aligned}
\langle D_{\mathrm{Sch}}f, g\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} (f''(x) - x^2 f(x))g(x)dx \\
&= [f'(x)g(x)]_{x\to-\infty}^{x\to\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g'(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)g(x)dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g'(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)g(x)dx
\end{aligned}$$

Deze laatste uitdrukking is symmetrisch in f en g. Dus concluderen we

$$\langle D_{\mathrm{Sch}}f, g\rangle = \langle f, D_{\mathrm{Sch}}g\rangle;$$

d.w.z. de Schrödinger operator D_{Sch} op $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ is inderdaad symmetrisch t.a.v. het gegeven inprodukt.

Stelling 5.6 *Zij V een lineaire ruimte over $\mathbb{R}$ voorzien van een inprodukt $\langle .,. \rangle$. Zij $\varphi : V \to V$ een* symmetrische *lineaire afbeelding t.a.v. het gegeven inprodukt.*

Als $v, w \in V$ eigenvektoren zijn bij eigenwaarden λ resp. μ met $\lambda \neq \mu$, dan is

$$\langle v, w\rangle = 0; \tag{34}$$

d.w.z. bij een symmetrische lineaire afbeelding staan de eigenvektoren bij verschillende eigenwaarden loodrecht op elkaar.

Men noemt Formule (34) een orthogonaliteitsrelatie.

Bewijs: Omdat φ symmetrisch is geldt

$$\langle\varphi(v), w\rangle - \langle v, \varphi(w)\rangle = 0.$$

Omdat v en w eigenvektoren zijn, geldt

$$\langle\varphi(v), w\rangle - \langle v, \varphi(w)\rangle = \langle\lambda v, w\rangle - \langle v, \mu w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle - \mu\langle v, w\rangle = (\lambda - \mu)\langle v, w\rangle.$$

Omdat $\lambda - \mu \neq 0$ is, moet $\langle v, w\rangle = 0$ zijn. ■

Stelling 5.7 *Zij V een lineaire ruimte over $\mathbb{C}$ voorzien van een inprodukt $\langle .,.\rangle$. Zij $\varphi : V \to V$ een* Hermitese *lineaire afbeelding t.a.v. het gegeven inprodukt.*

1. *Dan zijn alle eigenwaarden van φ reële getallen.*
2. *Als $v, w \in V$ eigenvektoren zijn bij eigenwaarden λ resp. μ met $\lambda \neq \mu$, dan is*
$$\langle v, w\rangle = 0; \tag{35}$$
d.w.z. bij een Hermitese lineaire afbeelding staan eigenvektoren bij verschillende eigenwaarden loodrecht op elkaar.

   Men noemt Formule (35) een orthogonaliteitsrelatie.

Bewijs: 1. Zij μ een eigenwaarde van φ en w een daarbij horende eigenvektor. Omdat φ Hermites is, is

$$\langle\varphi(w), w\rangle - \langle w, \varphi(w)\rangle = 0$$

Anderzijds is

$$\begin{aligned}\langle\varphi(w), w\rangle - \langle w, \varphi(w)\rangle &= \langle\mu w, w\rangle - \langle w, \mu w\rangle = \mu\langle w, w\rangle - \overline{\mu}\langle w, w\rangle \\ &= (\mu - \overline{\mu})\langle w, w\rangle.\end{aligned}$$

Omdat w een eigenvektor is, is $w \neq 0$ en dus ook $\langle w, w\rangle \neq 0$. We concluderen dat $\mu - \overline{\mu} = 0$ moet zijn; d.w.z. μ is reëel.

2. Omdat φ Hermites is geldt

$$\langle \varphi(v), w \rangle - \langle v, \varphi(w) \rangle = 0.$$

Omdat v en w eigenvektoren zijn, geldt

$$\langle \varphi(v), w \rangle - \langle v, \varphi(w) \rangle = \langle \lambda v, w \rangle - \langle v, \mu w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle - \overline{\mu} \langle v, w \rangle = (\lambda - \overline{\mu}) \langle v, w \rangle.$$

Omdat $\lambda - \overline{\mu} = \lambda - \mu \neq 0$ is, moet $\langle v, w \rangle = 0$ zijn. ■

Voorbeelden

1. Neem de lineaire ruimte $C^\infty_{\text{begrensd}}(]-1,1[)$ van alle willekeurig vaak differentieerbare funkties f op het open interval $]-1,1[$ waarvan alle afgeleiden $f^{(j)}$ $(j \geq 0)$ begrensd zijn. Voorzie deze lineaire ruimte van het inprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx \qquad \text{voor} \quad f, g \in C^\infty_{\text{begrensd}}(]-1,1[).$$

en bekijk de Legendre operator D_{Leg} op deze ruimte:

$$(D_{\text{Leg}} f)(x) = (1 - x^2) f''(x) - 2x f'(x).$$

Dit is dan een symmetrische operator t.a.v. het gegeven inprodukt.

De eigenfunkties voor deze operator zijn de Legendre polynomen $P_n(x)$ met n een geheel getal ≥ 0. De orthogonaliteitsrelaties zijn in dit geval

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = 0 \qquad \text{als} \;\; n \neq m.$$

2. Neem de ruimte Polynomen van alle polynoomfunkties op $\mathbb{R}$ voorzien van het inprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) e^{-x^2} dx \qquad \text{voor polynomen} \quad f, g.$$

Bekijk de Hermite operator op deze ruimte,

$$(D_{\text{Her}} f)(x) = f''(x) - 2x f'(x) - f(x).$$

Dit een symmetrische operator t.a.v. het gegeven inprodukt. De eigenfunkties zijn de Hermite polynomen $H_n(x)$ met n een geheel getal ≥ 0. De orthogonaliteitsrelaties zijn in dit geval

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = 0 \qquad \text{als } \ n \neq m.$$

3. Neem de ruimte van Schwartz funkties $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ voorzien van het inprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) dx \qquad \text{voor} \quad f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Bekijk de Schrödinger operator op $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$(D_{\mathrm{Sch}} f)(x) = f''(x) - x^2 f(x).$$

Dit is een symmetrische operator t.a.v. het gegeven inprodukt. De eigenfunkties van deze operator zijn $e^{-x^2/2} H_n(x)$ met n een geheel getal ≥ 0 en $H_n(x)$ het n-de Hermite polynoom. De orthogonaliteitsrelaties luiden

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} H_n(x) e^{-x^2/2} H_m(x) dx = 0 \qquad \text{als } \ n \neq m$$

en zijn dus hetzelfde als de bovenstaande orthogonaliteitsrelaties voor de Hermite polynomen.

6 Reeksontwikkeling naar eigenfunkties

6.1 Algemene struktuur

Van het eerste jaars lineaire algebra college kennen we het volgende resultaat (zie bijvoorbeeld: Fraleigh-Beauregard, Linear Algebra, p.480):

Iedere $m \times m$ reële symmetrische matrix heeft m reële eigenwaarden, geteld met hun algebraïsche multipliciteit, en is diagonaliseerbaar d.m.v. een reële orthogonale matrix.

Anders gezegd:
Als V een m-dimensionale lineaire ruimte is over $\mathbb{R}$ voorzien van een inprodukt $\langle .,. \rangle$ en $\varphi : V \to V$ is een symmetrische lineaire afbeelding, dan zijn de eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ van φ reëel en de eigenvektoren $v_1, \ldots, v_m$ kunnen zo worden genomen dat voor $i, j = 1, 2, \ldots, m$:

$$\begin{aligned} \varphi(v_i) &= \lambda_i v_i \\ \langle v_i, v_j \rangle &= 0 \qquad \text{als} \quad i \neq j \end{aligned}$$

De eigenvektoren $v_1, \ldots, v_m$ vormen dan een basis van V. Iedere vektor $f \in V$ kan dus worden geschreven als een lineaire combinatie

$$f = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_m v_m.$$

M.b.v. de bovenstaande orthogonaliteitsrelaties vinden we dan

$$a_i = \frac{\langle f, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} \qquad \text{voor} \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Hiermee kan de lineaire combinatie worden geschreven als

$$f = \frac{\langle f, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 + \frac{\langle f, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 + \ldots + \frac{\langle f, v_m \rangle}{\langle v_m, v_m \rangle} v_m \tag{36}$$

Opmerking: We hadden de vektoren $v_1, \ldots, v_m$ zo kunnen normaliseren dat hun norm 1 is, d.w.z. $\langle v_i, v_i \rangle = 1$. Dat had dan voor (36) een formule gegeven zonder opzichtige noemers. In de voorbeelden hierna hebben de favoriete eigenfunkties niet norm 1. Vandaar dat we hier maar vast oefenen met formules zonder die normalisatie.

Wat in het bovenstaande is ook waar in de context van oneindigdimensionale funktieruimten?

In elk geval weten we uit Stellingen 5.6 en 5.7 dat alle eigenwaarden van een symmetrische operator reëel zijn en dat de eigenvektoren bij verschillende eigenwaarden loodrecht op elkaar staan.

In de voorbeelden die we gaan bekijken is het spectrum van de symmetrische operator discreet en kunnen we de eigenwaarden nummeren en ordenen naar grootte: $|\lambda_0| < |\lambda_1| < |\lambda_2| < |\lambda_3| < \ldots$. Bovendien zijn in deze voorbeelden alle eigenruimten 1-dimensionaal. Dan hebben we net als voorheen

$$\begin{aligned} \varphi(v_n) &= \lambda_n v_n \qquad \text{voor} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ \langle v_n, v_k \rangle &= 0 \qquad \text{als} \quad k \neq n \end{aligned}$$

Wanneer we nu echter de voor de hand liggende generalisatie van het rechterlid van (36) nemen:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\langle f, v_n \rangle}{\langle v_n, v_n \rangle} v_n \tag{37}$$

dan staan hier in het algemeen oneindig veel termen en moeten we ons voor een gegeven funktie f afvragen:

Vragen:
Convergeert de reeks in formule (37)?
En als hij convergeert, is de som dan gelijk aan f?

Het gaat daarbij om convergentie in een lineaire ruimte met inprodukt. Wat dat betreft zijn hier de belangrijkste definities.

Definitie 6.1 Zij V een lineaire ruimte over $\mathbb{R}$ voorzien van een inprodukt $\langle .,. \rangle$. Dan wordt de *norm* $\| v \|$ van een element $v \in V$ gedefinieerd door

$$\| v \| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

De *afstand* $d(v, w)$ tussen twee elementen $v, w \in V$ wordt gedefinieerd door

$$d(v, w) := \| v - w \|$$

We zeggen dat een rij $\{f_n\}_{n\geq 0}$ van elementen $f_n \in V$ convergeert naar een element $f \in V$, en we schrijven

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n$$

als

$$\lim_{n\to\infty} \| f - f_n \| = 0;$$

merk op dat het bij deze laatste formule gaat om een limiet van reële getallen.

We zeggen dat een reeks $\sum_{n\geq 0} t_n$ van elementen $t_n \in V$ convergeert naar een element $f \in V$ als de rij van partiële sommen $\sum_{n=0}^{N} t_n$ convergeert naar f. We schrijven in dat geval

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} t_n. \tag{38}$$

Het verband tussen formules (37) en (38) is:

$$t_n = \frac{\langle f, v_n\rangle}{\langle v_n, v_n\rangle} v_n.$$

Stelling 6.2 *Zij V een lineaire ruimte over $\mathbb{R}$ voorzien van een inprodukt $\langle ., .\rangle$. Laat $\{t_n\}_{n\geq 0}$ een rij elementen in V zijn zo dat*

$$\langle t_n, t_k\rangle = 0 \qquad \text{als} \quad n \neq k.$$

Veronderstel dat de reeks $\sum_{n\geq 0} t_n$ convergeert met som f; dus

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} t_n.$$

Dan is

$$\langle f, t_k\rangle = \langle t_k, t_k\rangle \qquad \text{voor alle} \quad k \tag{39}$$

$$\langle f, f\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle t_n, t_n\rangle \tag{40}$$

Formule (40) is een generalisatie van de klassieke Stelling van Pythagoras.

Bewijs: Per definitie is het gegeven $f = \sum_{n=0}^{\infty} t_n$ equivalent met

$$\lim_{N\to\infty} \| f - \sum_{n=0}^{N} t_n \| = 0.$$

Voor $N > k$ is enerzijds

$$\langle f - \sum_{n=0}^{N} t_n \, , \, t_k \rangle \; = \; \langle f \, , \, t_k \rangle - \sum_{n=0}^{N} \langle t_n \, , \, t_k \rangle \; = \; \langle f, t_k \rangle - \langle t_k, t_k \rangle$$

en anderzijds vanwege de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz

$$|\langle f - \sum_{n=0}^{N} t_n \, , \, t_k \rangle| \leq \| f - \sum_{n=0}^{N} t_n \| \, \| t_k \| \, .$$

Neem nu de limiet voor $N \to \infty$ dan blijkt

$$\langle f, t_k \rangle - \langle t_k, t_k \rangle \; = \; 0$$

zoals gewenst voor formule (39).

Voor formule (40) merken we eerst op dat

$$\begin{aligned}
\langle f - \sum_{n=0}^{N} t_n \, , \, f - \sum_{n=0}^{N} t_n \rangle \;\; &= \;\; \langle f \, , \, f \rangle - 2 \sum_{n=0}^{N} \langle f \, , \, t_n \rangle + \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{N} \langle t_n \, , \, t_k \rangle \\
&= \;\; \langle f \, , \, f \rangle - \sum_{n=0}^{N} \langle t_n \, , \, t_n \rangle.
\end{aligned}$$

Door de limiet voor $N \to \infty$ te nemen vinden we

$$\lim_{N\to\infty} |\langle f \, , \, f \rangle - \sum_{n=0}^{N} \langle t_n \, , \, t_n \rangle| = 0$$

zoals gewenst voor formule (40). ■

6.2 Speciaal geval: Fourier

Neem de lineaire ruimte $C^{\infty}_{2\pi-\text{per,even}}(\mathbb{R})$ bestaande uit alle even 2π-periodieke reëelwaardige funkties op $\mathbb{R}$, die willekeurig vaak differentieerbaar zijn. Deze ruimte voorzien we van het inprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx.$$

Verder bekijken we op deze ruimte de lineaire operator

$$D^2 : C^\infty_{2\pi-\mathrm{per,even}}(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty_{2\pi-\mathrm{per,even}}(\mathbb{R})\,, \qquad D^2(f) = f''.$$

We weten inmiddels dat het spectrum van deze operator is

$$\{-n^2 \mid n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0\}$$

en dat de eigenruimte bij de eigenwaarde $-n^2$ dimensie 1 heeft met als basis de funktie v_n gegeven door

$$v_n(x) = \cos(nx) \qquad \text{voor elke} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bovendien weten we dat de operator D^2 symmetrisch is t.a.v. het gegeven inprodukt. Dit garandeert meteen de orthogonaliteitsrelatie

$$\langle v_n, v_k \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)\,dx = 0 \qquad \text{als} \quad n \neq k.$$

Om de norm van de eigenfunktie v_n te bepalen moeten we rekenen

$$\| v_n \|^2 = \langle v_n, v_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx)^2\,dx = \begin{cases} 2\pi & \text{als} \quad n = 0 \\ \pi & \text{als} \quad n > 0 \end{cases}$$

De reeks in formule (37) wordt in het onderhavige geval

$$\sum_{n\geq 0} a_n v_n$$

met

$$a_n = \frac{\langle f, v_n \rangle}{\langle v_n, v_n \rangle} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx & \text{als} \quad n = 0 \\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx & \text{als} \quad n > 0 \end{cases}$$

Dit zijn precies de bekende formules voor de Fouriercoëfficiënten in de Fourier cosinus reeks van een even 2π-periodieke funktie!

Nu herinneren we ons van het college Fouriertheorie dat voor een funktie $f \in C^\infty_{2\pi-\mathrm{per,even}}(\mathbb{R})$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) \qquad \text{voor elke} \quad x \in \mathbb{R} \tag{41}$$

met Fouriercoëfficiënten a_n als hierboven.

Formule (41) zegt dat *voor elke* $x \in \mathbb{R}$ *de reeks van reële getallen* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)$ *convergeert, met som gelijk aan het getal* $f(x)$.

We vragen ons nu af of *de reeks* $\sum_{n\geq 0} a_n v_n$ *van elementen van* $C^{\infty}_{2\pi-\mathrm{per,even}}(\mathbb{R})$ *convergeert in* $C^{\infty}_{2\pi-\mathrm{per,even}}(\mathbb{R})$ *(met de gegeven norm) en of de som gelijk is aan het element* f*;* d.w.z.

$$\text{Is} \qquad f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n \quad ?$$

oftewel

$$\text{Is} \qquad \lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nx)|^2 dx \;=\; 0 \quad ?$$

Om te beginnen merken we op dat voor $n > 0$ geldt:

$$|a_n| \;=\; \left|\frac{\langle f, v_n\rangle}{\langle v_n, v_n\rangle}\right| \;=\; \left|\frac{-1}{\pi n^2}\langle\, f, D^2(v_n)\,\rangle\right| \;=\; \left|\frac{-1}{\pi n^2}\langle f'', v_n\rangle\right| \;\leq\; \frac{C}{n^2}$$

waarbij we voor de constante C kunnen nemen $C = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|\, dx\,.$
Hier ziet men duidelijk hoe wordt gebruikt dat D^2 een symmetrische operator is voor het gegeven inprodukt en dat v_n een eigenfunktie is bij de eigenwaarde $-n^2$.

Uit deze schatting van $|a_n|$ leiden we vervolgens af dat voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt

$$|f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nx)| = |\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \cos(nx)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \leq C \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

en dat dus

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nx)|^2 dx \leq 2\pi C^2 \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^2 .$$

Omdat de reeks $\sum_{n\geq 1} n^{-2}$ convergeert is $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-2} \;=\; 0.$ Zo vinden we tenslotte

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nx)|^2 dx \;=\; 0.$$

Hiermee is bewezen:

Stelling 6.3 *De reeks* $\sum_{n\geq 0} a_n v_n$ *convergeert in* $C^{\infty}_{2\pi-\mathrm{per,even}}(\mathbb{R})$ *(met de gegeven norm) en de som is gelijk* f*:*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n. \tag{42}$$

Hierbij worden de funkties v_n *en de coëfficiënten* a_n *gegeven door*

$$\begin{array}{rcl} v_n(x) & = & \cos(nx) \qquad \text{voor elke} \quad x \in \mathbb{R}. \\ a_n & = & \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx & \text{als} \quad n = 0 \\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx & \text{als} \quad n > 0 \end{cases} \end{array}$$

■

Opmerking: Voor de zojuist gegeven afleiding van formule (42) is alleen gebruikt dat f tweemaal continu differentieerbaar is; willekeurig vaak differentieerbaar was hier niet nodig. Het resultaat (42) over de Fourier cosinusreeksontwikkelingen is dus ook waar als we in plaats van in de ruimte $C^{\infty}_{2\pi-\mathrm{per,even}}(\mathbb{R})$ werken in de grotere ruimte $C^{2}_{2\pi-\mathrm{per,even}}(\mathbb{R})$ van tweemaal continu differentieerbare 2π-periodieke even funkties op $\mathbb{R}$.

Omdat de operator D^2 de ruimte $C^{2}_{2\pi-\mathrm{per,even}}(\mathbb{R})$ niet afbeeldt binnen dezelfde lineaire ruimte $C^{2}_{2\pi-\mathrm{per,even}}(\mathbb{R})$, generaliseert het aspekt "eigenfunkties en symmetrische operator" van het voorgaande verhaal echter niet naar de grotere ruimte $C^{2}_{2\pi-\mathrm{per,even}}(\mathbb{R})$.

Opmerking: Voor *oneven* 2π-periodieke funkties heeft men (uiteraard) een geheel analoge beschrijving d.m.v. Fourier sinusreeksontwikkelingen.

6.3 Speciaal geval: Legendre

Neem de lineaire ruimte $C^{\infty}_{\mathrm{begrensd}}(]-1,1[)$ bestaande uit alle reëelwaardige funkties f op het open interval $]-1,1[$, die willekeurig vaak differentieerbaar zijn en waarvan alle afgeleiden $f^{(j)}$ $(j \geq 0)$ op $]-1,1[$ begrensde funkties zijn. Deze ruimte voorzien we van het inprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Verder bekijken we op deze ruimte de lineaire operator van Legendre

$$\begin{aligned} D_{\mathrm{Leg}} &: C^{\infty}_{\mathrm{begrensd}}(]-1,1[) \longrightarrow C^{\infty}_{\mathrm{begrensd}}(]-1,1[) \\ (D_{\mathrm{Leg}} f)(x) &= (1-x^2)f''(x) - 2xf'(x). \end{aligned}$$

We weten inmiddels dat het spectrum van deze operator is

$$\{-n(n+1) \mid n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0\}$$

en dat de eigenruimte bij de eigenwaarde $-n(n+1)$ dimensie 1 heeft met als basis het Legendre polynoom P_n gegeven door

$$P_n(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}\, x^{n-2k}.$$

Bovendien weten we dat de operator D_{Leg} symmetrisch is t.a.v. het gegeven inprodukt. Dit garandeert meteen de orthogonaliteitsrelatie

$$\langle P_n, P_k \rangle = \int_{-1}^{1} P_n(x) P_k(x)\, dx = 0 \qquad \text{als} \quad n \neq k.$$

Men kan laten zien (maar dat is niet eenvoudig) dat de norm van het Legendre polynoom P_n wordt gegeven door

$$\| P_n \|^2 = \langle P_n, P_n \rangle = \int_{-1}^{1} P_n(x)^2\, dx = \frac{2}{2n+1}$$

De reeks in formule (37) wordt in het onderhavige geval

$$\sum_{n \geq 0} a_n P_n$$

met

$$a_n = \frac{\langle f, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx.$$

Men noemt zo'n reeks wel de *Legendre reeks*, of ook *Fourier-Legendre reeks*, van de funktie f.

De algemene theorie over de convergentie van Legendre reeksen is net zo ingewikkeld als de theorie over de convergentie van gewone Fourier reeksen voor periodieke funkties. Dat laatste is in het college Fourier theorie in detail besproken. Voor Legendre reeksen beperken we ons tot het vermelden van de volgende stelling.

Stelling 6.4 *Zij* $f \in C^\infty_{\text{begrensd}}(]-1,1[)$, *d.w.z.* f *is een willekeurig vaak differentieerbare funktie op het open interval* $]-1,1[$, *waarvan alle afgeleiden* $f^{(j)}$ *begrensde funkties zijn. Definieer daarbij*

$$a_n = \frac{\langle f, P_n\rangle}{\langle P_n, P_n\rangle} = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx.$$

Dan convergeert voor elke $x \in]-1,1[$ *de reeks van getallen* $\sum_{n\geq 0} a_n P_n(x)$ *en is*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x).$$

Bovendien convergeert de reeks van funkties $\sum_{n\geq 0} a_n P_n$ *in* $C^\infty_{\text{begrensd}}(]-1,1[)$ *(met de gegeven norm) en is de som gelijk aan de funktie* f*:*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n.$$

■

Opmerking: Net als bij Fourierreeksen geldt de bovenstaande stelling voor een grotere klasse van funkties dan $C^\infty_{\text{begrensd}}(]-1,1[)$. Er zijn echter hoe dan ook voorwaarden nodig en men kan niet zo maar ongenuanceerd zeggen dat het resultaat voor elke funktie op $[-1,1]$ geldt.

7 Opgaven

1. Bepaal de convergentiestralen van de volgende machtreeksen:

   (a) $\sum n!z^n$;

   (b) $\sum \frac{n!}{(2n)!}z^n$;

   (c) $\sum \frac{3^n z^n}{n!}$;

   (d) $\sum \frac{n^n z^n}{n!}$.

2. Bepaal voor de volgende machtreeksen de convergentiestraal R, en bepaal de som voor alle punten z met $|z| < R$:

   (a) $\sum_{n\geq 0}(-1)^n z^{2n}$;

   (b) $\sum_{n\geq 1}(-1)^n n^2 z^n$;

   (c) $\sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{n} z^n$;

   (d) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{n+1} z^n$.

3. (uit Tweede Deeltentamen INFI C 22 dec. 1999)

   (a) Bepaal de convergentiestraal R van de machtreeks $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n(n-1)z^n$.

   (b) Laat zien dat voor $|z| < R$ geldt $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n(n-1)z^n = \frac{2z^2}{(1-z)^3}$.

4. Gebruik formule (23) om de eerste vijf termen te vinden van de Taylorreeks rond 0 van de funktie $\dfrac{1}{\sqrt{1+z}} = (1+z)^{-\frac{1}{2}}$.

5. (a) Bewijs dat voor alle $r, s \in \mathbb{R}$ en alle $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ geldt

   $$\binom{r+s}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k}.$$

   Aanwijzing: Ga eerst na dat $(1+z)^{r+s} = (1+z)^r(1+z)^s$ voor elke $z \in \mathbb{C}$ met $|z| < 1$. Gebruik vervolgens de formule voor het produkt van twee machtreeksen.

(b) Laat zien dat voor alle $m, n \in \mathbb{Z}$ met $m, n \geq 0$ geldt

$$\binom{m+1}{n} = \binom{m}{n} + \binom{m}{n-1}.$$

6. Neem voor V de lineaire ruimte van alle rijen $\{a_n\}_{n\geq 0}$ complexe getallen. Neem

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ \{a_n\}_{n\geq 0} \in V \,\middle|\, \text{de reeks } \sum_{n\geq 0} a_n \text{ convergeert} \right\} \\ W_2 &= \left\{ \{a_n\}_{n\geq 0} \in V \,\middle|\, \text{de reeks } \sum_{n\geq 0} |a_n| \text{ convergeert} \right\} \\ W_3 &= \left\{ \{a_n\}_{n\geq 0} \in V \,\middle|\, \text{de reeks } \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 \text{ convergeert} \right\} \end{aligned}$$

(a) Laat zien dat W_1, W_2, W_3 lineaire deelruimtes van V zijn.

(b) Laat zien dat $W_2 \subset W_1$. Geef een voorbeeld van een rij die in W_1 zit maar niet in W_2.

(c) Laat zien dat $W_2 \subset W_3$. Geef een voorbeeld van een rij die in W_3 zit maar niet in W_2.

7. Neem de lineaire ruimte $C^0(\mathbb{R})$ bestaande uit alle continue reëelwaardige funkties op $\mathbb{R}$. Neem

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ f \in C^0(\mathbb{R}) \,\middle|\, \text{de integraal } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \text{ convergeert} \right\} \\ W_2 &= \left\{ f \in C^0(\mathbb{R}) \,\middle|\, \text{de integraal } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx \text{ convergeert} \right\} \\ W_3 &= \left\{ f \in C^0(\mathbb{R}) \,\middle|\, \text{de integraal } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2dx \text{ convergeert} \right\} \end{aligned}$$

(a) Laat zien dat W_1, W_2, W_3 lineaire deelruimtes van $C^0(\mathbb{R})$ zijn.

(b) Laat zien dat $W_2 \subset W_1$. Geef een voorbeeld van een funktie die in W_1 zit maar niet in W_2.

(c) Geef een voorbeeld van een funktie die in W_3 zit maar niet in W_2. Geef een voorbeeld van een funktie die in W_2 zit maar niet in W_3.

8. Zij N een positief geheel getal. Zij Pol_N de lineaire ruimte van alle polynomen van graad $\leq N$ met coëfficiënten in $\mathbb{R}$.

   (a) Laat zien dat $\{1, x, \ldots, x^N\}$ een basis is van Pol_N.

   (b) Definieer de lineaire afbeelding $D : \mathsf{Pol}_N \to \mathsf{Pol}_N$ door: voor $f \in \mathsf{Pol}_N$ is $Df = f'$ de afgeleide van f.
   Geef de matrix van D t.o.v. de basis $\{1, x, \ldots, x^N\}$.

   (c) Bepaal de eigenwaarden en eigenvektoren van D m.b.v. de matrix uit het vorige onderdeel.

9. Zij Pol_3 de lineaire ruimte van alle polynomen van graad ≤ 3 met coëfficiënten in $\mathbb{R}$. Neem de operator van Hermite:

$$(D_{\text{Her}}(f))(x) := f''(x) - 2xf'(x) - f(x)$$

   (a) Laat zien dat als f in Pol_3 zit, dan is ook $D_{\text{Her}}(f) \in \mathsf{Pol}_3$

   (b) Geef de matrix van D_{Her} t.o.v. de basis $\{1, x, x^2, x^3\}$ van Pol_3.

   (c) Bepaal de eigenwaarden en eigenvektoren van de lineaire operator D_{Her} op de lineaire ruimte Pol_3 m.b.v. de matrix uit het vorige onderdeel.

10. Zij Pol_3 de lineaire ruimte van alle polynomen van graad ≤ 3 met coëfficiënten in $\mathbb{R}$. Neem de operator van Legendre:

$$(D_{\text{Leg}}(f))(x) := (1 - x^2)f''(x) - 2xf'(x)$$

   (a) Laat zien dat als f in Pol_3 zit, dan is ook $D_{\text{Leg}}(f) \in \mathsf{Pol}_3$

   (b) Geef de matrix van D_{Leg} t.o.v. de basis $\{1, x, x^2, x^3\}$ van Pol_3.

   (c) Bepaal de eigenwaarden en eigenvektoren van de lineaire operator D_{Leg} op de lineaire ruimte Pol_3 m.b.v. de matrix uit het vorige onderdeel.

11. Neem voor een positief reëel getal P de lineaire ruimte $C^\infty_{P-\text{per,even}}$ bestaande uit alle even P-periodieke reëelwaardige funkties op $\mathbb{R}$, die willekeurig vaak differentieerbaar zijn.

   (a) Laat zien dat als f in $C^\infty_{P-\text{per,even}}$ zit, dan zit ook f'' in $C^\infty_{P-\text{per,even}}$.

(b) Bepaal de eigenwaarden en bijbehorende eigenfunkties voor de operator

$$D^2 : C^\infty_{P-\text{per,even}} \longrightarrow C^\infty_{P-\text{per,even}}\,, \qquad D^2(f) = f''.$$

12. Neem voor een positief reëel getal P de lineaire ruimte $C^\infty_{P-\text{per,oneven}}$ bestaande uit alle oneven P-periodieke reëelwaardige funkties op $\mathbb{R}$, die willekeurig vaak differentieerbaar zijn.

(a) Laat zien dat als $f \in C^\infty_{P-\text{per,oneven}}$, dan zit ook f'' in $C^\infty_{P-\text{per,oneven}}$.

(b) Bepaal de eigenwaarden en bijbehorende eigenfunkties voor de operator

$$D^2 : C^\infty_{P-\text{per,oneven}} \longrightarrow C^\infty_{P-\text{per,oneven}}\,, \qquad D^2(f) = f''.$$

13. Voor ieder geheel getal $n \geq 0$ wordt het Hermite polynoom $H_n(x)$ eenduidig bepaald door de volgende drie eisen

- $H_n(x)$ is een polynoom van graad n
- De coëfficiënt van x^n in $H_n(x)$ is 2^n
- $H_n''(x) - 2xH_n'(x) = -2nH_n(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) Ga na dat uit $H_{n+1}''(x) - 2xH_{n+1}'(x) = -(2n+2)H_{n+1}(x)$ volgt $H_{n+1}'''(x) - 2xH_{n+1}''(x) = -2nH_{n+1}'(x)$

(b) Laat zien dat voor $n \geq 0$ het polynoom $\frac{1}{2n+2}H_{n+1}'(x)$ voldoet aan de bovenstaande drie eisen die $H_n(x)$ karakteriseren.
Concludeer:

$$H_{n+1}'(x) = (2n+2)H_n(x) \qquad \text{voor } n \geq 0.$$

(c) Laat zien dat voor $n \geq 2$ het polynoom $2xH_{n-1}(x) - (2n-2)H_{n-2}(x)$ voldoet aan de bovenstaande drie eisen die $H_n(x)$ karakteriseren.
Concludeer:

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - (2n-2)H_{n-2}(x) \qquad \text{voor } n \geq 2.$$

(d) Bereken $H_2(x)$, $H_3(x)$, $H_4(x)$, $H_5(x)$ uitgaande van $H_0(x) = 1$ en $H_1(x) = 2x$.

14. Het *standaard inprodukt* op $\mathbb{R}^2$ wordt gegeven door

$$\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2.$$

Ga na dat deze formule voldoet aan de eisen voor een inprodukt.

15. Het *standaard inprodukt* op $\mathbb{C}^2$ wordt gegeven door

$$\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle = v_1 \overline{w_1} + v_2 \overline{w_2}.$$

Ga na dat deze formule voldoet aan de eisen voor een inprodukt.

16. Definieer voor $(v_1, v_2), (w_1, w_2) \in \mathbb{R}$

$$\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle = 2v_1 w_1 + 3v_2 w_2 - v_1 w_2 - v_2 w_1.$$

Ga na dat deze formule voldoet aan de eisen voor een inprodukt.

17. Neem de lineaire ruimte $C^0([-1,1])$ van alle continue reëelwaardige funkties op het interval $[-1,1]$. Definieer voor $f, g \in C^0([-1,1])$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx.$$

Ga na dat deze formule voldoet aan de eisen voor een inprodukt.

18. Neem de lineaire ruimte $C^0([-1,1])$ van alle continue reëelwaardige funkties op het interval $[-1,1]$. Definieer voor $f, g \in C^0([-1,1])$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \sqrt{1 - x^2} dx.$$

Ga na dat deze formule voldoet aan de eisen voor een inprodukt.

19. Neem in de lineaire ruimte $C^0(\mathbb{R})$ bestaande uit alle continue reëelwaardige funkties op $\mathbb{R}$ de lineaire deelruimte

$$V = \{ f \in C^0(\mathbb{R}) \mid f(x) = \mathcal{O}\left(e^{x^2/3}\right) \quad \text{voor } |x| \to \infty \}.$$

Definieer voor $f, g \in V$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) e^{-x^2} dx.$$

Laat zien dat deze oneigenlijke integraal convergeert.
Laat zien dat deze formule voldoet aan de eisen voor een inprodukt.

20. Neem de ruimte $L^2_{\text{cont}}(\mathbb{R})$ van alle continue kwadratisch integreerbare reële funkties op $\mathbb{R}$

$$L^2_{\text{cont}}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C^0(\mathbb{R}) \;\middle|\; \text{de integraal } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \text{ convergeert} \right\}$$

(a) Laat zien dat als $f, g \in L^2_{\text{cont}}(\mathbb{R})$ dan convergeert de oneigenlijke integraal $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$.

(b) Laat zien dat de formule $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$ een inprodukt definieert op de lineaire ruimte $L^2_{\text{cont}}(\mathbb{R})$.

21. Neem de lineaire ruimte $C^0([-\pi, \pi])$ van alle continue reëelwaardige funkties op het interval $[-\pi, \pi]$. Definieer voor $f, g \in C^0([-\pi, \pi])$

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx.$$

Ga na dat deze formule een inprodukt definieert.

Neem de lineaire operator $J : C^0([-\pi, \pi]) \to C^0([-\pi, \pi])$ gegeven door $(J(f))(x) = f(-x)$. Laat zien dat J een symmetrische operator is t.a.v. het gegeven inprodukt.

Laat, zonder rekenen, zien dat voor alle $n, m \in \mathbb{Z}$ geldt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\sin(mx)dx = 0$$

22. Zij Pol_4 de lineaire ruimte van alle polynomen van graad ≤ 4 met coëfficiënten in $\mathbb{R}$. Neem op deze ruimte het inprodukt gegeven door

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx \qquad \text{voor} \quad f, g \in \mathsf{Pol}_4.$$

(a) Bereken $\langle x^n, x^m\rangle$ voor alle $n, m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

(b) Bepaal polynomen $p_n(x)$ voor $n = 0, 1, 2, 3, 4$ zo dat

$$\begin{aligned} \text{graad}\, p_n(x) &= n \\ \langle p_n(x), x^m\rangle &= 0 \qquad \text{als} \quad m < n \end{aligned}$$

Aanwijzing: voor $p_3(x)$ bijvoorbeeld, schrijf $p_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$; dan levert de eis $\langle p_3(x), x^m \rangle = 0$ voor $m = 0, 1, 2$ drie lineaire vergelijkingen voor de vier onbekenden a_0, a_1, a_2, a_3.

(c) Vergelijk de polynomen $p_n(x)$ met de Legendre polynomen $P_n(x)$.

23. Zij Pol_3 de lineaire ruimte van alle polynomen van graad ≤ 3 met coëfficiënten in $\mathbb{R}$. Neem op deze ruimte het inprodukt gegeven door

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) e^{-x^2} dx \qquad \text{voor} \quad f, g \in \mathsf{Pol}_3.$$

(a) Ga na dat voor alle $n, m \in \{0, 1, 2, 3\}$ geldt

$$\langle x^n, x^m \rangle = \begin{cases} 0 & \text{als} \quad n+m \quad \text{oneven is} \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+m+1}{2}\right) & \text{als} \quad n+m \quad \text{even is} \end{cases}$$

N.B. de Gamma-funktie is gedefinieerd door $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1}\, dt$.

(b) Gebruik de bekende formules $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ en $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ om $\langle x^n, x^m \rangle$ expliciet als een rationaal getal te schrijven.

(c) Bepaal polynomen $h_n(x)$ voor $n = 0, 1, 2, 3$ zo dat

$$\begin{aligned} \operatorname{graad} h_n(x) &= n \\ \langle h_n(x), x^m \rangle &= 0 \qquad \text{als} \quad m < n \end{aligned}$$

(d) Vergelijk de polynomen $h_n(x)$ met de Hermite polynomen $H_n(x)$.

24. Neem de lineaire ruimte $C^\infty_{2\pi-\mathrm{per}}(\mathbb{R})$ bestaande uit alle 2π-periodieke reëelwaardige funkties op $\mathbb{R}$, die willekeurig vaak differentieerbaar zijn. Deze ruimte voorzien we van het inprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx.$$

Verder bekijken we op deze ruimte de lineaire operator

$$D^2 : C^\infty_{2\pi-\mathrm{per}}(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty_{2\pi-\mathrm{per}}(\mathbb{R}), \qquad D^2(f) = f''.$$

Laat zien dat de operator D^2 symmetrisch is t.a.v. het gegeven inprodukt.

25. In de quantum theorie van het waterstof atoom komt men de *differentiaalvergelijking van Laguerre* tegen. Deze luidt:

$$xf''(x) + (1-x)f'(x) + \lambda f(x) = 0.$$

Het gaat hier dus om een eigenwaarde probleem, waarbij $-\lambda$ de eigenwaarde is en de operator D_{Lag} wordt gegeven door $(D_{\text{Lag}}f)(x) = xf''(x) + (1-x)f'(x)$.

(a) Laat zien dat een funktie die wordt gegeven door een machtreeks $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, voldoet aan de differentiaalvergelijking van Laguerre precies dan als de coëfficiënten a_n voldoen aan de recursie relatie

$$n^2 a_n = (n-1-\lambda)a_{n-1} \qquad \text{voor} \quad n \geq 1. \qquad (\star)$$

(b) Laat zien dat de convergentiestraal van zo'n machtreeksoplossing oneindig is.

De machtreeks geeft dus een funktie die op de hele reële lijn $\mathbb{R}$ gedefinieerd is.

(c) Laat zien dat als $\lambda = N$ een geheel getal is, met $N \geq 0$, dan is $a_n = 0$ voor $n > N$. De machtreeks is dan dus een polynoom.

We krijgen zo voor ieder geheel getal $N \geq 0$ precies één polynoom $L_N(x)$ dat voldoet aan

$$xL_N''(x) + (1-x)L_N'(x) + NL_N(x) = 0 \qquad \text{en} \qquad L_N(0) = 1.$$

Men noemt deze polynomen de *Laguerre polynomen*.

Ga na dat de Laguerre polynomen L_0, L_1, L_2, L_3 zijn:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1 \\ L_1(x) &= 1 - x \\ L_2(x) &= 1 - 2x + \frac{1}{2}x^2 \\ L_3(x) &= 1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \end{aligned}$$

(d) Neem nu aan dat λ niet een geheel ≥ 0 is. Zij m het kleinste gehele getal dat voldoet aan $m > 4|1+\lambda|$.

Laat zien m.b.v. de recursie $(\star)$ dat dan voor $n \geq m$ geldt

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} > \frac{3}{4n} \qquad \text{en} \qquad \frac{a_n}{a_m} > \left(\frac{3}{4}\right)^{n-m} \frac{m!}{n!}.$$

Laat zien dat voor elke $x > 0$ geldt:

$$\left|\sum_{n=m}^{\infty} a_n x^n\right| > |a_m| m! \left(\frac{3}{4}\right)^{-m} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{3x}{4}\right)^n.$$

Laat zien dat voor de machtreeksfunktie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ geldt

$$\lim_{x\to\infty} |f(x)| e^{-\frac{3x}{4}} > 0$$

Dit groeigedrag van de funktie f is fysisch niet acceptabel (zie bijvoorbeeld: Bransden & Joachain: Quantum Mechanics p. 354 formule (7.110)).

Vandaar dus dat fysisch alleen de oplossingen van de Laguerre vergelijking met gehele $\lambda \geq 0$, d.w.z. de Laguerre polynomen, interessant zijn.

26. Zij Pol_3 de lineaire ruimte van alle polynomen van graad ≤ 3 met coëfficiënten in $\mathbb{R}$. Neem op deze ruimte het inprodukt gegeven door

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{\infty} f(x)g(x)e^{-x}dx \qquad \text{voor} \quad f, g \in \mathsf{Pol}_3.$$

(a) Ga na dat voor alle $n, m \in \{0, 1, 2, 3\}$ geldt

$$\langle x^n, x^m\rangle = (n+m)!$$

N.B. de Gamma-funktie is gedefinieerd door $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{s-1}\,dt$. Gebruik de bekende formule $\Gamma(k+1) = k!$ voor ieder geheel getal $k \geq 0$.

(b) Bepaal polynomen $\ell_n(x)$ voor $n = 0, 1, 2, 3$ zo dat

$$\begin{aligned} \text{graad}\,\ell_n(x) &= n \\ \langle \ell_n(x), x^m\rangle &= 0 \qquad \text{als} \quad m < n \end{aligned}$$

(c) Vergelijk de polynomen $\ell_n(x)$ met de Laguerre polynomen $L_n(x)$ uit de vorige opgave.

27. Zij $\mathsf{Polynomen}$ de lineaire ruimte van alle polynomen met coëfficiënten in $\mathbb{R}$. Neem op deze ruimte het inprodukt gegeven door

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}dx \qquad \text{voor} \quad f, g \in \mathsf{Polynomen}.$$

Bekijk verder de operator van Laguerre:

$$\begin{aligned} D_{\text{Lag}} : &\quad \mathsf{Polynomen} \longrightarrow \mathsf{Polynomen} \\ (D_{\text{Lag}}f)(x) &= xf''(x) + (1-x)f'(x) \end{aligned}$$

(a) Ga na dat $(D_{\text{Lag}}f)(x) = e^x \left(xe^{-x}f'\right)'(x)$ voor elk polynoom f.

(b) Laat zien dat D_{Lag} een symmetrische operator is voor het gegeven inprodukt.

28. We onderzoeken in deze opgave de differentiaalvergelijking van Chebyshev

$$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) + \lambda f(x) = 0 \qquad (\star)$$

(a) Laat zien dat een funktie die wordt gegeven door een machtreeks $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$, voldoet aan de differentiaalvergelijking $(\star)$ precies dan als de coëfficiënten a_n voldoen aan de recursie relatie

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} = (n^2 - \lambda)a_n \qquad \text{voor} \quad n \geq 0.$$

(b) Laat zien dat als $\lambda = N^2$ voor een geheel getal $N \geq 0$, dan is er een polynoom $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_Nx^N$ dat voldoet aan de differentiaalvergelijking $(\star)$ en dat niet constant nul is.

(c) Geef voor $\lambda = 16$ een polynoom $f_4(x)$ dat voldoet aan de differentiaalvergelijking $(\star)$ en zo dat $f_4(0) = 1$.

(d) Geef voor $\lambda = 25$ een polynoom $f_5(x)$ dat voldoet aan de differentiaalvergelijking $(\star)$ en zo dat $f_5'(0) = 1$.

29. We nemen de lineaire ruimte $C^0_{\text{begrensd}}(]-1,1[)$ bestaande uit de continue begrensde reëelwaardige funkties op het open interval $]-1,1[$.

(a) Laat zien dat de oneigenlijke integraal $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ convergeert en bereken deze integraal.

(b) Laat zien dat voor alle $f, g \in C^0_{\text{begrensd}}(]-1,1[)$ de oneigenlijke integraal $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ convergeert.

Voor $f, g \in C^0_{\text{begrensd}}(]-1,1[)$ definiëren we nu

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

(c) Laat zien dat deze formule voldoet aan de eisen voor een inprodukt.

Opmerking: Je mag hier zonder bewijs gebruiken: als h een continue funktie is op $]-1,1[$ zodat $h(x) \geq 0$ voor alle $x \in]-1,1[$ en zodat $\int_{-1}^{1} h(x)dx$ convergeert en $\int_{-1}^{1} h(x)dx = 0$, dan is de funktie h constant gelijk aan 0.
Geef wel duidelijk aan waar en hoe je deze opmerking gebruikt.

(d) Definieer voor ieder geheel getal $k \geq 0$ het getal c_k door

$$c_k = \int_{-1}^{1} \frac{x^k}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Laat zien dat $\quad c_k = \dfrac{k-1}{k} c_{k-2} \quad$ voor $k \geq 2$.
Bereken c_k voor $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

(e) Bepaal voor $n = 0, 1, 2$ een polynoom $T_n(x)$ dat niet constant nul is en dat voldoet aan

$$\begin{aligned} \text{graad} T_n(x) &= n \\ \langle T_n(x), x^m\rangle &= 0 \qquad \text{als} \quad m < n \end{aligned}$$

Aanwijzing: Merk op dat $\langle x^n, x^m\rangle = c_{n+m}$ met c_{n+m} als in het vorige onderdeel.

30. We nemen de lineaire ruimte $C^\infty_{\text{begrensd}}(]-1,1[)$ bestaande uit alle willekeurig vaak differentieerbare reëelwaardige funkties f op het open interval $]-1,1[$ waarvoor ook alle afgeleiden $f^{(j)}$ begrensde funkties op $]-1,1[$ zijn. Op deze ruimte nemen we het inprodukt:

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad \text{voor} \quad f,g \in C^\infty_{\text{begrensd}}(]-1,1[).$$

(Je hoeft hier niet meer te bewijzen dat dit een inprodukt is!)

Verder nemen we de Chebyshev operator:

$$(D_{\text{Cheb}}f)(x) = (1-x^2)f''(x) - xf'(x) \qquad \text{voor} \quad f \in C^\infty_{\text{begrensd}}(]-1,1[).$$

(Je mag zonder bewijs gebruiken dat D_{Cheb} een lineaire afbeelding is van
$C^\infty_{\text{begrensd}}(]-1,1[)$ naar $C^\infty_{\text{begrensd}}(]-1,1[)$.)

Laat zien dat D_{Cheb} een symmetrische operator is voor het gegeven inprodukt.
Aanwijzing: Wat is de afgeleide van $\sqrt{1-x^2}$?

31. Zij P de vier-dimensionale lineaire ruimte bestaande uit de polynomen $p(x)$ van de vorm $p(x) = a_0 + a_1x + a_4x^4 + a_5x^5$ met $a_0, a_1, a_4, a_5 \in \mathbb{R}$. Definieer voor $p(x) \in \mathsf{P}$

$$Lp(x) = (x^{-2} - x^2)p''(x) - 2xp'(x)$$

(a) Laat zien dat als $p(x) \in \mathsf{P}$ dan is ook $Lp(x) \in \mathsf{P}$

(b) Laat zien de afbeelding $L : \mathsf{P} \to \mathsf{P}$ een lineaire afbeelding is.

(c) Geef de matrix van L t.o.v. de basis $\{1, x, x^4, x^5\}$ van P.

(d) Bepaal de eigenwaarden en eigenvektoren van de lineaire operator L op de lineaire ruimte P m.b.v. de matrix uit het vorige onderdeel.

32. We onderzoeken in deze opgave de differentiaalvergelijking

$$(1-x^4)f''(x) - 2x^3f'(x) + \lambda x^2 f(x) = 0 \qquad (\star)$$

(a) Geef voor $\lambda = 20$ een polynoom $f_4(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ van graad 4 dat voldoet aan de differentiaalvergelijking $(\star)$ en zo dat $f_4(0) = 3$.

(b) Laat nu weer λ een willekeurig reëel getal zijn.

Laat zien dat een funktie die wordt gegeven door een machtreeks $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, voldoet aan de differentiaalvergelijking $(\star)$ precies dan als de coëfficiënten a_n voldoen aan

$$\begin{aligned} &a_2 = a_3 = 0 \\ &(n+3)(n+4)a_{n+4} = (n^2 + n - \lambda)a_n \qquad \text{voor} \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

(c) Zij N een positief geheel getal. Neem aan dat er een polynoom $f_N(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_Nx^N$ is met $a_N \neq 0$ dat voldoet aan de differentiaalvergelijking $(\star)$.

Laat zien dat $\lambda = N^2 + N$ en dat N of $N - 1$ deelbaar is door 4.

33. We nemen de lineaire ruimte $C^{\infty}_{\text{begrensd}}(]-1,1[)$ bestaande uit de willekeurig vaak differentieerbare begrensde reëelwaardige funkties op het open interval $]-1,1[$ waarvoor ook alle afgeleiden $f^{(j)}$ begrensde funkties op $]-1,1[$ zijn.

(a) Laat zien dat de oneigenlijke integraal $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ convergeert.

N.B. Je hoeft deze integraal *niet* te berekenen!

(b) Laat zien dat voor alle $f, g \in C^{\infty}_{\text{begrensd}}(]-1,1[)$ de oneigenlijke integraal $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^4}} dx$ convergeert.

Voor $f, g \in C^{\infty}_{\text{begrensd}}(]-1,1[)$ definiëren we nu

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^4}} dx.$$

(c) Laat zien dat deze formule voldoet aan de eisen voor een inprodukt.

Opmerking: Je mag hier zonder bewijs gebruiken: als h een continue funktie is op $]-1,1[$ zodat $h(x) \geq 0$ voor alle $x \in]-1,1[$ en zodat $\int_{-1}^{1} h(x)dx$ convergeert en $\int_{-1}^{1} h(x)dx = 0$, dan is de funktie

h constant gelijk aan 0.
Geef wel duidelijk aan waar en hoe je deze opmerking gebruikt.

Neem de operator:

$$(Df)(x) = (1 - x^4)f''(x) - 2x^3 f'(x) \qquad \text{voor} \quad f \in C^\infty_{\text{begrensd}}(]-1,1[).$$

Je mag zonder bewijs gebruiken dat D een lineaire afbeelding is van $C^\infty_{\text{begrensd}}(]-1,1[)$ naar $C^\infty_{\text{begrensd}}(]-1,1[)$.

(d) Laat zien dat D een symmetrische operator is voor het gegeven inprodukt.
Aanwijzing: Wat is de afgeleide van $\sqrt{1-x^4}$?

34. Zij V een lineaire ruimte over $\mathbb{R}$ voorzien van een inprodukt $\langle .,. \rangle$. Zij W een lineaire deelruimte van V en v een element van V. Stel $u \in W$ is zo dat voor iedere $w \in W$ geldt $\| v - u \| \leq \| v - w \|$.

(a) Bewijs dat voor elke $z \in W$ geldt $\langle v - u, z \rangle = 0$.
Illustreer dit met een tekening voor het geval $\dim V = 3$ en $\dim W = 2$.
Aanwijzing voor het bewijs: Voor vaste $z \in W$ en variabele $t \in \mathbb{R}$ is $\| v - u - tz \|^2$ een funktie van t. Wat is de afgeleide van deze funktie? Waar is de funktie minimaal?

(b) Veronderstel dat $e_1, \ldots, e_n$ een basis van W is met de eigenschap $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ als $i \neq j$.
Bepaal de coordinaten van u t.o.v. deze basis.

35. Ter illustratie van de vorige opgave nemen we voor V de lineaire ruimte $C^0([-1,1])$ bestaande uit alle continue funkties op het gesloten interval $[-1,1]$ voorzien van het inprodukt $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$. Voor W nemen we de lineaire ruimte Pol_4 bestaande uit alle polynomen van graad ≤ 4.

(a) Geef een basis van $p_0, \ldots, p_4$ van Pol_4 zodat $\langle p_i, p_j \rangle = 0$ als $i \neq j$.

(b) Bepaal bij gegeven $f \in C^0([-1,1])$ het polynoom $u \in \mathsf{Pol}_4$ zo dat voor iedere $w \in \mathsf{Pol}_4$ geldt $\| f - u \| \leq \| f - w \|$.

36. We nemen de lineaire ruimte $C^\infty_{\text{begrensd}}(\mathbb{R})$ bestaande uit de willekeurig vaak differentieerbare begrensde reëelwaardige funkties op $\mathbb{R}$ waarvoor ook alle afgeleiden $f^{(j)}$ begrensde funkties op $\mathbb{R}$ zijn.

(a) Bepaal het spectrum van de operator

$$D : C^\infty_{\text{begrensd}}(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty_{\text{begrensd}}(\mathbb{R})\,, \qquad Df = f'.$$

(b) Bepaal het spectrum van de operator

$$D^2 : C^\infty_{\text{begrensd}}(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty_{\text{begrensd}}(\mathbb{R})\,, \qquad D^2 f = f''.$$

37. We nemen de lineaire ruimte $C^\infty_{\{0,5\}}(\mathbb{R})$ bestaande uit de willekeurig vaak differentieerbare reëelwaardige funkties op $\mathbb{R}$ waarvoor alle even afgeleiden $f^{(2j)}$ nul zijn in 0 en in 5: $f^{(2j)}(0) = f^{(2j)}(5) = 0$ voor $j \in \mathbb{Z}, j \geq 0$.

Bepaal het spectrum van de operator

$$D^2 : C^\infty_{\{0,5\}}(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty_{\{0,5\}}(\mathbb{R})\,, \qquad D^2 f = f''.$$

38. Bepaal alle machtreeksfunkties $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ die voldoen aan de differentiaalvergelijking $f'(z) = f(z)$.

39. Bepaal alle machtreeksfunkties $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ die voldoen aan de differentiaalvergelijking $f''(z) = f(z)$.

8 Besselfunkties

De differentiaalvergelijking van Bessel is

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0\,. \tag{43}$$

Hier is ν een (vastgehouden) reële parameter; zonder beperking mogen we $\nu \geq 0$ nemen. We schrijven $\mathcal{L}$ voor de differentiaaloperator die aan een funktie y toevoegt de funktie

$$\mathcal{L}y = x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}y \,+\, x\frac{\partial}{\partial x}y \,+\, (x^2 - \nu^2)\,y\,.$$

Om deze differentiaalvergelijking op te lossen berekenen we $\mathcal{L}y$ voor een funktie y van de vorm

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,, \qquad \text{met} \quad a_0 = 1; \tag{44}$$

hier zijn r en de coëfficiënten a_n voor $n \geq 1$ vooralsnog onbekenden, die in de loop van het verhaal zullen worden gespecificeerd ten einde bepaalde effecten te bereiken. We definiëren x^{r+n} als

$$x^{r+n} = x^n \exp(r \log x)\,,$$

hetgeen vereist dat $x > 0$ is.

Merk op dat de funkties y die we uitproberen als mogelijke oplossing van de differentiaalvergelijking, iets algemener zijn dan de machtreeksen waarmee we in de voorgaande hoofdstukken werkten.

We berekenen

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}y &= \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n x^{r+n} \\
&\quad - \sum_{n=0}^{\infty}\nu^2 a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}[(r+n)^2 - \nu^2]a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2} \\
&= [r^2 - \nu^2]a_0 x^r \,+\, [(r+1)^2 - \nu^2]a_1 x^{r+1} \,+ \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty}\{[(r+n)^2 - \nu^2]a_n + a_{n-2}\}x^{r+n}\,.
\end{aligned}$$

In dit antwoord onderscheiden we twee delen: de term $[r^2-\nu^2]a_0x^r$ en de rest.

Men noemt $r^2-\nu^2$ het *indiciaal polynoom* van de gegeven differentiaalvergelijking bij $x=0$. De nulpunten van dit indiciaal polynoom (in dit geval ν en $-\nu$) noemt men de *exponenten* bij $x=0$. Die exponenten zijn belangrijk omdat, wanneer we r gelijk nemen aan zo'n exponent, de term $[r^2-\nu^2]a_0x^r$ nul is. Uit wat men zoal in de literatuur leest over het oplossen van zo'n differentiaalvergelijking krijgt men vaak de indruk dat men eerst die term $[r^2-\nu^2]a_0x^r$ nul moet maken, door voor r een van de exponenten in te vullen.

Dat is echter niet de weg die wij hier gaan volgen: Ons eerste doel is om die rest nul te maken door geschikte keuze van de coëfficiënten a_n; d.w.z. we willen

$$a_0=1\,,\qquad a_1=0\,,\qquad [(r+n)^2-\nu^2]a_n+a_{n-2}=0\quad\text{voor}\quad n\geq 2\,.$$

Deze recursie heeft als oplossing: voor elke $m\geq 1$:

$$\begin{aligned} a_{2m-1} &= 0\,,\\ a_{2m} &= (-1)^m\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{(r+\nu+2k)(r-\nu+2k)}\,. \end{aligned} \tag{45}$$

De coëfficiënten a_n zijn hiermee dus gespecificeerd als bekende funkties van r; daarbij mag r variëren in $\mathbb{R}$ mits voldaan is aan de eis dat $r+\nu$ en $r-\nu$ geen negatieve even gehele getallen zijn (dit om te voorkomen dat de noemer in (45) nul wordt).

Door (45) in te vullen in (44) komen we tot een nieuw uitgangspunt [1] :

$$y(x,r)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left(\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{(r+\nu+2k)(r-\nu+2k)}\right)x^{r+2m}\,. \tag{46}$$

We schrijven hier $y(x,r)$ om te benadrukken dat y een funktie is van twee variabelen x en r, waarbij $x>0$ moet zijn en $r+\nu$ en $r-\nu$ geen negatieve even gehele getallen mogen zijn.

Met de specificaties in (45) bereiken we dat

$$\mathcal{L}y(x,r)=(r^2-\nu^2)x^r\,. \tag{47}$$

[1] Bij het gebruik van de notatie $\prod_{k=l}^{m}p_k$ voor het produkt van een aantal getallen p_k hanteert men de conventie dat men $\prod_{k=l}^{m}p_k$ moet interpreteren als zijnde 1 wanneer $m<l$ is.

Het zal heel belangrijk blijken te zijn dat (47) een gelijkheid is van twee funkties van de variabelen x en r.

Wanneer we voor r een concreet getal invullen krijgen we uit (47) een gelijkheid van twee funkties in de overblijvende variabele x. Voorwaarde bij dit concrete invullen is wel dat $r+\nu$ en $r-\nu$ geen negatieve even gehele getallen mogen zijn (n.b.: we hadden $\nu \geq 0$ genomen).

$r = \nu$ invullen mag altijd omdat $\nu + \nu$ en $\nu - \nu$ niet negatief zijn. Het rechterlid in (47) is dan 0 voor alle $x > 0$ en dus is $y(x, \nu)$ altijd een oplossing van de Bessel differentiaalvergelijking (43); expliciet:

$$y(x,\nu) = x^{\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \prod_{k=1}^{m}(k+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} . \tag{48}$$

$r = -\nu$ invullen mag alleen als ν niet een positief geheel getal is. In dat geval is het rechterlid in (47) 0 voor alle $x > 0$ en dus is $y(x, -\nu)$ dan een oplossing van de Bessel differentiaalvergelijking (43); expliciet:

$$y(x,-\nu) = x^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \prod_{k=1}^{m}(k-\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} . \tag{49}$$

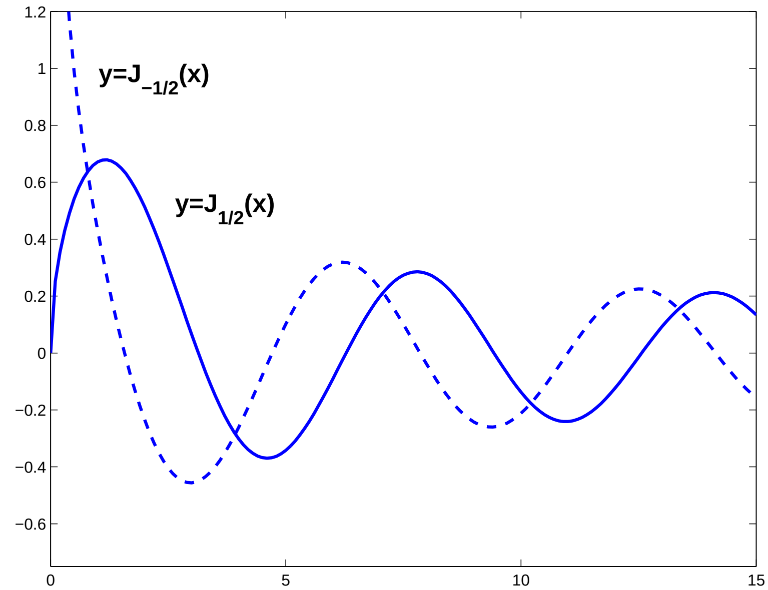
Wanneer ν niet een geheel getal ≥ 0 is, zijn $y(x, \nu)$ en $y(x, -\nu)$ twee lineair onafhankelijke oplossingen van de Bessel differentiaalvergelijking (43).

Voor $\nu = 0$ is $y(x, -\nu)$ hetzelfde als $y(x, \nu)$ en hebben we dus pas één oplossing te pakken. Voor ν positief geheel bestaat $y(x, -\nu)$ niet en hebben we dus weer pas één oplossing te pakken. Om in deze gevallen een tweede oplossing te vinden gaan we essentieel gebruiken maken van het feit dat dat (47) een gelijkheid is van twee funkties van de variabelen x en r.

Voorbeeld: $\nu = \frac{1}{2}$.

Wanneer we in (48) invullen $\nu = \frac{1}{2}$ vinden we

$$y(x, \frac{1}{2}) \quad = \quad x^{\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \prod_{k=1}^{m}(k+\frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$$



Figuur 1: Grafieken van de Bessel functies $J_{-1/2}(x)$ en $J_{1/2}(x)$.

$$
\begin{aligned}
&= x^{\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{\prod_{k=1}^{m}(2k(2k+1))} \\
&= x^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} \\
&= x^{-\frac{1}{2}} \sin(x)\,.
\end{aligned}
$$

Het is gebruikelijk om deze functie te vermenigvuldigen met de constante $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Het resultaat staat bekend als *de Besselfunctie van de eerste soort met orde* $\frac{1}{2}$ en wordt genoteerd als $J_{\frac{1}{2}}(x)$. Dus

$$
J_{\frac{1}{2}}(x) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\sin(x)\,.
$$

Merk op dat deze functie voor alle reële waarden van x is gedefinieerd.

Wanneer we in (49) invullen $\nu = \frac{1}{2}$ vinden we

$$
y(x, -\frac{1}{2}) \;=\; x^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\prod_{k=1}^{m}(k-\frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}
$$

$$
\begin{aligned}
&= x^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{\prod_{k=1}^{m}(2k(2k-1))} \\
&= x^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} \\
&= x^{-\frac{1}{2}} \cos(x)\,.
\end{aligned}
$$

Na vermenigvuldigen met $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ krijgen we *de Besselfunctie van de tweede soort met orde* $\frac{1}{2}$:

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\cos(x)\,.$$

Merk op dat deze functie voor alle reële waarden van x, behalve voor $x = 0$, is gedefinieerd.

De twee functies $J_{\frac{1}{2}}(x)$ *en* $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ *vormen een basis van de oplossingsruimte van Bessels differentiaalvergelijking voor* $\nu = \frac{1}{2}$.

Voorbeeld: $\nu = 0$.

Bij invulling van $\nu = 0$ geven (48) en (49) dezelfde functie. Deze functie wordt genoteerd als $J_0(x)$ en wordt *de Bessel functie van de eerste soort met orde* 0 genoemd. Dus

$$J_0(x) \;=\; \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\,.$$

Om een tweede, van $J_0(x)$ onafhankelijke, oplossing van Bessels differentiaalvergelijking voor $\nu = 0$ te vinden gaan we als volgt te werk. Voor $\nu = 0$ wordt (47):

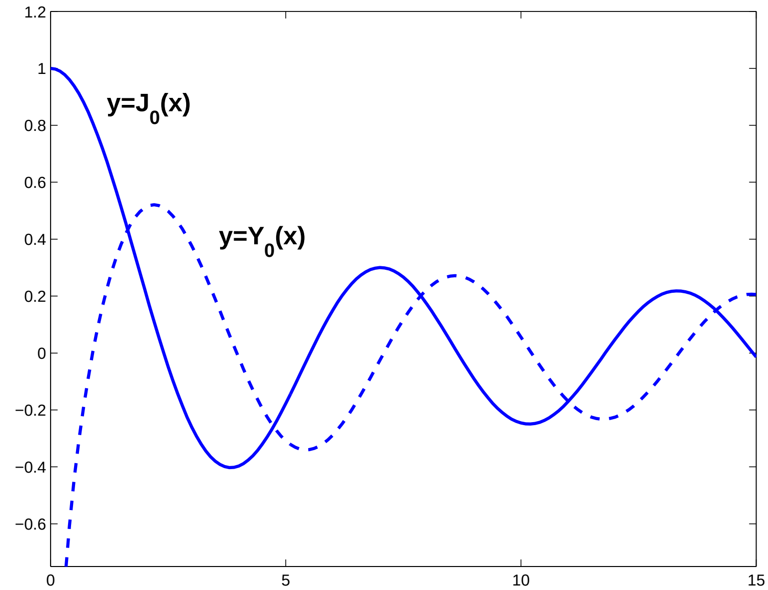
$$\mathcal{L}y(x,r) = r^2 x^r\,. \tag{50}$$

Deze funktie kunnen we naar r differentiëren:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\mathcal{L}y\right)(x,r) = 2rx^r + r^2 x^r \log x\,.$$

Anderzijds is

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\mathcal{L}y\right)(x,r) = \mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial r} y\right)(x,r)\,,$$



Figuur 2: Grafieken van de Bessel functies $J_0(x)$ en $Y_0(x)$.

omdat de operaties differentiëren naar x en differentiëren naar r commuteren, d.w.z.

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}\,.$$

Zo vinden we

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial r}y\right)(x,r) = 2rx^r + r^2x^r\log x\,.$$

Hier mogen we vervolgens $r = 0$ invullen. Dan wordt het rechterlid 0 voor alle $x > 0$ en is, dus, $\left(\frac{\partial}{\partial r}y\right)(x,0)$ een oplossing van de Bessel differentiaalvergelijking (43). Deze oplossing kunnen we gemakkelijk expliciet maken:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}y\right)(x,0) \;=\; \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial r}a_{2m}\right)(0)x^{2m} \;+\; \sum_{m=0}^{\infty}a_{2m}(0)x^{2m}\log x\,.$$

Volgens (46) met $\nu = 0$ en $a_0 = 1$ is

$$a_{2m} = (-1)^m\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{(r+2k)^2}\,.$$

Dus

$$a_{2m}(0) = \frac{(-1)^m}{2^{2m}\,(m!)^2}$$

en

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} a_{2m} &= \frac{a_{2m}}{(-1)^m a_{2m}} \frac{\partial}{\partial r}((-1)^m a_{2m}) \\
&= a_{2m} \frac{\partial}{\partial r} \log((-1)^m a_{2m}) \\
&= a_{2m} \frac{\partial}{\partial r} \log\left(\prod_{k=1}^{m} \frac{1}{(r+2k)^2} \right) \\
&= a_{2m} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial r} \log((r+2k)^{-2}) \\
&= -2a_{2m} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{r+2k}\,.
\end{aligned}$$

Invullen $r = 0$ levert $\left(\frac{\partial}{\partial r} a_0\right)(0) \;=\; 0$ en voor $m > 0$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} a_{2m}\right)(0) \;=\; -a_{2m}(0) \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}\,.$$

Zo vinden we uiteindelijk voor de tweede oplossing bij $\nu = 0$

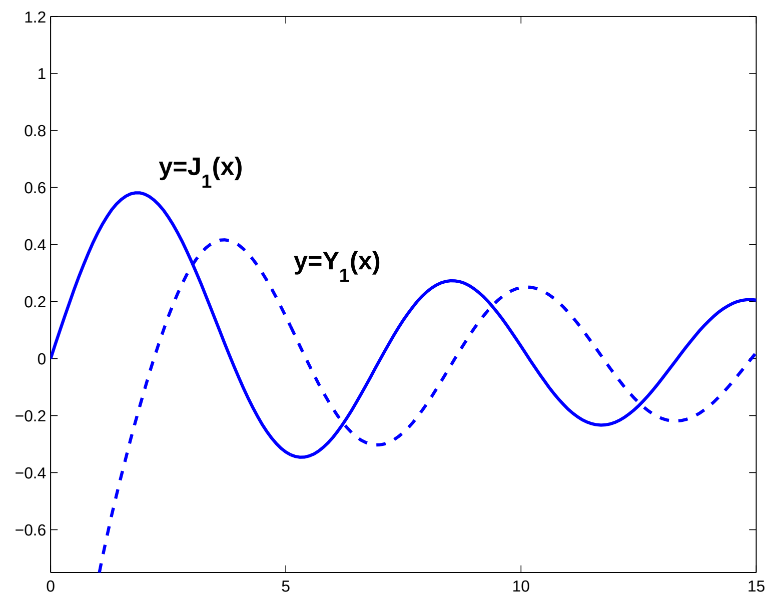
$$\left(\frac{\partial}{\partial r} y\right)(x,0) \;=\; J_0(x)\,\log x \;+\; \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \right) \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\,.$$

Het is gebruikelijk deze oplossing te normaliseren door hem te vermenigvuldigen met $\frac{2}{\pi}$ en er een constant veelvoud van $J_0(x)$ bij te tellen. Men krijgt dan *de Bessel functie van de tweede soort met orde* 0:

$$Y_0(x) \;=\; \frac{2}{\pi} \left[\left(\gamma + \log(\frac{x}{2})\right) J_0(x) \;+\; \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \right) \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \right],$$

waarbij γ de Euler-Mascheroni constante is:

$$\gamma = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \;-\; \log m \right) \approx 0.5772....$$



Figuur 3: Grafieken van de Bessel functies $J_1(x)$ en $Y_1(x)$.

Voorbeeld: $\nu = 1$.

Wanneer we in (48) invullen $\nu = 1$ vinden we

$$y(x,1) = x \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} .$$

Het is gebruikelijk om deze functie nog met $\frac{1}{2}$ te vermenigvuldigen. Het resultaat noemt men *de Bessel functie van de eerste soort met orde* 1 en men noteert deze als $J_1(x)$. Dus:

$$J_1(x) \; = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1} .$$

Om een tweede, van $J_1(x)$ onafhankelijke, oplossing van Bessels differentiaalvergelijking met $\nu = 1$ te vinden kunnen we niet zo maar in (49) invullen $\nu = 1$ (want dan ontstaat ergens een noemer 0). We gaan als volgt te werk. Voor $\nu = 1$ wordt (47)

$$\mathcal{L}y(x,r) = (r^2-1)x^r$$

en wordt (46)

$$y(x,r) = x^r \ + \ \sum_{m=1}^{\infty} \left(\prod_{k=2}^{m} \frac{1}{(r+1+2k)(r-1+2k)} \right) \frac{(-1)^m x^{r+2m}}{(r+1)(r+3)} \,.$$

Bijgevolg is

$$(r+1)y(x,r) = (r+1)x^r + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\prod_{k=2}^{m} \frac{1}{(r+1+2k)(r-1+2k)} \right) \frac{(-1)^m x^{r+2m}}{r+3} \,. \tag{51}$$

We zien dat de funktie $(r+1)y(x,r)$ ook goed gedefinieerd is voor $r = -1$. Bovendien is

$$\mathcal{L}((r+1)y)(x,r) = (r-1)(r+1)^2 x^r \,. \tag{52}$$

Dit laatste is een gelijkheid van funkties in x en r. We zouden hier $r = -1$ kunnen invullen. Het rechterlid wordt dan 0 en dus is $[(r+1)y(x,r)]_{r=-1}$ een oplossing van de differentiaalvergelijking (43). Echter wanneer we in (51) $r = -1$ stellen, dan vinden we

$$\begin{aligned} [(r+1)y(x,r)]_{r=-1} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m!(m+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1} \\ &= -\frac{1}{2} y(x,1) \,, \end{aligned}$$

met $y(x,1)$ als in (48), d.w.z. de oplossing die we al hadden.

Om toch een nieuwe oplossing te vinden kunnen we (52) naar r differentiëren

$$\mathcal{L}(\frac{\partial}{\partial r}((r+1)y))(x,r) = (r+1)^2 x^r + 2(r-1)(r+1)x^r + (r-1)(r+1)^2 x^r \log x \,.$$

Wanneer we hierin $r = -1$ nemen, dan wordt het rechterlid 0 en dus is de funktie $\left(\frac{\partial}{\partial r}((r+1)y)\right)(x,-1)$ een oplossing van de Bessel differentiaalvergelijking voor $\nu = 1$. Laten we deze oplossing expliciet maken, op dezelfde manier als in het geval $\nu = 0$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}((r+1)y) \right)(x,-1) \ =$$

$$= \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-1}\right) \log x \, + \, x^{-1} \, +$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m!(m-1)!} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{m} \left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k-2}\right)\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-1}$$

$$= -\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1}\right) \log x \, +$$
$$+ \, x^{-1} \, - \, x^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m-1)!} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \, + \, \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} .$$

Om in dit geval de functie te normaliseren vermenigvuldigt men de zojuist gevonden functie met $-\frac{2}{\pi}$ en telt men er een constant veelvoud van $J_1(x)$ bij. Het resultaat is de *Bessel functie van de tweede soort met orde* 1

$$\begin{aligned} Y_1(x) \;\; = \;\; & \frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma + \log(\frac{x}{2})\right) J_1(x) \; - \; x^{-1} \right. \\ & \left. + \, x^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m-1)!} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \, + \, \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\right] , \end{aligned}$$

waarbij γ de Euler-Mascheroni constante is.

Opmerking: De methode die we hierboven gegeven hebben om voor $\nu = 1$ een tweede oplossing te construeren, werkt voor elke positieve gehele waarde van ν: twee onafhankelijke oplossingen zijn

$$y(x, \nu) \qquad \text{en} \qquad \left(\frac{\partial}{\partial r}((r+\nu)y)\right)(x, -\nu) \, ,$$

met funktie $y(x, r)$ als in (46).

Merk op dat voor elke positieve reële waarde van ν geldt

$$\frac{\partial}{\partial r}((r+\nu)y)(x, r) = y(x, r) \, + \, (r+\nu)\left(\frac{\partial}{\partial r} y\right)(x, r) \, .$$

Omdat voor niet gehele positieve waarden van ν de funkties $y(x, r)$ en $\left(\frac{\partial}{\partial r} y\right)(x, r)$ ook gedefinieerd zijn in $r = -\nu$ mogen we in dat geval hier dan gewoon $r = -\nu$ invullen. We zien dan

$$\frac{\partial}{\partial r}((r+\nu)y)(x, -\nu) = y(x, -\nu) \, .$$

Opgave: Laat zien dat de machtreeksen die voorkomen in de Bessel functies $J_0(x),\ Y_0(x),\ J_1(x)$ en $Y_1(x)$ allemaal convergentiestraal ∞ hebben.

Wat betekent dat voor het definitiegebied van deze functies?

9 Complex differentieerbare funkties

9.1 Definities en voorbeelden

Dit hoofdstuk behandelt enkele fundamentele begrippen betreffende complexwaardige funkties die zijn gedefinieerd op een open deelverzameling van $\mathbb{C}$, met name continuïteit en differentieerbaarheid.

9.1.1 Open deelverzamelingen.

Een deelverzameling U van $\mathbb{C}$ is, per definitie, *open* als voor iedere $z \in U$ een reëel getal $\epsilon > 0$ bestaat zo dat het cirkelschijfje

$$D(z,\epsilon) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| < \epsilon\} \tag{53}$$

geheel in U ligt. Merk op dat we hier de oude definitie voor $\mathbb{R}^2$ herschreven hebben in de complexe notatie. De norm $\|.\|$ op $\mathbb{R}^2$ komt overeen met de modulus (= absolute waarde) op $\mathbb{C}$: immers er geldt

$$|x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|.$$

9.1.2 Limiet van een funktie.

Laat U een open deelverzameling van $\mathbb{C}$ zijn, en f een funktie $U \to \mathbb{C}$. Voor $\alpha \in U, L \in \mathbb{C}$, bedoelt men met

$$\lim_{z\to\alpha} f(z) = L$$

dat er voor ieder reëel getal $\epsilon > 0$ een reëel getal $\delta > 0$ bestaat zo dat

$$z \in U, \quad 0 < |z - \alpha| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - L| < \epsilon.$$

De rekenregels voor limieten met betrekking tot de operaties optellen, vermenigvuldigen en delen zijn gelijk aan die voor funkties $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Omdat de bewijzen ook hetzelfde zijn, laten we die achterwege. Hier zijn de rekenregels:

Lemma 9.1 *Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{C}$ en $\alpha \in U$. Laat twee funkties $f, g : U \to \mathbb{C}$ gegeven zijn waarvoor $\lim_{z\to\alpha} f(z)$ en $\lim_{z\to\alpha} g(z)$ bestaan. Dan bestaan ook de limieten van $|f|$, $f + g$ en fg voor $z \to \alpha$ en er geldt:*

1. $\lim_{z\to\alpha}|f(z)| = |\lim_{z\to\alpha} f(z)|$,

2. $\lim_{z\to\alpha}(f(z)+g(z)) = \lim_{z\to\alpha} f(z) + \lim_{z\to\alpha} g(z)$,

3. $\lim_{z\to\alpha} f(z)g(z) = \lim_{z\to\alpha} f(z) \lim_{z\to\alpha} g(z)$.

Als bovendien gegeven is dat $\lim_{z\to\alpha} g(z) \neq 0$ *is, dan bestaat ook de limiet van* $\frac{f}{g}$ *voor* $z \to \alpha$ *en er geldt:*

4. $\lim_{z\to\alpha} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z\to\alpha} f(z)}{\lim_{z\to\alpha} g(z)}$.

■

9.1.3 Continuïteit.

Laat weer $U \subset \mathbb{C}$ een open deelverzameling zijn, $\alpha \in U$ en f een funktie $U \to \mathbb{C}$. De funktie f heet *continu in het punt* α als

$$\lim_{z\to\alpha} f(z) = f(\alpha).$$

Men zegt dat f een *continue funktie op* U is als f continu is in ieder punt $\alpha \in U$.

Opmerking. Lemma 9.1 heeft het voor de hand liggende gevolg voor de continuïteit van sommen, produkten en quotiënten van continue funkties.

9.1.4 Complexe differentieerbaarheid.

Zij weer U een *open* deelverzameling van $\mathbb{C}$, f een funktie $U \to \mathbb{C}$ en α een punt in U. Men zegt dat de funktie f *differentieerbaar* [2] is in het punt α als de limiet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h} \tag{54}$$

bestaat (NB: hierin is h een complexe variabele). De limiet heet dan de *afgeleide* van f in α. Notaties:

$$f'(\alpha) := \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(\alpha) := \lim_{h\to 0} \frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h}.$$

[2] Wanneer men extra wil benadrukken dat het om funkties van een complexe variabele gaat, zegt men wel *complex differentieerbaar* en spreekt men van de *complexe afgeleide*

Men zegt dat f een *differentieerbare funktie op* U is als f differentieerbaar is in ieder punt $\alpha \in U$.

Kortom, de definitie van complexe differentieerbaarheid kan worden verkregen uit de bekende definitie van differentieerbaarheid van funkties $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door overal $\mathbb{R}$ te vervangen door $\mathbb{C}$. Door vroegere bewijzen op soortgelijke wijze aan te passen verkrijgen we de volgende rekenregels voor complexe afgeleiden. We laten de bewijzen achterwege.

Stelling 9.2 *Veronderstel dat de funkties $f, g : U \to \mathbb{C}$ complex differentieerbaar zijn in $\alpha \in U$, en zij $c \in \mathbb{C}$. Dan zijn ook de funkties $f+g$, cf en fg complex differentieerbaar in α en er geldt:*

1. $(f+g)'(\alpha) = f'(\alpha) + g'(\alpha)$,
2. $(cf)'(\alpha) = cf'(\alpha)$,
3. $(fg)'(\alpha) = f'(\alpha)g(\alpha) + f(\alpha)g'(\alpha)$.

Als $g(\alpha) \neq 0$ is, dan is $\frac{f}{g}$ complex differentieerbaar in α en er geldt

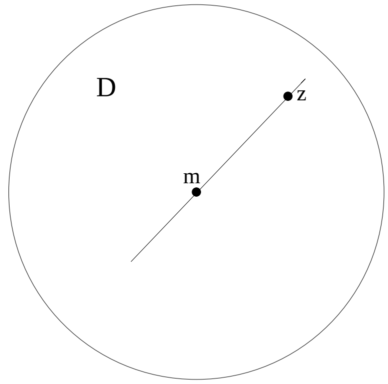
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(\alpha) = \dfrac{f'(\alpha)g(\alpha) - f(\alpha)g'(\alpha)}{g(\alpha)^2}$.

■

Het is duidelijk dat een constante funktie complex differentieerbaar is met als afgeleide de funktie die identiek gelijk aan nul is. Omgekeerd geldt:

Stelling 9.3 *Zij D een open cirkelschijf in $\mathbb{C}$ en $f : D \to \mathbb{C}$ een complex differentieerbare funktie met $f'(z) = 0$ voor alle $z \in D$. Dan is er een constante $C \in \mathbb{C}$ zo dat $f(z) = C$ voor alle $z \in D$.*

Bewijs: We herleiden het resultaat als volgt tot de overeenkomstige stelling voor funkties van een reële variabele. Zij m het middelpunt van D en z een willekeurig punt in D, $z \neq m$. Dan zijn er $a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0$, $b > 1$, zodat alle punten $m + t(z-m)$ met $t \in]a, b[$ ook in D liggen.



Beschouw nu de funktie $g(t) = f(m + t(z - m))$ voor $t \in]a, b[$. Dan is voor elke $t \in]a, b[$:

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \to 0} \frac{g(t+\epsilon) - g(t)}{\epsilon} &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(m + t(z-m) + \epsilon(z-m)) - f(m + t(z-m))}{\epsilon} \\
&= \lim_{w \to 0} \frac{f(m + t(z-m) + w) - f(m + t(z-m))}{w}(z - m) \\
&= (z - m) f'(m + t(z - m)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Derhalve is $g(t)$ op het interval $]a, b[$ differentieerbaar naar de reële parameter t met afgeleide identiek gelijk aan nul. De funktie g is dus constant op dat interval. We concluderen dat $f(z) = g(1) = g(0) = f(m)$. Voor willekeurige $z \in D$ hebben we dus bewezen: $f(z) = f(m)$. ■

Naast de in Stelling 9.2 genoemde rekenregels geldt er ook een kettingregel voor de samenstelling van complex differentieerbare funkties. Het bewijs is in essentie hetzelfde als dat voor differentieerbare funkties $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. We laten het daarom achterwege.

Stelling 9.4 (De kettingregel). *Laten U en W open deelverzamelingen van $\mathbb{C}$ zijn, $f : U \to W$ en $g : W \to \mathbb{C}$ funkties, en veronderstel dat α in U ligt en dat f complex differentieerbaar is in α terwijl g complex differentieerbaar is in $f(\alpha)$. Dan is $g \circ f$ complex differentieerbaar in α en er geldt:*

$$(g \circ f)'(\alpha) = g'(f(\alpha))f'(\alpha).$$

■

Voorbeelden.

1. Uit de rekenregels van Stelling 9.2 volgt direkt dat een veeltermfunktie $p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$ complex differentieerbaar op $\mathbb{C}$ is, met afgeleide $p'(z) = a_1 + 2a_2 z + ... + n a_n z^{n-1}$.

2. Neem de funktie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeven door

$$f(z) = \overline{z} \qquad \text{voor} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Deze funktie is continu, omdat voor alle $z, \alpha \in \mathbb{C}$ geldt:

$$|\overline{z} - \overline{\alpha}| = |z - \alpha|.$$

Echter deze funktie f is *voor geen enkele* $\alpha \in \mathbb{C}$ *complex differentieerbaar in* α, immers

$$\frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h} = \frac{\overline{\alpha + h} - \overline{\alpha}}{h} = \frac{\overline{h}}{h}$$

Nemen we hierin $h = re^{i\varphi}$ dan is het rechterlid gelijk aan $e^{-2i\varphi}$. In het bijzonder is, wanneer h langs de positieve reële as naar 0 gaat, $\varphi = 0$ en

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{f(\alpha + r) - f(\alpha)}{r} = 1,$$

terwijl, wanneer h langs de positieve imaginaire as naar 0 gaat, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ is en

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{f(\alpha + ir) - f(\alpha)}{ir} = -1.$$

Omdat deze uitkomsten verschillend zijn kan $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}$ niet bestaan.

9.1.5 De Cauchy-Riemann vergelijkingen.

Door aan een complex getal $z = x + iy$ het reële getallenpaar (x, y) toe te voegen kunnen we $\mathbb{C}$ identificeren met $\mathbb{R}^2$. Daarbij wordt een open deelverzameling U van $\mathbb{C}$ geïdentificeerd met een open deelverzameling W van $\mathbb{R}^2$ en wordt een funktie $f : U \to \mathbb{C}$ geïdentificeerd met een afbeelding $F : W \to \mathbb{R}^2$; om precies te zijn:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= (F_1(x, y)\,,\ F_2(x, y))\,, & f(x + iy) &= F_1(x, y) + iF_2(x, y) \\ F_1(x, y) &= \operatorname{Re} f(x + iy)\,, & F_2(x, y) &= \operatorname{Im} f(x + iy). \end{aligned}$$

Veronderstel nu dat de funktie f complex differentieerbaar is in het punt $\alpha = a+bi \in U$. Door in (54) de limiet te nemen met de beperking dat h slechts reële waarden doorloopt zien we dat F in (a, b) partieel differentieerbaar naar x is, terwijl bovendien

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(a, b) + i\frac{\partial F_2}{\partial x}(a, b) = f'(\alpha).$$

Door de limiet alleen over zuiver imaginaire waarden van h te nemen, zien we dat F in (a, b) ook partieel differentieerbaar is naar y, terwijl

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y}(a, b) + i\frac{\partial F_2}{\partial y}(a, b) &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(\alpha + i\epsilon) - f(\alpha)}{\epsilon} \\ &= i \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(\alpha + i\epsilon) - f(\alpha)}{i\epsilon} \\ &= if'(\alpha) \end{aligned}$$

In het bijzonder zien we dat

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(a, b) + i\frac{\partial F_2}{\partial y}(a, b) = i\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}(a, b) + i\frac{\partial F_2}{\partial x}(a, b)\right).$$

Conclusie:
Als de funktie $f : U \to \mathbb{C}$ complex differentieerbaar is in het punt $\alpha = a+bi$, dan is de bijbehorende afbeelding $F : W \to \mathbb{R}^2$ differentieerbaar in het punt (a, b) en geldt

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial F_2}{\partial y}(a, b) \qquad \text{en} \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y}(a, b) = -\frac{\partial F_2}{\partial x}(a, b). \tag{55}$$

De vergelijkingen (55) staan bekend als de *Cauchy-Riemann* vergelijkingen.

Voor de totale afgeleide DF van F vinden we zo

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

Men kan bewijzen dat omgekeerd geldt:

Feit: Als afbeelding $F : W \to \mathbb{R}^2$ differentieerbaar in het punt (a, b) en voldoet aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen (55) dan is de bijbehorende funktie $f : U \to \mathbb{C}$ complex differentieerbaar.

Voorbeeld. Bekijken we nog eens de funktie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeven door

$$f(z) = \overline{z} \qquad \text{voor} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Deze funktie correspondeert met de afbeelding

$$F(x, y) = (x, -y) \ : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2.$$

Nu is voor alle $(a, b) \in \mathbb{R}^2$: $\quad \frac{\partial F_1}{\partial y}(a, b) = -\frac{\partial F_2}{\partial x}(a, b) = 0 \quad$ maar

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(a, b) = 1 \qquad \text{terwijl} \qquad \frac{\partial F_2}{\partial y}(a, b) = -1$$

Omdat in dit voorbeeld niet is voldaan aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen, is de funktie f niet complex differentieerbaar.

10 Lijnintegratie in het complexe vlak en de stelling van Cauchy

10.1 Lijnintegratie

We zullen eerst definiëren wat we verstaan onder de integraal

$$\int_k f(z)\, dz \tag{56}$$

van een continue funktie f over een in $\mathbb{C}$ gelegen georiënteerde stuksgewijze C^1 kromme k.

Zij U een open deelverzameling van het complexe vlak $\mathbb{C}$. Onder een C^1 *pad* of *weg* (in het Engels *path* of *curve*) in U verstaan we een C^1 afbeelding $\sigma : [a, b] \to U$ (voor zekere $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$); d.w.z. een complex-waardige funktie σ

- zo dat $\sigma(t) \in U$ voor elke $t \in [a, b]$,
- die continu is op het gesloten interval $[a, b]$,
- die differentieerbaar is op het open interval $]a, b[$,
- waarvan de afgeleide σ' continu is op $]a, b[$ en
- waarvoor de limieten $\lim_{t\downarrow a} \sigma'(t)$ en $\lim_{t\uparrow b} \sigma'(t)$ bestaan.

Definitie 10.1 Zij $U \subset \mathbb{C}$ een open deelverzameling en σ een C^1 pad in U. Voor een continue funktie $f : U \to \mathbb{C}$ definiëren we de integraal van f over σ door

$$\int_\sigma f(z)dz = \int_a^b f(\sigma(t))\sigma'(t)dt. \tag{57}$$

Voorbeelden.

1. Beschouw, voor reële $r > 0$, het C^1 pad $\gamma(t) = re^{it}$, $0 \le t \le \pi$. Dit is de bovenste helft van een cirkel met straal r en middelpunt 0. Dan is

voor $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma z^n \, dz &= \int_0^\pi (re^{it})^n ire^{it} \, dt \;=\; ir^{n+1} \int_0^\pi e^{(n+1)it} \, dt \\
&= \frac{r^{n+1}}{n+1} \left[(-1)^{n+1} - 1 \right] \\
&= 0 \text{ als } n \text{ oneven}, \quad -2\frac{r^{n+1}}{n+1} \text{ als } n \text{ even.}
\end{aligned}$$

2. Beschouw het C^1 pad $\sigma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, dat de eenheidscirkel in positieve zin doorloopt. Dit pad ligt in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Voor elke $n \in \mathbb{Z}$ is de funktie z^n gedefinieerd op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dan is voor $n \neq -1$:

$$\int_\sigma z^n \, dz = \int_0^{2\pi} ie^{(n+1)it} \, dt = \frac{1}{n+1} \left[e^{(n+1)it} \right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0.$$

   Voor $n = -1$ daarentegen vinden we

$$\int_\sigma \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \, ie^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i. \tag{58}$$

Zij $\sigma : [a, b] \to \mathbb{C}$ een C^1 pad met $\sigma'(t) \neq 0$ voor alle $a < t < b$. Men zegt dan dat σ een *parametrisering* is van de *kromme*

$$k = \sigma([a, b]) = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{er is een } t \in [a, b] \text{ zodat } z = \sigma(t)\}.$$

Men noemt $\sigma(a)$ het beginpunt en $\sigma(b)$ het eindpunt van de kromme k. De parametrisering legt ook de doorlooprichting of *oriëntatie* van de kromme vast.

Wanneer $h : [p, q] \to [a, b]$ een afbeelding is zo dat

- h is continu op $[a, b]$
- h is differentieerbaar op $]p, q[$ en de afgeleide h' is continu op $]p, q[$
- $h(p) = a$ en $h(q) = b$
- $\lim_{t \downarrow p} h'(t)$ en $\lim_{t \uparrow q} h'(t)$ bestaan

- $h'(t) \neq 0$ voor alle $t \in]p, q[$

dan noemt men de samengestelde afbeelding $\sigma \circ h : [p, q] \to U$ een *reparametrisering* van de kromme k. Begin- en eindpunt en oriëntatie veranderen niet door zo'n reparametrisering.

Vanwege de kettingregel voor differentiëren en de substitutieregel voor integreren geldt dan voor elke open verzameling $U \subset \mathbb{C}$ die de kromme k bevat, en voor elke continue funktie $f : U \to \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma \circ h} f(z) dz &= \int_p^q f(\sigma(h(s)))(\sigma \circ h)'(s) ds \\ &= \int_p^q f(\sigma(h(s)))\sigma'(h(s))h'(s) ds \\ &= \int_a^b f(\sigma(t))\sigma'(t) dt \\ &= \int_\sigma f(z) dz. \end{aligned}$$

De waarde van de integraal verandert dus niet door reparametrisering.

Het ligt daarom voor de hand om de integraal van de funtkie f over de georiënteeerde kromme k te definiëren als

$$\int_k f(z) dz = \int_\sigma f(z) dz, \tag{59}$$

met σ een parametrisering van k. Hierbij is een waarschuwing op z'n plaats:

Waarschuwing: De notatie $\int_k f(z)dz$ suggereert ten onrechte dat de waarde van die integraal alleen afhangt van het meetkundige plaatje van de verzameling $k = \sigma([a, b])$. Dat er iets meer in het spel is dan alleen het plaatje van k kan men zien aan het volgende voorbeeld:

Neem de C^1 paden σ_1 en $\sigma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gegeven door $\sigma_1(t) = e^{it}$ en $\sigma_2(t) = e^{2it}$. Beide hebben als beeld de eenheidscirkel met positieve oriëntatie. Bij σ_1 echter wordt de eenheidscirkel eenmaal doorlopen; bij σ_2 tweemaal. Dit verschil komt ook tot uitdrukking bij berekening van de integralen

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_1} \frac{1}{z} dz &= \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i \\ \int_{\sigma_2} \frac{1}{z} dz &= \int_0^{2\pi} e^{-2it} 2i e^{2it} dt = 2i \int_0^{2\pi} dt = 4\pi i \end{aligned}$$

Voor het praktische werk moeten we het voorgaande uitbreiden tot *georiënteerde stuksgewijze C^1 krommen.* Daartoe eerst een herhaling en uitbreiding tot complex-waardige funkties van de definitie van “stuksgewijs continu differentieerbaar” uit INF 2:

Definitie 10.2 *Men zegt dat een funktie $\sigma : [a,b] \to \mathbb{C}$, die is gedefinieerd op een gesloten interval $[a,b]$,* stuksgewijs continu differentieerbaar *(Engels:* piecewise continuously differentiable*) is, als er in het interval eindig veel punten $t_1, \ldots, t_n$ zijn zo dat*

$$a < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n < b$$

en zo dat is voldaan aan de volgende voorwaarden

- *op de open intervallen $]a, t_1[\,,\quad]t_n, b[$ en $]t_{i-1}, t_i[$ voor $i = 2, \ldots, n$ is σ een differentieerbare funktie en is de afgeleide funktie σ' continu*
- *de limieten* $\lim\limits_{t\downarrow a} \sigma(t)\ ,\quad \lim\limits_{t\downarrow a} \sigma'(t)\ ,\quad \lim\limits_{t\uparrow b} \sigma(t)\ ,\quad \lim\limits_{t\uparrow b} \sigma'(t)$ *en*

  $$\lim_{t\downarrow t_i} \sigma(t)\ ,\quad \lim_{t\downarrow t_i} \sigma'(t)\ ,\quad \lim_{t\uparrow t_i} \sigma(t)\ ,\quad \lim_{t\uparrow t_i} \sigma'(t) \quad \textit{voor} \quad i = 1, \ldots, n$$

  bestaan (als complexe getallen).

De punten $t_1, \ldots, t_n$ zullen we de uitzonderingspunten *noemen.*

Wanneer de funktie $\sigma : [a,b] \to \mathbb{C}$, continu en stuksgewijs continu differentieerbaar *is, geldt naast het bovenstaande nog:*

- $\lim\limits_{t\downarrow a} \sigma(t) = \sigma(a)\ ,\quad \lim\limits_{t\uparrow b} \sigma(t) = \sigma(b)$ *en*
  $\lim\limits_{t\uparrow t_i} \sigma(t) = \lim\limits_{t\downarrow t_i} \sigma(t)$ *voor $i = 1, \ldots, n$.*

Definitie 10.3 Zij U een open deelverzameling van het complexe vlak $\mathbb{C}$. Met een *pad* of *weg* in U bedoelen wij in dit diktaat steeds een continue stuksgewijs continu differentieerbare funktie $\sigma : [a,b] \to \mathbb{C}$ (voor een of ander gesloten interval $[a,b]$) zo dat $\sigma(t) \in U$ voor alle $t \in [a,b]$.

Met *kromme in U* bedoelen we dan de beeldverzameling $k = \sigma([a,b])$ van een pad in U en we zegen dat de kromme k wordt geparametriseerd door σ.

Een kromme k is dus een vereniging

$$k = k_0 \cup k_1 \cup ... \cup k_n$$

van eindig veel georiënteerde C^1 krommen waarbij steeds het eindpunt van k_j samenvalt met het beginpunt van k_{j+1}; inderdaad met de voorgaande notaties is

$$k_0 = \sigma([a, t_1])\,, \quad k_n = \sigma([t_n, b]) \quad k_j = \sigma([t_j, t_{j+1}]) \ \text{ voor } \ j = 1, \ldots, n-1.$$

Is f een op U gedefinieerde complexwaardige continue funktie, dan definiëren we de *(lijn)integraal van de funktie f langs de kromme k* door

$$\begin{aligned}
\int_k f(z)dz &= \int_\sigma f(z)dz \qquad (60) \\
&= \int_a^{t_1} f(\sigma(t))\sigma'(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} f(\sigma(t))\sigma'(t)dt + \ldots \\
&\qquad \ldots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(\sigma(t))\sigma'(t)dt + \int_{t_n}^{b} f(\sigma(t))\sigma'(t)dt \\
&= \int_{k_0} f(z)dz + \int_{k_1} f(z)dz + \ldots + \int_{k_{n-1}} f(z)dz + \int_{k_n} f(z)dz.
\end{aligned}$$

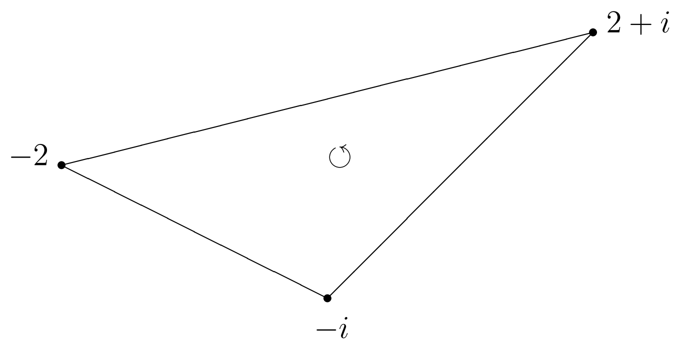
Ook nu moet men wat betreft de notatie $\int_k f(z)dz$ de voorgaande waarschuwing in de gaten houden.

Tot slot nog twee termen:
Als het beginpunt en het eindpunt van een kromme k samenvallen zegt men dat k een *gesloten kromme* is. Als k geen zelfdoorsnijdingen heeft, zegt men dat k een *enkelvoudige kromme* is ('simple curve' in het Engels) .

Voorbeeld. Neem het pad $\sigma : [0,1] \to \mathbb{C}$ gegeven door

$$\sigma(t) = \begin{cases} -2 + 3t(2-i) & \text{als} \quad 0 \le t \le \frac{1}{3} \\ -i + (3t-1)(2+2i) & \text{als} \quad \frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3} \\ 2 + i - (3t-2)(4+i) & \text{als} \quad \frac{2}{3} \le t \le 1 \end{cases}$$

Dit pad parametriseert de positief (= tegen de wijzers van de klok) georiënteerde driehoek met hoekpunten $-2\,,\ -i\,,\ 2+i$.



We geven nog twee nuttige eigenschappen van de lijnintegraal.

Stelling 10.4 *Zij $f : U \to \mathbb{C}$ een continue funktie op een open verzameling $U \subset \mathbb{C}$. Veronderstel dat f op U een primitieve F heeft; d.w.z. dat er een complex differentieerbare funktie $F : U \to \mathbb{C}$ is zo dat $F' = f$. Dan is voor elke kromme k in U*

$$\int_k f(z)dz = F(\beta) - F(\alpha) \tag{61}$$

waarbij α resp. β het begin- resp. eindpunt van k is.

Bewijs: Eerst splitsen we de kromme k in eindig vele stukken k_i die elk een parametrisering $\gamma_i : [a_i, a_{i+1}] \to \mathbb{C}$ toelaten. Voor elke i geldt dan

$$\begin{aligned}\int_{k_i} f(z)dz &= \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\gamma_i(t))\gamma_i'(t)dt = \int_{a_i}^{a_{i+1}} F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_{a_i}^{a_{i+1}} (F \circ \gamma)'(t)dt = F(\gamma_i(a_{i+1})) - F(\gamma_i(a_i))\end{aligned}$$

Formule (61) volgt hieruit, omdat $\int_k f(z)\, dz = \sum_i \int_{k_i} f(z)\, dz$. ■

Stelling 10.5 *Zij $f : U \to \mathbb{C}$ een continue funktie op een open verzameling $U \subset \mathbb{C}$. Zij k een kromme in U. Veronderstel dat er een reëel getal $M > 0$ is zo dat:*

$$|f(z)| \leq M \qquad \text{voor elke} \quad z \in k.$$

Dan geldt:

$$\left| \int_k f(z)\, dz \right| \leq Ml(k)$$

met $l(k) = \text{lengte}(k) := \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ *voor een parametrisering* $\gamma : [a,b] \to U$ *van* k.

Bewijs: Eerst splitsen we de kromme k in eindig vele stukken k_i die elk een parametrisering $\gamma_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{C}$ toelaten. Voor elke i geldt

$$\left| \int_{k_i} f(z)\, dz \right| = \left| \int_{a_i}^{b_i} f(\gamma_i(t))\gamma_i'(t)\, dt \right| \le \int_{a_i}^{b_i} M|\gamma_i'(t)|\, dt = Ml(k_i).$$

Wegens $\int_k f(z)\, dz = \sum_i \int_{k_i} f(z)\, dz$ volgt hieruit

$$\left| \int_k f(z)\, dz \right| \le \sum_i \left| \int_{k_i} f(z)\, dz \right| \le \sum_i Ml(k_i) = Ml(k).$$

■

10.2 De stelling van Cauchy

Zij B een begrensde open deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ met een stuksgewijze C^1 rand ∂B. In een dergelijke situatie zullen we steeds veronderstellen dat ∂B voorzien is van de geïnduceerde oriëntatie: dat is de oriëntatie die wordt gekenmerkt door het feit dat iedere georiënteerde raakvector aan ∂B over een hoek $+\frac{1}{2}\pi$ gedraaid moet worden om tot inwendige normaalvector over te gaan. In deze situatie geldt:

De Stelling van Green (zie Marsden&Tromba *Vector Calculus*)
Schrijf $\overline{B}$ *voor de afsluiting* $B \cup \partial B$ *van* B. *Veronderstel dat* P *en* Q *continu differentieerbare (reëel of complexwaardige) funkties op een open omgeving van* $\overline{B}$ *zijn; d.w.z. op een open deelverzameling van* $\mathbb{R}^2$ *die* $\overline{B}$ *bevat. Dan is*

$$\int_{\partial B} (P dx + Q dy) = \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

■

We gaan dit resultaat vertalen naar complexe funkties, d.w.z. complexwaardige funkties van een complexe variabele. Daartoe identificeren we

$$\mathbb{R}^2 \leftrightarrow \mathbb{C}, \qquad (x,y) \leftrightarrow z = x + iy.$$

Beschouw nu een continu differentieerbare funktie $f : U \to \mathbb{C}$, gedefinieerd op een open omgeving U van $\overline{B}$. De rand ∂B van B is een kromme in U. Dan is, met $P(x,y) = f(x+iy)$ en $Q(x,y) = if(x+iy)$,

$$\begin{aligned}\int_{\partial B} f(z)dz &= \int_{\partial B} (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) \\ &= \iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy\end{aligned}$$

De Cauchy-Riemann vergelijkingen (55) komen neer op

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$

Zo leidt de *combinatie van de Stelling van Green en de Cauchy-Riemann vergelijkingen* tot het onderstaande Stelling van Cauchy. Een bewijs van deze Stelling van Cauchy via de Stelling van Green werkt alleen onder de extra veronderstelling dat de afgeleide f' continu is. Toch is de stelling ook correct zonder die extra veronderstelling, d.w.z. in de formulering hieronder (zie bijvoorbeeld appendix B in het boek *Function theory of one complex variable* van R. Greene en S. Krantz)

Stelling 10.6 (Cauchy). *Zij $B \subset \mathbb{C}$ een begrensde open verzameling met stuksgewijze C^1 rand ∂B. Dan geldt voor iedere complex differentieerbare funktie f gedefinieerd op een open omgeving van $\overline{B}$ dat*

$$\int_{\partial B} f(z)dz = 0.$$

■

Deze stelling dient met de nodige zorgvuldigheid gehanteerd te worden, zoals blijkt uit het volgende voorbeeld. De funktie z^{-1} is complex differentieerbaar op de open verzameling $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Het pad $\sigma(t) = e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$ beschrijft de positief georiënteerde eenheidscirkel in het complexe vlak. Dit is de rand ∂B van de (open) cirkelschijf $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. We hebben al eerder berekend dat

$$\int_\sigma z^{-1} dz = 2\pi i.$$

Dit resultaat is niet in strijd met de Stelling van Cauchy, omdat de afsluiting $\overline{B} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1\}$ van B niet geheel in U ligt.

Het bewijs van de volgende stelling laat zien hoe men in soortgelijke situaties de Stelling van Cauchy wel met succes kan toepassen.

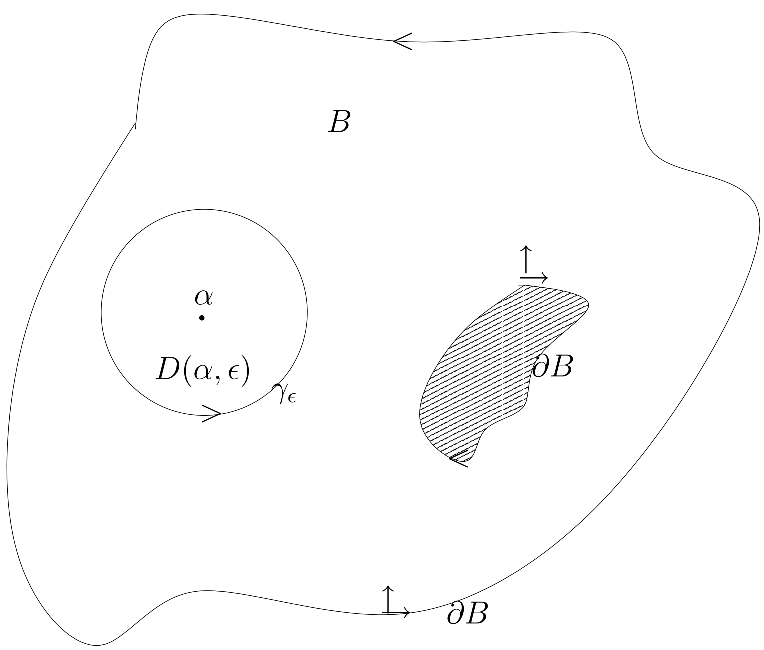
Stelling 10.7 (De integraalformule van Cauchy). *Zij $B \subset \mathbb{C}$ een begrensde open verzameling met stuksgewijze C^1 rand ∂B en zij $\alpha \in B$. Dan geldt voor iedere complex differentieerbare funktie f gedefinieerd op een open omgeving U van $\overline{B}$ dat*

$$\int_{\partial B} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = 2\pi i f(\alpha). \tag{62}$$

Bewijs: Kies een $\epsilon > 0$ zo dat de afsluiting $\overline{D(\alpha,\epsilon)}$ van de open schijf

$$D(\alpha,\epsilon) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-\alpha| < \epsilon\}$$

geheel binnen B ligt (dit is mogelijk, omdat B open is). We schrijven γ_ϵ voor de (georiënteerde) rand van $D(\alpha,\epsilon)$ en we noemen $A = B \setminus \overline{D(\alpha,\epsilon)}$.



De funktie $\dfrac{f(z)}{z-\alpha}$ is gedefinieerd op de open omgeving $U \setminus \overline{D(\alpha,\epsilon/2)}$ van $\overline{A}$

en is daar complex differentieerbaar. Dus is volgens Stelling 10.6

$$\int_{\partial A} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = 0.$$

De georiënteerde kromme ∂A is de vereniging van de georiënteerde krommen ∂B en $-\gamma_\epsilon$ (de kromme die uit γ_ϵ verkregen wordt door de oriëntatie om te draaien). Dus is

$$\int_{\partial A} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = \int_{\partial B} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz - \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz\,.$$

We zien

$$\int_{\partial B} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz\,.$$

De kromme γ_ϵ wordt geparametriseerd door $\gamma_\epsilon(t) = \alpha + \epsilon e^{it}$, $(0 \le t \le 2\pi)$. Met deze parametrisering rekent men gemakkelijk na dat

$$\int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(\alpha)}{z-\alpha} dz = f(\alpha) \int_{\gamma_\epsilon} \frac{1}{z-\alpha} dz = f(\alpha) \int_0^{2\pi} \frac{1}{\epsilon e^{it}} i\epsilon e^{it} dt = 2\pi i f(\alpha).$$

Uit de laatste twee vergelijkingen zien we:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\partial B} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz - 2\pi i f(\alpha) \right| &= \left| \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha} dz \right| \\
&= \left| \int_0^{2\pi} \big(f(\alpha+\epsilon e^{it}) - f(\alpha) \big)\, i dt \right| \\
&\le \int_0^{2\pi} \left| f(\alpha+\epsilon e^{it}) - f(\alpha) \right| dt \\
&\le 2\pi \max_{0\le t\le 2\pi} \left| f(\alpha+\epsilon e^{it}) - f(\alpha) \right|.
\end{aligned}$$

Deze afschatting blijft behouden als we ϵ naar nul laten naderen. Het rechterlid, en daarmee ook het linkerlid, gaat in dat geval naar 0. Hiermee is de gelijkheid (62) bewezen. ■

11 Machtreeksontwikkelingen van complex differentieerbare funkties

Laat U een open deelverzameling van $\mathbb{C}$ zijn. Een funktie $f : U \to \mathbb{C}$ heet *analytisch* (of *holomorf*) indien voor elk punt $\alpha \in U$ een in U gelegen open cirkelschijf D met middelpunt α bestaat zo dat f op D gegeven wordt door een machtreeks:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - \alpha)^n$$

met $a_n \in \mathbb{C}$.

In Stelling 1.7 hebben we bewezen dat iedere analytische funktie complex differentieerbaar is. Met behulp van de integraalformule van Cauchy zullen we nu bewijzen dat het omgekeerde ook waar is.

Stelling 11.1 *Laat f een complex differentieerbare funktie zijn, gedefinieerd op een open verzameling $U \subset \mathbb{C}$. Zij $\alpha \in U$ en zij D een open cirkelschijf met middelpunt α waarvan de afsluiting $\overline{D}$ nog in U ligt. Dan geldt voor elke $z \in D$:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n \tag{63}$$

met coëfficiënten gegeven door:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{(w - \alpha)^{n+1}} dw. \tag{64}$$

Bewijs: Fixeer $z \in D$. Dan geldt op grond van de integraalformule van Cauchy dat:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{w - z} dw. \tag{65}$$

We gaan de integrand van (65) in een reeks ontwikkelen. Om te beginnen hebben we voor $w \in \partial D$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{w - z} &= \frac{\frac{1}{w-\alpha}}{1 - \frac{z-\alpha}{w-\alpha}} \\ &= \frac{1}{w - \alpha} + \frac{z - \alpha}{(w - \alpha)^2} + \frac{(z - \alpha)^2}{(w - \alpha)^3} + \ldots + \frac{(z - \alpha)^N}{(w - \alpha)^{N+1}} + R_N(w) \end{aligned}$$

met

$$R_N(w) = \left(\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)^{N+1} \frac{1}{w-z}.$$

Wanneer we dit substitueren in (65) vinden we

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n(z-\alpha)^n + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} f(w)R_N(w)dw$$

met a_n als in (64). Schrijf ρ voor de straal van de cirkel ∂D. Dan is

$$\begin{aligned}
\left|f(z) - \sum_{n=0}^{N} a_n(z-\alpha)^n\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} f(w)R_N(w)dw\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} |f(w)R_N(w)|\, dw \\
&\leq \rho\left(\frac{|z-\alpha|}{\rho}\right)^{N+1} \max_{w\in\partial D}\left|\frac{f(w)}{w-z}\right|;
\end{aligned}$$

voor de laatste ongelijkheid is o.a. gebruikt dat $|w-\alpha| = \rho$ en $|w-z| \neq 0$ voor alle $w \in \partial D$. Omdat $|z-\alpha| < \rho$ is, is

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{|z-\alpha|}{\rho}\right)^{N+1} = 0.$$

We concluderen

$$\lim_{N\to\infty}\left|f(z) - \sum_{n=0}^{N} a_n(z-\alpha)^n\right| = 0\,.$$

Hiermee is Formule (63) bewezen. ■

Gevolg 11.2 *Zij f een complexwaardige funktie gedefinieerd op een open deel U van $\mathbb{C}$. Dan zijn de onderstaande uitspraken equivalent.*

a. *f is complex differentieerbaar op U.*

b. *f is analytisch op U.*

Bewijs: De implicatie $(b) \Rightarrow (a)$ is een direkt gevolg van Stelling 1.7. Om in te zien dat de omgekeerde implicatie $(a) \Rightarrow (b)$ ook geldt beschouwen we een punt $\alpha \in U$. Omdat U open is, is er een $\rho > 0$ zo dat de afsluiting van de schijf $D(\alpha, \rho)$ bevat is in U. De funktie f heeft wegens de bovenstaande stelling dus een machtreeksontwikkeling op die schijf. ■

Opmerkingen. In het bijzonder zien we dat een complex differentieerbare funktie $f : U \to \mathbb{C}$ willekeurig vaak complex differentieerbaar is op U (gebruik Gevolg 1.8). In Gevolg 1.8 zagen we dat de coëfficiënten a_n van de reeks (63) uniek bepaald zijn door de formule (5). Combineren we dit met het bovenstaande dan blijkt dat

$$a_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz \tag{66}$$

voor *iedere* cirkelschijf D met middelpunt α waarvan de afsluiting in U ligt. In het bijzonder is dus de integraal in (66) onafhankelijk van de keuze van D, zolang maar geldt $\overline{D} \subset U$. We zien dus:

De convergentiestraal van de machtreeks (63) is groter dan of gelijk aan de afstand van α tot de rand ∂U van U.

Voorbeeld. De funktie $g(z) = \frac{1}{1+z^2}$ is gedefinieerd en complex differentieerbaar op de open verzameling $U = \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ (gebruik Stelling 9.2 om dit in te zien). De rand van U bestaat slechts uit de twee punten $\pm i$. Zonder enige berekening uit te voeren concluderen we nu dat g op de schijf $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ gegeven wordt door de convergente machtreeks

$$\sum (n!)^{-1} g^{(n)}(0) z^n. \tag{67}$$

In het bijzonder heeft deze machtreeks convergentiestraal minstens 1. We zouden de machtreeks kunnen bepalen door $g^{(n)}(0)$ te berekenen voor elke $n \in \mathbb{N}$. Het is in dit geval echter gemakkelijker om $z^2 = -w$ te substitueren en de bekende reeksontwikkeling voor $(1-w)^{-1}$ te gebruiken. Dit levert:

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad (|z| < 1). \tag{68}$$

De ongelijkheden van Cauchy. We sluiten deze paragraaf af met enkele interessante gevolgen van Stelling 11.1. Laat f analytisch zijn in het gehele complexe vlak. Een dergelijke analytische funktie heet ook wel *geheel.* Volgens formule (66) hebben we

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{k_R} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz,$$

waarin k_R de positief georiënteerde cirkel met middelpunt 0 en straal R is. De formule is geldig voor iedere waarde $R > 0$. Is M_R het maximum van $|f(z)|$ op k_R, dan is (vgl. Stelling 10.5)

$$\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi R \frac{M_R}{R^{n+1}} = \frac{M_R}{R^n}. \tag{69}$$

Deze schattingen voor de coëfficiënten van de machtreeks van f rond 0 staan bekend als de *ongelijkheden van Cauchy.* Een direkt gevolg is:

Stelling 11.3 (Stelling van Liouville.)
Een begrensde gehele analytische funktie is constant.

Bewijs: Zij f een gehele analytische funktie die begrensd is, d.w.z. er is een constante $M > 0$ zo dat $|f(z)| \leq M$ voor alle $z \in \mathbb{C}$. Uit de Cauchy ongelijkheden volgt nu dat $|(n!)^{-1} f^{(n)}(0)| \leq MR^{-n}$ voor elke n en elke $R > 0$. Door de limiet te nemen voor $R \to \infty$ concluderen we dat $f^{(n)}(0) = 0$ voor alle $n \geq 1$. Hieruit volgt dat $f(z) = f(0)$ voor alle $z \in \mathbb{C}$. ■

Een fraai gevolg van de stelling van Liouville is het volgende resultaat, dat bekend staat als *de Hoofdstelling van de Algebra.*

Gevolg 11.4 *Ieder niet constant polynoom heeft tenminste één nulpunt in het complexe vlak.*

Bewijs: Beschouw een polynoom $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_p z^p$. Veronderstel dat $f(z) \neq 0$ voor alle $z \in \mathbb{C}$. We zullen aantonen dat deze veronderstelling tot een tegenspraak leidt. Uit de veronderstelling volgt dat de funktie $g(z) = f(z)^{-1}$ gedefinieerd en complex differentieerbaar is op hele complexe vlak $\mathbb{C}$. Door te schrijven

$$g(z) = \frac{1}{z^p\left[a_p + a_{p-1}z^{-1} + \ldots + a_0 z^{-p}\right]}$$

zien we dat $g(z) \to 0$ als $|z| \to \infty$. Er bestaat derhalve een $R > 0$ zo dat $|g(z)| \leq 1$ voor alle z met $|z| > R$. Anderzijds is g continu en derhalve begrensd op de gesloten en begrensde verzameling $\{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq R\}$. We concluderen dat g een begrensde gehele analytische funktie is. Wegens bovenstaande stelling van Liouville is g, en daarmee ook f, constant. Tegenspraak, want gegeven was dat f niet constant is. ■

Als een complex analytische funktie f het punt $\alpha \in \mathbb{C}$ als nulpunt heeft, dan is de machtreeksontwikkeling van f rond α van de vorm

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} b_k (z - \alpha)^k, \tag{70}$$

met $m \geq 1$, en $b_m \neq 0$. Het getal m heet de multipliciteit van het nulpunt α. Schrijven we

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+m} (z - \alpha)^k$$

dan is g analytisch rond α, terwijl $g(\alpha) \neq 0$, en

$$f(z) = g(z)(z - \alpha)^m. \tag{71}$$

Omgekeerd geldt: als we f kunnen schrijven als (71) met g analytisch rond 0 en $g(\alpha) \neq 0$, dan is α een nulpunt van f met multipliciteit m.

We beschouwen nu weer een polynoom f van de graad $n \geq 1$. Dit polynoom is niet constant, heeft dus een nulpunt α. Zij m de multipliciteit van dit nulpunt. Dan breekt de machtreeks van f rond α af na de $n-$de macht (immers de hogere afgeleiden van f verdwijnen, gebruik nu (66)); derhalve is de funktie g in de ontbinding (71) een polynoom van de graad $n - m$. Door nu dezelfde redenering toe te passen op g enzovoorts, zien we in:

Ieder polynoom f van de graad $n \geq 1$ is te schrijven als produkt van lineaire factoren

$$f(z) = A \prod_{j=1}^{k} (z - \alpha_j)^{m_j}$$

met $A \in \mathbb{C}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ verschillende complexe getallen, $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ en $m_1 + \ldots + m_k = n$.

De α_j $(j = 1, \ldots, k)$ zijn uiteraard de wortels van het polynoom, de constanten m_j zijn hun respectievelijke multipliciteiten.

12 Laurentreeksen

Onder een *Laurentreeks* verstaan we een reeks van de vorm

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n \tag{72}$$

met $\alpha \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ vast gegeven en met z een complexe variabele.

Per definitie *convergeert* de reeks (72) precies dan als beide reeksen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n \ , \qquad \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} (z-\alpha)^{-m} \tag{73}$$

convergeren. De vraag is nu *voor welke* $z \in \mathbb{C}$ *de Laurentreeks convergeert.* Daarvoor kijken we naar de convergentie van de machtreeksen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n \ , \qquad \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} v^m \tag{74}$$

met u en v complexe variabelen. Door substitutie $u = z - \alpha$, respectievelijk $v = (z-\alpha)^{-1}$, gaan deze machtreeksen immers over in de reeksen in (73).

Zij R_2 de convergentiestraal van de eerste en R_1 de convergentiestraal van de tweede machtreeks in (74). Dan leiden we uit het bovenstaande direkt af:

a. *de reeks* (72) *convergeert voor* $z \in \mathbb{C}$ *met* $R_1^{-1} < |z-\alpha|$ *en* $|z-\alpha| < R_2$.

b. *de reeks* (72) *divergeert voor* $z \in \mathbb{C}$ *met* $|z-\alpha| < R_1^{-1}$ *of* $|z-\alpha| > R_2$.

In het bovenstaande laten we toe dat R_1 en/of R_2 ∞ is; daarbij interpreteren we ∞^{-1} dan als 0. Ook $R_1 = 0$ mag; dan is $0^{-1} = \infty$.

Als $R_1^{-1} > R_2$ dan volgt uit het bovenstaande dat de reeks (72) nergens convergeert. Is $R_1^{-1} = R_2$ dan zijn er mogelijkerwijs punten waar de reeks convergeert. Die moeten dan alle op de cirkel $|z-\alpha| = R_2$ liggen.

In het vervolg veronderstellen we dat $R_1^{-1} < R_2$. We schrijven $r_1 = R_1^{-1}$ en $r_2 = R_2$. Uit de bovenstaande conditie (a) volgt dan:

De Laurentreeks $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$ *convergeert op het (open) ringgebied*

$$G = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z-\alpha| < r_2\}. \tag{75}$$

De Engelse term voor ringgebied is *annulus*. Men noemt r_1 de *binnenstraal* en r_2 de *buitenstraal* van het ringgebied. Merk op dat $r_1^{-1} = R_1$ en $r_2 = R_2$ de convergentiestralen zijn van de gewone machtreeksen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$ en $\sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} v^m$. Die zijn veelal te berekenen met Stelling 1.4.

Stelling 12.1 *Veronderstel dat de Laurentreeks* (72) *convergeert op het ringgebied*

$$G = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - \alpha| < r_2\}.$$

Dan is de funktie

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n \tag{76}$$

complex differentieerbaar op G.

Bovendien geldt voor iedere positief georiënteerde in G gelegen cirkel k met middelpunt α dat

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_k \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}}\, dw \tag{77}$$

voor elke $n \in \mathbb{Z}$.

Bewijs: We beschouwen weer de machtreeksen (74). De eerste machtreeks convergeert voor u met $r_1 < |u| < r_2$ en heeft dus een convergentiestraal minstens r_2. De tweede machtreeks in (74) convergeert als ${r_2}^{-1} < |v| < {r_1}^{-1}$ is en heeft dus een convergentiestraal minstens r_1^{-1}. Schrijf

$$g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n\ , \qquad h(v) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{-m} v^m$$

voor de door deze machtreeksen gegeven analytische funkties. Dan is

$$f(z) = g(z-\alpha) + h((z-\alpha)^{-1}) \qquad \text{voor} \quad z \in G.$$

Omdat $g(u)$ en $h(v)$ en ook de substituties $u = z-\alpha$ en $v = (z-\alpha)^{-1}$ complex differentieerbare funkties zijn, is ook f een complex differentieerbare funktie.

We bewijzen nu de formule (77). Laat r de straal van de cirkel k zijn en laat c_1 en c_2 de positief georiënteerde cirkels met middelpunt 0 en straal r

resp. r^{-1} zijn. Dan is

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}}\,dw &= \frac{1}{2\pi i}\int_k \left(\frac{g(w-\alpha)}{(w-\alpha)^{n+1}} + \frac{h((w-\alpha)^{-1})}{(w-\alpha)^{n+1}}\right) dw \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} g(u)u^{-n-1}du \,+\, \frac{1}{2\pi i}\int_{c_2} h(v)v^{n-1}\,dv
\end{aligned}$$

Volgens Stellingen 10.6 en 11.1 is voor $n \geq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} g(u)u^{-n-1}\,du &= a_n \\
\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2} h(v)v^{n-1}\,dv &= 0
\end{aligned}$$

en voor $n = -m < 0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} g(u)u^{-n-1}\,du &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} g(u)u^{m-1}\,du = 0 \\
\frac{1}{2\pi i}\int_{c_2} h(v)v^{n-1}\,dv &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c_2} \frac{h(v)}{v^{m+1}}\,dv = a_{-m} = a_n\,.
\end{aligned}$$

Aldus blijkt voor elke $n \in \mathbb{Z}$ Formule (77) te gelden. ■

De voorgaande stelling zegt dat een Laurentreeks op een bijpassend ringgebied een analytische funktie geeft. Het onderstaande stelling zegt dat omgekeerd iedere op een ringgebied gedefinieerde analytische funktie f in een Laurentreeks te ontwikkelen is.

Stelling 12.2 *Zij f een analytische funktie op het ringgebied $G = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z-\alpha| < r_2\}$. Dan geldt voor alle $z \in G$ dat*

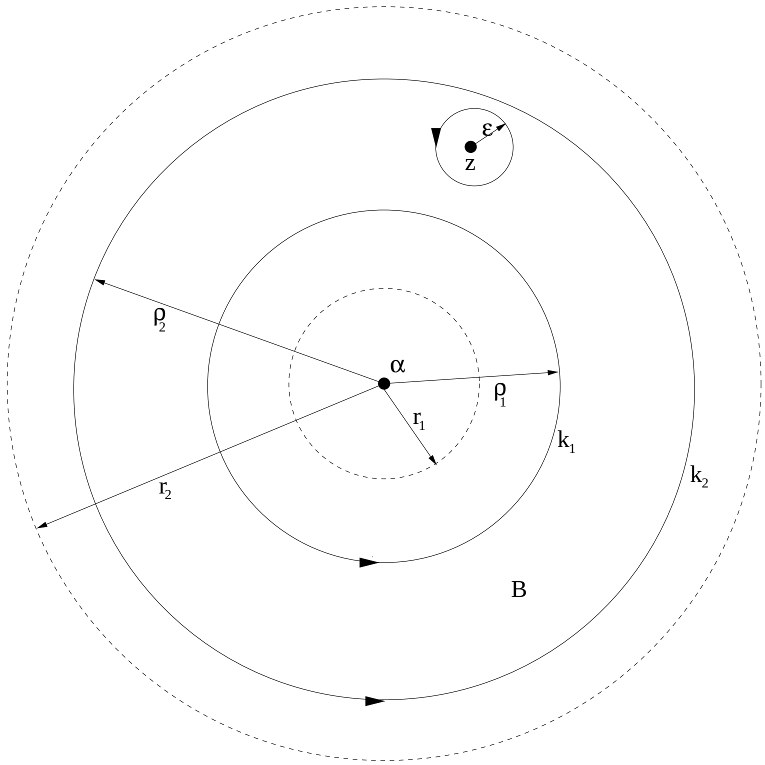
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n \tag{78}$$

met coëfficiënten

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}}\,dw \tag{79}$$

Hierin mag voor k iedere (positief georiënteerde) cirkel met middelpunt α en straal $r \in]r_1, r_2[$ genomen worden.

Bewijs: We fixeren een willekeurig punt $z \in G$. Kies daarbij ρ_1 en ρ_2 zo dat $r_1 < \rho_1 < |z - \alpha| < \rho_2 < r_2$. Laat k_1 en k_2 de positief georiënteerde cirkels zijn met middelpunt α en stralen ρ_1 resp. ρ_2. Kies $\epsilon > 0$ zo klein dat de afsluiting van de cirkelschijf $D_\epsilon = \{w \in \mathbb{C} \mid \; |w - z| < \epsilon\}$ in het ringgebied $G(\rho_1, \rho_2) = \{w \in \mathbb{C} \mid \; \rho_1 < |w - \alpha| < \rho_2\}$ ligt.



We beschouwen nu de begrensde open verzameling

$$B = G(\rho_1, \rho_2) \setminus \overline{D_\epsilon}.$$

B heeft georiënteerde rand $\partial B = k_2 \cup -k_1 \cup -\partial D_\epsilon$. De funktie $w \mapsto \frac{f(w)}{w-z}$ is analytisch op een open omgeving van $\overline{B}$. Met behulp van Stelling 10.6 concluderen we door integratie over ∂B dat

$$\int_{k_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - \int_{k_1} \frac{f(w)}{w - z} dw - \int_{\partial D_\epsilon} \frac{f(w)}{w - z} dw = 0. \tag{80}$$

Wegens Stelling 10.7 is de derde integraal gelijk aan $2\pi i f(z)$. We vinden derhalve dat

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{k_2} \frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{k_1} \frac{f(w)}{w-z}dw. \tag{81}$$

De eerste integraal behandelen we als in het bewijs van Stelling 11.1. Dit is mogelijk omdat $|w-\alpha| > |z-\alpha|$ voor alle $w \in k_2$. Dus is

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k_2} \frac{f(w)}{w-z}dw = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$$

met

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{k_2} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}}\, dw.$$

De tweede integraal kan volgens dezelfde methode worden behandeld, behalve dan dat we nu moeten uitgaan van $|w-\alpha| < |z-\alpha|$ voor alle $w \in k_1$. Hier zijn de details: Om te beginnen hebben we voor $w \in k_1$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z-w} &= \frac{\frac{1}{z-\alpha}}{1-\frac{w-\alpha}{z-\alpha}} \\
&= \frac{1}{z-\alpha} + \frac{w-\alpha}{(z-\alpha)^2} + \frac{(w-\alpha)^2}{(z-\alpha)^3} + \ldots + \frac{(w-\alpha)^N}{(z-\alpha)^{N+1}} + R_N(w)
\end{aligned}$$

met

$$R_N(w) = \left(\frac{w-\alpha}{z-\alpha}\right)^{N+1} \frac{1}{z-w}.$$

Hieruit volgt

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{k_1} \frac{f(w)}{w-z}dw = \sum_{m=1}^{N+1} a_{-m}(z-\alpha)^{-m} + \frac{1}{2\pi i}\int_{k_1} f(w)R_N(w)dw$$

met

$$a_{-m} = \frac{1}{2\pi i}\int_{k_1} f(w)(w-\alpha)^{m-1}\, dw$$

Dus is

$$\begin{aligned}
\left|-\frac{1}{2\pi i}\int_{k_1} \frac{f(w)}{w-z}dw - \sum_{m=1}^{N+1} a_{-m}(z-\alpha)^{-m}\right| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{k_1} f(w)R_N(w)dw\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{k_1} |f(w)R_N(w)|\, dw \\
&\leq \rho_1 \left(\frac{\rho_1}{|z-\alpha|}\right)^{N+1} \max_{w\in k_1}\left|\frac{f(w)}{z-w}\right|;
\end{aligned}$$

voor de laatste ongelijkheid is o.a. gebruikt dat $|w-\alpha| = \rho_1$ en $|w-z| \neq 0$ voor alle $w \in k_1$. Omdat $|z-\alpha| > \rho_1$ is, is

$$\lim_{N\to\infty} \left(\frac{\rho_1}{|z-\alpha|}\right)^{N+1} = 0.$$

We concluderen

$$\lim_{N\to\infty} \left| -\frac{1}{2\pi i}\int_{k_1} \frac{f(w)}{w-z}dw - \sum_{m=1}^{N+1} a_{-m}(z-\alpha)^{-m} \right| = 0\,.$$

Alles bij elkaar hebben we nu bewezen dat de funktie f op het ring gebied G wordt gegeven door de Laurentreeks

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$$

met coëfficiënten

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}}\,dw$$

waarbij $C = k_2$ als $n \geq 0$ en $C = k_1$ als $n < 0$.

Om de stelling volledig te bewijzen moeten we nog laten zien dat men in deze integralen ook $C = k$ kan nemen, waarbij k een willekeurige cirkel is met middelpunt α en straal $r \in]r_1, r_2[$. Het gebied G is een open omgeving van de afsluiting van het ringgebied begrensd door k en k_1 c.q. door k en k_2. Voor elke $n \in \mathbb{Z}$ is de funktie $w \mapsto \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}}$ analytisch in het ringgebied G. Daarom is volgens Stelling 10.6

$$\int_k \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}}\,dw - \int_{k_1} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}}\,dw = 0$$

en net zo met k_2 i.p.v. k_1. ■

Formule (79) is van groot belang. De formule wordt meestal gebruikt niet om de coëfficiënt van de Laurentreeks te berekenen m.b.v. een integraal, maar om de integraal te berekenen m.b.v. de coëfficiënt van de Laurentreeks.

In de praktijk zijn er vaak handige methoden om voor een gegeven analytische funktie op een ringgebied de Laurentreeksontwikkeling te bepalen. We geven enkele voorbeelden.

Voorbeelden.

1. De funktie $(1+z^2)^{-1}$ is analytisch op het ringgebied $|z| > 1$, en heeft daar dus een convergente Laurentreeksontwikkeling, die we als volgt kunnen vinden:

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}\right) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} + \ldots .$$

2. De funktie $(1+z^2)^{-1}$ is ook complex differentieerbaar in het ringgebied $0 < |z-i| < 2$. De Laurentreeks in dat ringgebied vinden we als volgt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+z^2} &= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right] \\
&= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{z-i} - \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2i}(z-i)^{-1} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^n (z-i)^n.
\end{aligned}$$

Het kan ook anders: we schrijven $z-i=w$ ofwel $z=w+i$, en er komt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+z^2} &= \frac{1}{2iw\left(1+\frac{w}{2i}\right)} \\
&= \frac{1}{2iw}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{w}{2i}\right)^n \\
&= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^n (z-i)^{n-1}.
\end{aligned}$$

13 Singuliere punten en residuen

Een *gereduceerde omgeving* van een punt $\alpha \in \mathbb{C}$ is een gebied van de vorm

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - \alpha| < \epsilon\} \tag{82}$$

met $\epsilon > 0$. Wanneer f een analytische funktie is, gedefinieerd in zo'n gereduceerde omgeving U van α, zegt men dat α *een geïsoleerd singulier punt van de funktie* f is.

Uit Stelling 12.2 (met $r_1 = 0$ en $r_2 = \epsilon$) blijkt dat f in U in een Laurentreeks te ontwikkelen is:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n \qquad \text{voor} \quad z \in U. \tag{83}$$

Er zijn nu twee mogelijkheden:

1. Er geldt $a_n \neq 0$ voor oneindig vele $n < 0$. In dit geval noemen we α een *essentieel singulier punt* van f.

2. Er is een $k \in \mathbb{Z}$ zo dat $a_n = 0$ voor elke $n < k$. In dit geval kunnen we de reeks (83) schrijven als:

$$\begin{aligned} f(z) &= a_k(z-\alpha)^k + a_{k+1}(z-\alpha)^{k+1} + \ldots \\ &= (z-\alpha)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(z-\alpha)^n && (84) \\ &= (z-\alpha)^k g(z) && (85) \end{aligned}$$

   De machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(z-\alpha)^n$ convergeert voor $z \in U$ en heeft dus een convergentiestraal minstens ϵ. De door die machtreeks gedefinieerde funktie g is daarom analytisch op de schijf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - \alpha| < \epsilon\}$, inclusief α.

   Is $k \geq 0$, dan is f zelf *voort te zetten* tot een analytische funktie op $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - \alpha| < \epsilon\}$ van α door te definiëren $f(\alpha) = a_0$. We zeggen in dit geval dat α een *opheftbare singulariteit* is.

   Voorbeeld: $\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \ldots$ heeft in 0 een opheftbare singulariteit.

Als $k > 0$ is en $a_k \neq 0$, dan is $f(\alpha) = 0$ en zeggen we dat de funktie f in α een nulpunt heeft *van orde* k of *van multipliciteit* k .

Als $k < 0$ is en $a_k \neq 0$, dan zeggen we dat de funktie f in het punt α een *pool van orde* $-k$ heeft.
In dat geval kan er geen funktiewaarde $f(\alpha)$ worden gedefinieerd.

Definitie 13.1 Laat $\alpha \in \mathbb{C}$ een geïsoleerde singulariteit zijn van een funktie f, die gedefinieerd en analytisch is op een *gereduceerde* omgeving U van α. De coëfficiënt a_{-1} van $(z-\alpha)^{-1}$ in de Laurentreeks (83) noemt men het *residu* van f in α; notatie $\operatorname{Res}_\alpha(f)$. Dus:

$$\operatorname{Res}_\alpha(f) := a_{-1}.$$

Voorbeelden.

1. De funktie z^{-2} heeft een pool van orde 2 en residu 0 in 0.

2. De funktie $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ is analytisch op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ en heeft daar een Laurentreeksontwikkeling:

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2!}z^{-2} + \dots .$$

Het punt $z = 0$ is derhalve een essentiële singulariteit en er geldt $\operatorname{Res}_0(f) = 1$.

3. We beschouwen de funktie $(1+z^2)^{-1}$ rond het punt $z = i$. Uit de in Hoofdstuk 12, Voorbeeld (2) gevonden Laurentreeks lezen we af dat

$$\operatorname{Res}_i\left(\frac{1}{1+z^2}\right) = \frac{1}{2i} .$$

Het is echter niet noodzakelijk eerst de gehele Laurentreeks te bepalen. Een snellere methode is de volgende: de funktie $(z+i)^{-1}$ is analytisch in een volle omgeving van $z = i$ en heeft dus een machtreeksontwikkeling

$$\frac{1}{z+i} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-i)^n . \tag{86}$$

Hieruit volgt dat

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = a_0(z-i)^{-1} + \dots$$

en we zien dat

$$\mathrm{Res}_i\,(\frac{1}{1+z^2}) = a_0\,;$$

zodat we slechts a_0 hoeven te bepalen. Invullen van $z = i$ in (86) levert $a_0 = (2i)^{-1}$.

4. We beschouwen de funktie $f(z) = (1+z^2)^{-1}\cos z$. Deze funktie is overal analytisch, behalve in de punten i en $-i$. We beschouwen eerst het geïsoleerde singuliere punt $-i$. De funktie $(z-i)^{-1}\cos z$ is analytisch in $z = -i$ en heeft dus een machtreeksontwikkeling $a_0 + a_1(z+i) + \dots$ in een volle omgeving van dit punt; hierin is $a_0 = -(2i)^{-1}\cos(-i) = \frac{1}{4}i(e+e^{-1})$. Derhalve is

$$\frac{\cos z}{1+z^2} = \frac{1}{z+i}\left(\frac{\cos z}{z-i}\right) = a_0(z+i)^{-1} + \dots.$$

Het punt $-i$ is dus een pool van de orde 1 van f en

$$\mathrm{Res}_{-i}\,(f) = \frac{i}{4}(e+e^{-1}).$$

Op soortgelijke wijze zien we in dat i een eerste orde pool van f is. Het residu is:

$$\mathrm{Res}_i\,(f) = \left[\frac{\cos z}{z+i}\right]_{z=i} = -\frac{i}{4}(e+e^{-1}).$$

5. We beschouwen de funktie $f(z) = [(e^z-1)\sin z]^{-1}$ rond $z = 0$. Eerst merken we op dat

$$\begin{aligned}(e^z-1)\sin z &= (z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \dots)(z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \dots)\\ &= z^2 g(z)\end{aligned}$$

met

$$\begin{aligned}g(z) &= (1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{24}z^3 + \dots)(1 - \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{120}z^4 - \dots)\\ &= 1 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{24}z^3 + \dots\end{aligned}$$

De funktie $g(z)$ is analytisch in een volle omgeving van $z = 0$. Omdat $g(0) = 1 \neq 0$ is, is de funktie $h(z) = g(z)^{-1}$ ook analytisch in een volle omgeving van 0 en heeft daar een machtreeksontwikkeling

$$\begin{aligned} h(z) &= 1 - \left(\frac{1}{2}z - \frac{1}{24}z^3 + \dots\right) + \left(\frac{1}{2}z - \frac{1}{24}z^3 + \dots\right)^2 - \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{12}z^3 + \dots \end{aligned}$$

Nu is

$$f(z) = \frac{h(z)}{z^2} = z^{-2} - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12}z + \dots .$$

Dus heeft de funktie f in $z = 0$ een tweede orde pool. Het residu van f in 0 is:

$$\mathrm{Res}_0\,(f) = -\frac{1}{2}.$$

Overigens hebben we in de voorgaande voorbeelden enige extra oefening in rekenen met machtreeksen ingebouwd. Niet al dat rekenwerk was strikt nodig om het residu te bepalen. Maar zelfs als we de reeksen niet verder bepalen dan strikt noodzakelijk, dan nog is dit niet altijd de meest praktische methode voor het berekenen van residuen. Wel praktisch is het volgende.

Lemma 13.2 *Laat f een funktie zijn die gedefinieerd en analytisch is in een gereduceerde omgeving U van het punt α. Stel we hebben (door na te denken of door wat te proberen) een positief geheel getal p gevonden zo dat*

$$\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)^p f(z) \quad \textit{bestaat (als complex getal) en niet} \quad 0 \quad \textit{is.}$$

Definieer de funktie g op de volle omgeving $V = U \cup \{\alpha\}$ van α door

$$\begin{aligned} g(z) &= (z-\alpha)^p f(z) \qquad \textit{voor} \quad z \in U \\ g(\alpha) &= \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)^p f(z) \end{aligned}$$

Dan geldt

1. *f heeft in α een pool van orde p.*
2. *g is een analytische funktie op V*

3.
$$\mathrm{Res}_\alpha\,(f) = \frac{g^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!}$$
met $g^{(p-1)}$ *de* $(p-1)$*-ste afgeleide van* g.

Bewijs: Het is duidelijk dat g een analytische funktie is op U. Dus heeft g een Laurentreeksontwikkeling

$$g(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n (z-\alpha)^n$$

met coëfficiënten
$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{g(z)}{(z-\alpha)^{n+1}}\,dz$$
waarbij k een voldoend klein positief georiënteerd cirkeltje om α is, met straal r. Voor $n = -m < 0$ is dan

$$\begin{aligned} |b_{-m}| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_k g(z)(z-\alpha)^{m-1}\,dz\right| \\ &\leq r^m \max_{z\in k} |g(z)| \end{aligned}$$

Omdat $\lim_{z\to\alpha} g(z)$ bestaat en $m > 0$ is, is

$$\lim_{r\downarrow 0} r^m \max_{z\in k}|g(z)| = 0.$$

Zo zien we $b_n = 0$ voor elke $n < 0$. De Laurentreeks van de funktie g is dus in feite een machtreeks, die convergeert op de hele omgeving V van α. Dit bewijst dat g een analytische funktie is op V

Uit het voorgaande zien we bovendien dat de Laurentreeks van f wordt gegeven door

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-\alpha)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-\alpha)^{n-p} = \sum_{n=-p}^{\infty} b_{n+p}(z-\alpha)^n$$

waarbij de coëfficiënt van $(z-\alpha)^{-p}$ is $b_0 = g(\alpha) = \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)^p f(z) \neq 0$. We zien dat f in α een pool heeft van orde p.

Verder blijkt

$$\mathrm{Res}_\alpha\,(f) = b_{p-1} = \frac{g^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!}$$

$\blacksquare$

We bekijken enkele van de voorgaande voorbeelden nog eens in het licht van Lemma 13.2.

Voorbeelden.

1. De funktie $\dfrac{1}{1+z^2}$ in de buurt van $z = i$: Vanwege

$$\lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{1+z^2} = \lim_{z\to i}\frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}$$

heeft de funktie $\dfrac{1}{1+z^2}$ een pool van orde 1 en is

$$\mathrm{Res}_i\,(\frac{1}{1+z^2}) = \left.\frac{1}{z+i}\right|_{z=i} = \frac{1}{2i}$$

2. De funktie $f(z) = [(e^z-1)\sin z]^{-1}$ in de buurt van $z = 0$:

We kennen de standaardlimieten

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z} &= 1 \\ \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} &= 1 \end{aligned}$$

Daarmee leiden we af

$$\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z}{e^z-1}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z} = 1.$$

We zien dat f in 0 een pool heeft van orde 2 en

$$\mathrm{Res}_0\,(f) = g'(0)$$

waarbij de funktie g wordt gegeven door $g(z) = z^2 f(z)$ voor $z \neq 0$ en $g(0) = 1$. Uitgaande van de definitie van afgeleide in 0 vinden we:

$$g'(0) = \lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\left(\frac{z^2}{(e^z-1)\sin z} - 1\right) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{z\to 0}\frac{z}{(e^z-1)} \times \lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z} \times \lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\left(1-\frac{(e^z-1)}{z}\frac{\sin z}{z}\right)\\
&= 1\times 1\times \lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\left(1-(1+\frac{1}{2}z+\ldots)(1-\frac{1}{6}z^2+\ldots)\right)\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\left(1-1-\frac{1}{2}z+\ldots\right)\\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Conclusie: $\mathrm{Res}_0\,(f) = -\frac{1}{2}$.

14 De residuenstelling

Een van de hoogtepunten van de complexe funktie theorie is de *Residuen Stelling van Cauchy*. We zullen nu eerst deze stelling formuleren en bewijzen en vervolgens een aantal voorbeelden van de nuttige toepassingen van deze stelling geven.

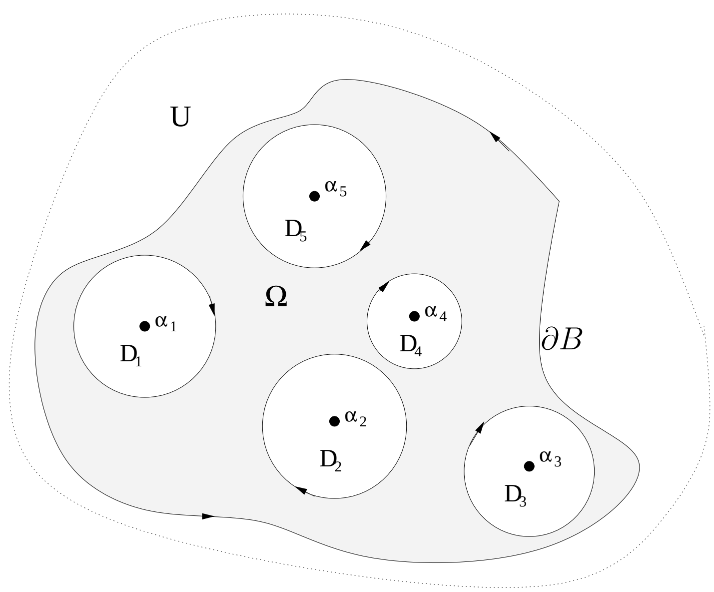
Stelling 14.1 (De residuenstelling van Cauchy.)
Gegeven zijn:

- *een begrensde open verzameling $B \subset \mathbb{C}$ met stuksgewijze C^1 rand ∂B*
- *een (eindig) aantal punten $\alpha_1, \dots \alpha_m$ in B*
- *een open verzameling $U \subset \mathbb{C}$ die de afsluiting $\overline{B}$ van B bevat*
- *een funktie f die gedefinieerd en analytisch is op $U \setminus \{\alpha_1, \dots \alpha_m\}$*

Dan is

$$\int_{\partial B} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}_{\alpha_j}(f). \tag{87}$$

Bewijs: Voor ieder punt α_j kunnen we een open cirkelschijfje D_j nemen met middelpunt α_j zo dat de afsluiting $\overline{D_j}$ nog geheel in B ligt en zo dat verschillende gesloten schijfjes niet overlappen: $\overline{D_j} \cap \overline{D_l} = \emptyset$ als $j \neq l$.



Neem

$$\Omega = B \setminus \left(\overline{D_1} \cup \overline{D_2} \cup \ldots \cup \overline{D_m}\right)$$

De georiënteerde rand van Ω is

$$\partial\Omega = \partial B \cup (-\partial D_1) \cup \ldots \cup (-\partial D_m)$$

en de afsluiting $\overline{\Omega}$ is geheel bevat in $U \setminus \{\alpha_1, \ldots \alpha_m\}$.

We kunnen Stelling 10.6 toepassen en vinden

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\, dz = 0$$

en dus

$$\int_{\partial B} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{m} \int_{\partial D_j} f(z)\, dz. \tag{88}$$

Elk van de integralen in het rechterlid kan m.b.v. Formule (79) en Definitie 13.1 worden geschreven als:

$$\int_{\partial D_j} f(z)\, dz = 2\pi i\, \mathrm{Res}_{\alpha_j}(f).$$

Hiermee is de Residuen Stelling, d.w.z. Formule (87) bewezen. ■

De rest van dit hoofdstuk bestaat uit voorbeelden van toepassingen van de Residuen Stelling. Een integraal van de vorm $\int_{\partial B} f(z)\, dz$ als in de stelling noemt men een *contour-integraal.* Integralen die met de Residuen Stelling kunnen worden uitgerekend hebben vaak niet meteen al de vorm van een contour-integraal. De eerste stap in de toepassingen is dan ook om in te zien dat een gegeven integraal kan worden omgezet in een contour-integraal (een vaardigheid die men leert door veel te oefenen). Bij oneigenlijke integralen moet men meestal een gegeven oneigenlijke integraal zien als een limiet van contour-integralen. De tweede stap is om de benodigde residuen te berekenen. Bij limieten van contour-integralen is meestal nog een derde stap nodig waarbij een gedeelte van de contour-intgeraal wordt afgeschat en wordt aangetoond dat dit gedeelte in de limiet 0 wordt (ook een vaardigheid die men leert door veel te oefenen).

Voorbeelden.

1. Als eerste toepassing beschouwen we de integraal

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+\sin\varphi};$$

voor een reëel getal $a > 1$. Omdat $-1 \leq \sin\varphi \leq 1$ is, is de integrand gedefinieerd en continu op het gesloten interval $[0, 2\pi]$. Schrijven we $z = e^{i\varphi}$, dan is

$$\frac{d\varphi}{a+\sin\varphi} = \left(\frac{2i}{2ia+z-z^{-1}}\right)\frac{dz}{iz} = \frac{2\,dz}{z^2+2iaz-1}.$$

Dus blijkt I om te schrijven naar een contour-integraal

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+\sin\varphi} = \int_k \frac{2\,dz}{z^2+2iaz-1}.$$

met k de positief georiënteerde eenheidscirkel met middelpunt 0, geparametriseerd door $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\sigma(\varphi) = e^{i\varphi}$.

De noemer $z^2 + 2iaz - 1$ in de bovenstaande integrand heeft wortels $\alpha_1 = -i(a - \sqrt{a^2-1})$ en $\alpha_2 = -i(a + \sqrt{a^2-1})$. Merk op dat

$$|\alpha_2| = a + \sqrt{a^2-1} \geq a > 1$$

en $|\alpha_1||\alpha_2| = (a - \sqrt{a^2-1})(a + \sqrt{a^2-1}) = 1$, dus $|\alpha_1| = |\alpha_2|^{-1} < 1$. We zien dat α_1 binnen en α_2 buiten de cirkel k ligt. Met behulp van Stelling 14.1 concluderen we dat

$$\begin{aligned}
\int_k \frac{2\,dz}{z^2+2iaz-1} &= 2\pi i\ \mathrm{Res}_{\alpha_1}\left(\frac{2}{z^2+2iaz-1}\right) \\
&= 2\pi i\ \mathrm{Res}_{\alpha_1}\left(\frac{2}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)}\right) \\
&= 2\pi i \lim_{z\to\alpha_1} \frac{2(z-\alpha_1)}{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)} \\
&= \frac{4\pi i}{\alpha_1-\alpha_2} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.
\end{aligned}$$

Zo hebben we berekend:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+\sin\varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

2. Als tweede toepassing berekenen we de oneigenlijke integraal

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}.$$

Omdat $\frac{1}{1+x^6} < \frac{1}{x^6}$ is voor $x \geq 1$ terwijl $\int_1^{\infty} x^{-6}dx$ convergeert, convergeert volgens de majorantie-stelling ook de oneigenlijke integraal I, d.w.z.

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{dx}{1+x^6} \qquad \text{bestaat.}$$

Omdat voor iedere $R > 0$ geldt

$$\int_{-R}^0 \frac{dx}{1+x^6} = \int_0^R \frac{dx}{1+x^6}$$

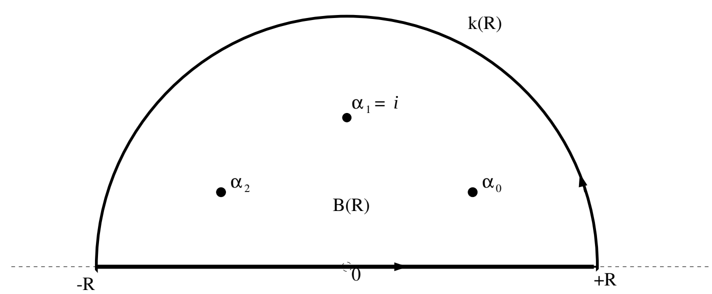
is

$$I = \frac{1}{2} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{1+x^6} \tag{89}$$

Neem, voor $R > 1$, de open halve cirkelschijf

$$B(R) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\,,\ |z| < R\}.$$

De rand $\partial B(R)$ is de vereniging van het interval $[-R, R]$ en de bovenste helft, noem die $k(R)$, van de cirkel met middelpunt 0 en straal R.



Dus is

$$\int_{\partial B(R)} \frac{dz}{1+z^6} = \int_{-R}^{R} \frac{dz}{1+z^6} + \int_{k(R)} \frac{dz}{1+z^6}. \tag{90}$$

Voor $z \in k(R)$ geldt $R^6 = |z^6| = |z^6+1-1| \leq |z^6+1|+1$; dus $|1+z^6| \geq R^6-1$ en

$$\frac{1}{|1+z^6|} \leq \frac{1}{R^6-1}$$

Hieruit, en het feit dat de halve cirkel $k(R)$ lengte πR heeft, volgt dat

$$\left| \int_{k(R)} \frac{dz}{z^6+1} \right| \leq \frac{\pi R}{R^6-1}.$$

Nemen we hier de limiet voor $R \to \infty$, dan zien we:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{k(R)} \frac{dz}{z^6+1} = 0$$

en dus, wegens (89) en (90),

$$I = \frac{1}{2} \lim_{R\to\infty} \int_{\partial B(R)} \frac{dz}{1+z^6} \tag{91}$$

We gaan nu m.b.v. de Residuen Stelling $\int_{\partial B(R)} \frac{dz}{1+z^6}$ berekenen, voor $R > 1$. De nulpunten van de noemer $p(z) = z^6 + 1$ zijn

$$\alpha_j = e^{\frac{(2j+1)\pi i}{6}} \qquad \text{voor} \quad j = 0, \ldots 5.$$

Hiervan liggen alleen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ in $B(R)$. Derhalve is

$$\int_{\partial B(R)} \frac{dz}{1+z^6} = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{\alpha_0} (\frac{1}{p(z)}) + \operatorname{Res}_{\alpha_1} (\frac{1}{p(z)}) + \operatorname{Res}_{\alpha_2} (\frac{1}{p(z)}) \right).$$

In het bijzonder is deze integraal onafhankelijk van R, tenminste als $R > 1$ is. Hieruit en uit (91) volgt:

$$I = \pi i \left(\operatorname{Res}_{\alpha_0} (\frac{1}{p(z)}) + \operatorname{Res}_{\alpha_1} (\frac{1}{p(z)}) + \operatorname{Res}_{\alpha_2} (\frac{1}{p(z)}) \right).$$

Er is een erg handige methode om de residuen $\operatorname{Res}_{\alpha_j} (\frac{1}{p(z)})$ te berekenen. Omdat deze methode algemener toepasbaar is, wordt hij apart beschreven in Lemma 14.2 hierna. Het resultaat is in het onderhavige geval

$$\mathrm{Res}_{\alpha_j}\,(\frac{1}{p(z)}) \;=\; \frac{1}{p'(\alpha_j)} \;=\; \frac{1}{6\alpha_j^5} \;=\; -\frac{\alpha_j}{6}$$

want $\alpha_j^6 = -1$. Omdat $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 2i$ is, vinden we ten slotte

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3}. \tag{92}$$

Lemma 14.2 *Zij $p(z)$ een differentieerbare funktie op een omgeving van het punt α. Veronderstel $p(\alpha) = 0$ en $p'(\alpha) \neq 0$. Dan heeft de funktie $\frac{1}{p(z)}$ in α een eerste orde pool heeft en is*

$$\mathrm{Res}_\alpha\,(\frac{1}{p(z)}) = \frac{1}{p'(\alpha)}. \tag{93}$$

Bewijs: Merk op dat $p(\alpha) = 0$ en dat

$$\lim_{z\to\alpha} \frac{p(z)-p(\alpha)}{z-\alpha} = p'(\alpha).$$

Dit levert

$$\lim_{z\to\alpha} \frac{z-\alpha}{p(z)} = \frac{1}{p'(\alpha)}.$$

De conclusies volgen nu met Lemma 13.2. ∎

Voorbeelden.

3. Als derde toepassing laten we zien dat

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{e}. \tag{94}$$

Deze oneigenlijke integraal convergeert omdat $\left|\frac{\cos x}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{1+x^2}$, terwijl $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ convergeert.

Neem weer, voor $R > 1$, de open halve cirkelschijf

$$B(R) = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\,,\ |z| < R\}.$$

De funktie

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$$

is analytisch op $\mathbb{C}\backslash\{-i, i\}$ en heeft in $-i$ en i eerste orde polen. Hiervan ligt alleen i binnen $B(R)$. Het residu van f in i is

$$\mathrm{Res}_i\,(f) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{e^{iz}}{1+z^2} = \lim_{z\to i}\frac{e^{iz}}{z+i} = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

Hieruit volgt dat

$$\int_{\partial B(R)} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}_i\,(f) = \frac{\pi}{e}. \tag{95}$$

De integraal in (95) is wederom te splitsen in een integraal over het interval $[-R, R]$ en een integraal over de halve cirkelboog $k(R)$. Als $z \in k(R)$ dan is

$$|f(z)| = \frac{e^{\mathrm{Re}\,iz}}{|1+z^2|} \leq \frac{e^{-\mathrm{Im}\,z}}{|z^2|-1} \leq \frac{1}{R^2-1};$$

hier is gebruikt dat voor $z \in k(R)$ geldt $|z| = R$ en $\mathrm{Im}\,z \geq 0$, dus $e^{-\mathrm{Im}\,z} \leq 1$. We zien:

$$\left|\int_{k(R)} f(z)\,dz\right| \leq \frac{\pi R}{R^2-1},$$

dus

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{e} &= \lim_{R\to\infty}\int_{k(R)} f(z)\,dz + \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(z)\,dz \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(z)\,dz \\
&= \lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{R}\frac{\cos x}{1+x^2}dx + i\int_{-R}^{R}\frac{\sin x}{1+x^2}dx\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}dx + i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}dx
\end{aligned}$$

Door deze gelijkheid uit te splitsen naar reëel en imaginair deel vinden we

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{e} \qquad \text{en} \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}\,dx = 0.$$

Dat die tweede integraal 0 is, is natuurlijk al meteen duidelijk; de integrand is immers een oneven funktie.

4. Als vierde toepassing behandelen we de integraal

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

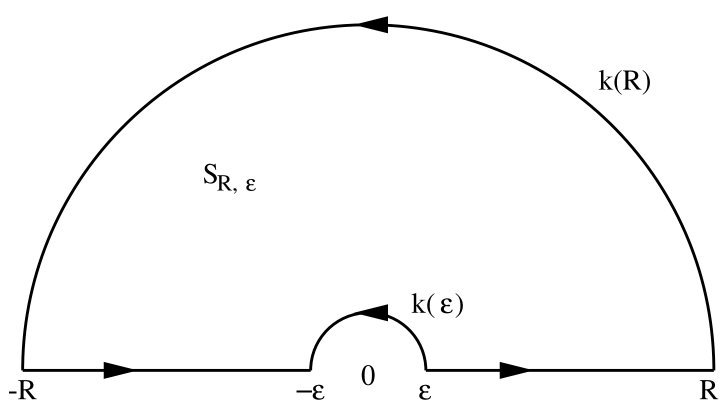
Dat deze oneigenlijke integraal convergeert hebben we reeds in INF 2a gezien, maar dat zullen we hier niet gebruiken. Convergentie zal hier worden bewezen tegelijk met een berekening van de exakte waarde.

De integraal is gecompliceerder dan de voorgaande: splitsen we de sinus in een som van e−machten dan ontstaan er twee divergente integralen. We gaan daarom als volgt te werk. Allereerst merken we op dat

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^R \frac{\sin x}{x}\, dx &= \frac{1}{2i}\left(-\int_\epsilon^R \frac{e^{-ix}}{x}\, dx + \int_\epsilon^R \frac{e^{ix}}{x}\, dx\right)\\ &= \frac{1}{2i}\left(\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x}\, dx + \int_\epsilon^R \frac{e^{ix}}{x}\, dx\right).\end{aligned}$$

Hierdoor gemotiveerd beschouwen we voor $0 < \epsilon < R$ het gebied

$$S_{R,\epsilon} = \{z \in \mathbb{C} \mid \epsilon < |z| < R\,,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}.$$



De funktie $f(z) = z^{-1}e^{iz}$ is analytisch op de open verzameling $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, die de afsluiting van $S_{R,\epsilon}$ omvat. Dus volgt:

$$\int_{\partial S_{R,\epsilon}} f(z)\, dz = 0. \tag{96}$$

De georiënteerde rand van $S_{R,\epsilon}$ is gelijk aan

$$\partial S_{R,\epsilon} = [-R, -\epsilon] \cup [\epsilon, R] \cup \ -k(\epsilon) \cup k(R),$$

waarin $k(\epsilon)$ en $k(R)$ twee positief georiënteerde halve cirkelbogen met stralen ϵ resp. R zijn. Er volgt:

$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x}\, dx - \int_{k(\epsilon)} \frac{e^{iz}}{z}\, dz + \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}\, dx + \int_{k(R)} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 0$$

en dus

$$\int_{\epsilon}^{R} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{1}{2i}\left(\int_{k(\epsilon)} \frac{e^{iz}}{z}\, dz \ - \ \int_{k(R)} \frac{e^{iz}}{z}\, dz\right) \tag{97}$$

Met de parametrisering $\varphi \mapsto Re^{i\varphi}$ voor $k(R)$ vinden we dat

$$\begin{aligned}
\left|\int_{k(R)} \frac{e^{iz}}{z}\, dz\right| &= \left|\int_0^{\pi} \frac{\exp(iRe^{i\varphi})}{Re^{i\varphi}} iRe^{i\varphi}\, d\varphi\right| \\
&\leq \int_0^{\pi} |\exp(iRe^{i\varphi})|\, d\varphi \\
&= \int_0^{\pi} e^{-R\sin\varphi}\, d\varphi \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\varphi}\, d\varphi
\end{aligned}$$

Voor $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ geldt dat $\sin\varphi \geq \frac{2}{\pi}\varphi$ (teken de grafieken om dit in te zien). Dus is

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\varphi}\, d\varphi \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R\varphi}{\pi}}\, d\varphi = \frac{\pi}{R}\left(1 - e^{-R}\right)$$

waaruit blijkt dat in (97) de laatste integraal naar 0 gaat voor $R \to \infty$:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{k(R)} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 0 \tag{98}$$

De voorlaatste integraal in (97) berekenen we als volgt:

$$\int_{k(\epsilon)} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = \int_{k(\epsilon)} \frac{1}{z}\, dz + \int_{k(\epsilon)} \frac{e^{iz} - 1}{z}\, dz. \tag{99}$$

Verder is

$$\int_{k(\epsilon)} \frac{1}{z}\, dz = \int_0^{\pi} \frac{1}{\epsilon e^{i\varphi}} i\epsilon e^{i\varphi}\, d\varphi = \pi i \tag{100}$$

en

$$\left| \int_{k(\epsilon)} \frac{e^{iz}-1}{z}\, dz \right| \leq \pi\epsilon \max_{z\in k(\epsilon)} \left| \frac{e^{iz}-1}{z} \right|$$

Omdat $\lim_{z\to 0} \frac{e^{iz}-1}{z} = i$, is

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0} \pi\epsilon \max_{z\in k(\epsilon)} \left| \frac{e^{iz}-1}{z} \right| = 0$$

en dus ook

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_{k(\epsilon)} \frac{e^{iz}-1}{z}\, dz = 0. \tag{101}$$

Uit (99), (100), (101) blijkt:

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_{k(\epsilon)} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = \pi i \tag{102}$$

Tot slot vinden we door (98) en (102) in te vullen in (97) dat

$$\lim_{R\to\infty} \lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_{\epsilon}^{R} \frac{\sin x}{x}\, dx \qquad \text{bestaat en is} \qquad = \frac{\pi}{2}$$

d.w.z. de oneigenlijke integraal $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ convergeert en

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\,. \tag{103}$$

De kromme ∂B waarover in de Residuen Stelling 14.1 wordt geïntegreerd, is niet de meest algemene soort kromme waarover men complexe funkties wil integreren; ∂B heeft bijvoorbeeld geen zelfdoorsnijdingen. Men kan sommige krommen echter zien als een "lineaire combinatie" van krommen van de vorm ∂B_j voor een eindig aantal geschikte gebieden B_j $(j = 1, 2, \ldots)$:

$$k = \sum_{j=1}^{N} n_j \partial B_j \qquad \text{met} \quad n_j \in \mathbb{Z}.$$

Voor dergelijke krommen geldt dan

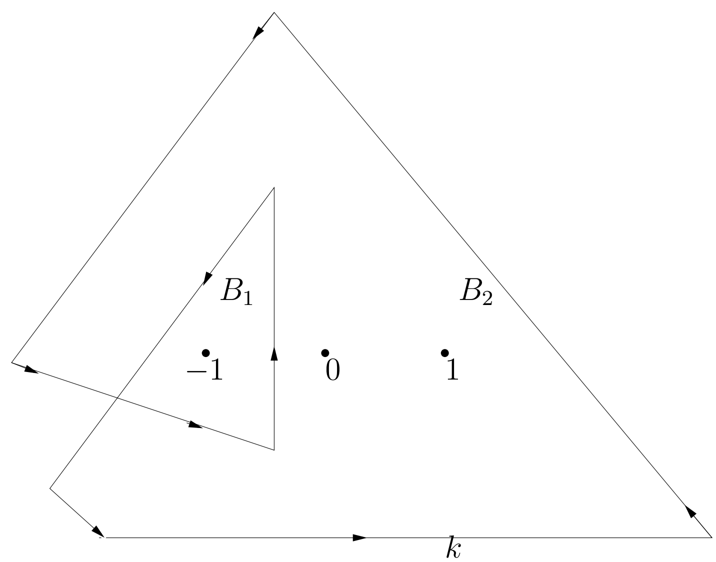
$$\int_k f(z)dz = \sum_{j=1}^{N} n_j \int_{\partial B_j} f(z)dz$$

en is de integraal $\int_k f(z)dz$ uiteindelijk toch te berekenen met de Residuen Stelling.

Hoe dit werkt illustreren we met enkele voorbeelden

Voorbeelden.

5. Neem de volgende kromme k , eenmaal in de aangegeven richting doorlopen.



Er zijn verschillende manieren om k te schrijven als lineaire combinatie van randen van open begrensde delen van $\mathbb{C}$. Nemen we, bijvoorbeeld, voor B_1 het gebied in de binnenste driehoek en voor B_2 het gebied tussen de binnenste driehoek en de buitenrand, dan is

$$k = \partial B_2 \cup 2 \times \partial B_1.$$

Dus is

$$\int_k \frac{dz}{z^2-1} \quad = \quad \int_{\partial B_2} \frac{dz}{z^2-1} + 2 \times \int_{\partial B_1} \frac{dz}{z^2-1}$$

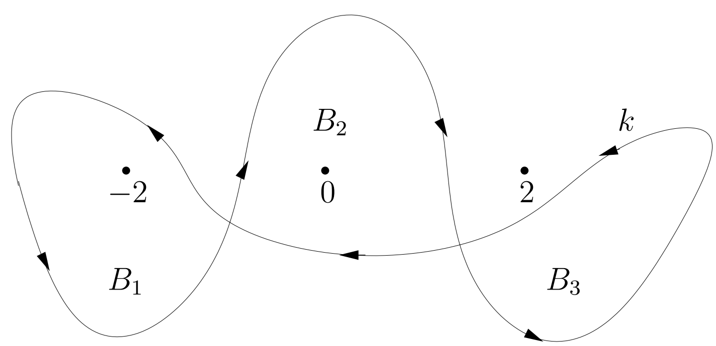
$$
\begin{aligned}
&= 2\pi i \,\mathrm{Res}_1\,(\frac{1}{z^2-1}) + 2\times 2\pi i\,\mathrm{Res}_{-1}\,(\frac{1}{z^2-1})\\
&= 2\pi i \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z^2-1} + 4\pi i \lim_{z\to -1}\frac{z+1}{z^2-1}\\
&= 2\pi i \lim_{z\to 1}\frac{1}{z+1} + 4\pi i \lim_{z\to -1}\frac{1}{z-1}\\
&= -\pi i.
\end{aligned}
$$

Bedenk zelf nog een andere manier om k te schrijven als lineaire combinatie van randen van open begrensde delen van $\mathbb{C}$ en bereken daarmee $\int_k \frac{dz}{z^2-1}$. Merk op dat ook de tweede berekening geeft

$$\int_k \frac{dz}{z^2-1} = 1\times 2\pi i\,\mathrm{Res}_1\,(\frac{1}{z^2-1}) + 2\times 2\pi i\,\mathrm{Res}_{-1}\,(\frac{1}{z^2-1})$$

en dat de coëfficiënten 1 voor Res_1 en 2 voor Res_{-1} overeenkomen met het feit dat de kromme k eenmaal in positieve richting om het punt 1 draait en tweemaal om -1.

6. Neem de volgende kromme k , eenmaal in de aangegeven richting doorlopen.



Dus

$$k = \partial B_1 \cup (-\partial B_2) \cup \partial B_3$$

en

$$\int_k \frac{dz}{z(z-2)(z+2)} =$$

$$= \int_{\partial B_1}\frac{dz}{z(z-2)(z+2)} - \int_{\partial B_2}\frac{dz}{z(z-2)(z+2)} + \int_{\partial B_3}\frac{dz}{z(z-2)(z+2)}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi i \ \mathrm{Res}_{-2}\,(\frac{1}{z(z-2)(z+2)}) \ - \ 2\pi i \ \mathrm{Res}_{0}\,(\frac{1}{z(z-2)(z+2)}) \ + \ 0 \\
&= 2\pi i \times \frac{1}{8} - 2\pi i \times \frac{1}{-4} \\
&= \frac{3\pi i}{4}.
\end{aligned}
$$

15 De logaritmische funktie

Voor ieder positief reëel getal x heeft de vergelijking

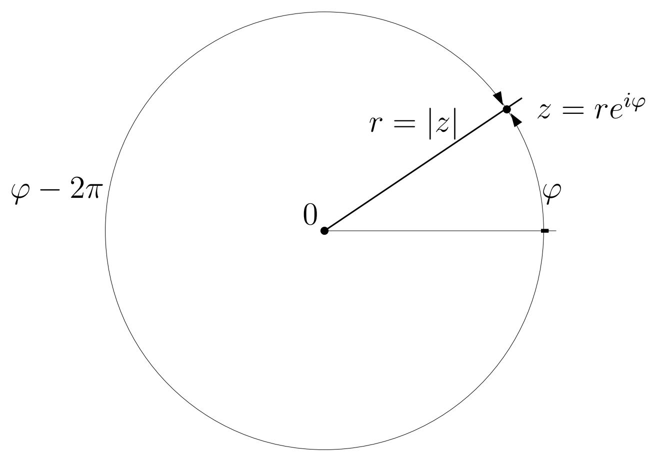
$$e^w = x$$

precies één reële oplossing w. Deze oplossing noemt men de (natuurlijke) logaritme van x; genoteerd als $\log x$. Zo krijgen we de *reële logaritmische funktie*

$$\log\ :\ \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}\ , \qquad x \mapsto \log x.$$

Dit komt er dus op neer dat we de *reële logaritmische funktie* definiëren als de *inverse funktie van de exponentiële funktie.*

Ieder complex getal $z \neq 0$ kan men schrijven in de vorm $z = re^{i\varphi}$ met $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Daarbij is in feite $r = |z|$, de absolute waarde van z.



Gebruiken we voor $|z|$ de bovenstaande (reële) logaritme, dan vinden we

$$z = e^{\log|z| + i\varphi}.$$

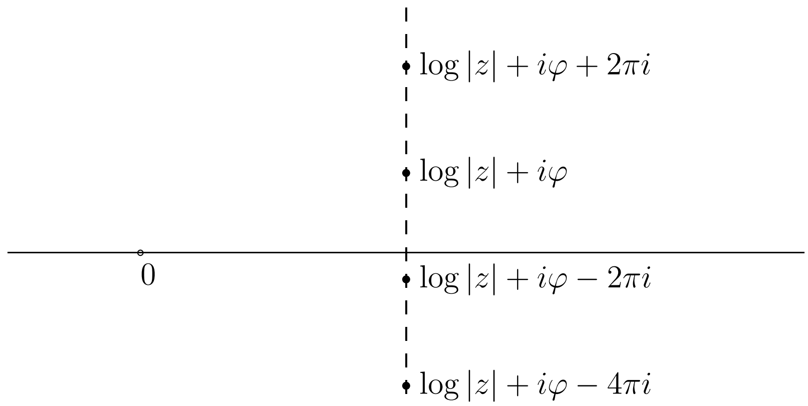
Voor elke $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, heeft de vergelijking

$$e^w = z \tag{104}$$

dus *minstens* een oplossing, namelijk $w = \log|z| + i\varphi$. Omdat voor elk geheel getal k

$$e^{\log|z| + i(\varphi + 2k\pi)} = e^{\log|z| + i\varphi} e^{2k\pi i} = e^{\log|z| + i\varphi}$$

heeft de vergelijking (104) zelfs oneindig veel oplossingen. Anderzijds is, als $e^{w_1} = e^{w_2} = z$, dan is $e^{w_1 - w_2} = 1$ en dus $w_1 - w_2 = 2k\pi i$ voor een of ander geheel getal k.



De verzameling oplossingen van vergelijking (104) bestaat dus weliswaar uit meer dan één element, maar is verder heel overzichtelijk: *alle oplossingen hebben hetzelfde reële deel* $\log|z|$ *terwijl de imaginaire delen een geheel veelvoud van* 2π *verschillen.*

Omdat de verzameling oplossingen van vergelijking (104) uit meer dan één element bestaat, is de exponentiële afbeelding

$$\exp\,:\,\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

wel surjektief, maar niet injektief. In het bijzonder *heeft de exponentiële afbeelding geen inverse.*

Anderzijds laten de bovenstaande beschouwingen zien dat de vergelijking (104) precies één oplossing w heeft die ook nog voldoet aan de extra voorwaarde $-\pi < \operatorname{Im} w \leq \pi$. Of algemener, bij gegeven $\alpha \in \mathbb{R}$ heeft de vergelijking (104) precies één oplossing in de strook

$$\{w \in \mathbb{C} \mid \alpha - \pi < \operatorname{Im} w \leq \alpha + \pi\}.$$

Nog anders gezegd, de (beperkte) exponentiële afbeelding

$$\exp\,:\,\{w \in \mathbb{C} \mid \alpha - \pi < \operatorname{Im} w \leq \alpha + \pi\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

is bijektief (d.w.z. surjektief en injektief), en heeft dus wel een inverse

$$\log_\alpha\,:\mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \{w \in \mathbb{C} \mid \alpha - \pi < \operatorname{Im} w \leq \alpha + \pi\}.$$

Er zijn dus veel complexe logaritmische funkties: voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ is er een. De funktie

$$\log_0 : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \{w \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Im} w \leq \pi\}$$

noemt men *de hoofdwaarde van de logaritme.*

In plaats van te spreken van verschillende logaritmische funkties spreekt men liever van verschillende *takken van de logaritmische funktie* (engels: branches of the logarithmic function). Men zegt ook wel dat de logaritme een *meerwaardige funktie* is.

Voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ is

$$\operatorname{Re} \log_\alpha(z) = \log |z|.$$

We definiëren het *argument van z* horend bij de tak van de logaritme $\log_\alpha$ door

$$\arg_\alpha(z) = \operatorname{Im} \log_\alpha(z).$$

Op een geheel veelvoud van 2π na is dit argument dus de hoek tussen de positieve reële as en het lijnstuk $[0z]$.
Met deze definitie hebben we ook de formule

$$\log_\alpha(z) = \log |z| + i \arg_\alpha(z).$$

De funktie

$$\log_\alpha : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \{w \in \mathbb{C} \mid \alpha - \pi < \operatorname{Im} w \leq \alpha + \pi\}$$

is niet continu, maar vertoont een *sprongdiscontinuïteit* langs de halve lijn

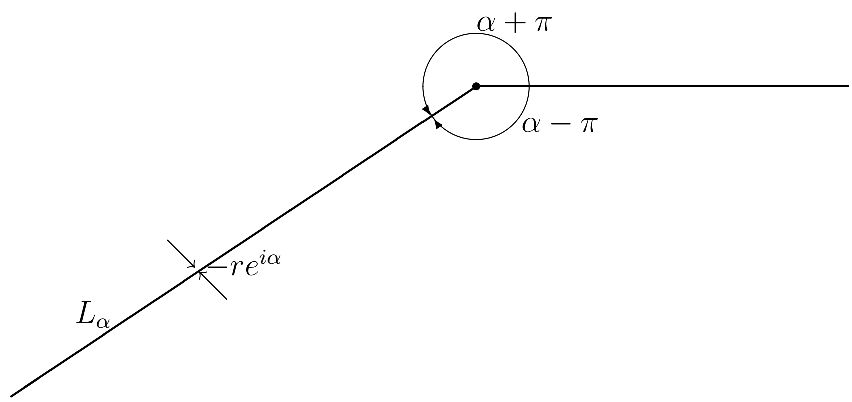
$$L_\alpha := \{-re^{i\alpha} \mid r \geq 0\};$$

immers voor vaste $r \in \mathbb{R}_{>0}$ is

$$\lim_{\varphi \downarrow \alpha - \pi} re^{i\varphi} = \lim_{\varphi \uparrow \alpha + \pi} re^{i\varphi} = -re^{i\alpha}$$

terwijl

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \downarrow \alpha - \pi} \log_\alpha(re^{i\varphi}) &= \log r + i\alpha - i\pi \\ \lim_{\varphi \uparrow \alpha + \pi} \log_\alpha(re^{i\varphi}) &= \log r + i\alpha + i\pi \end{aligned}$$



Op $\mathbb{C}\backslash L_\alpha$ echter is de funktie $\log_\alpha$ wel continu, zelfs complex differentieerbaar, omdat het de inverse funktie is van de exponentiële funktie. Uit

$$z = e^{\log_\alpha z}$$

volgt door te differentiëren

$$1 = \frac{d}{dz}\left(e^{\log_\alpha z}\right) = e^{\log_\alpha z}\frac{d}{dz}\log_\alpha z = z\frac{d}{dz}\log_\alpha z.$$

Dus

$$\frac{d}{dz}\log_\alpha z = \frac{1}{z} \tag{105}$$

Samenvattend: *Voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ hebben we op de open deelverzameling $\mathbb{C}\setminus L_\alpha$ in $\mathbb{C}$ de complex differentieerbare funktie $\log_\alpha$ en de afgeleide van deze funktie is de funktie $\frac{1}{z}$.*

Voor iedere weg γ in $\mathbb{C}\setminus L_\alpha$ (een weg dus die de halve lijn L_α niet snijdt) geldt nu volgens Stelling 10.4

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \log_\alpha p \,-\, \log_\alpha q\,, \tag{106}$$

waarbij p resp. q het eind- resp. beginpunt van γ is.

Algemeen geldt, vanwege de Residuen Stelling, voor een weg γ waarvan het beginpunt q en het eindpunt p niet op L_α liggen

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = \log_\alpha p \,-\, \log_\alpha q \,+ 2k\pi i, \tag{107}$$

waarbij k het "aantal keren is dat γ om 0 draait" geteld met oriëntatie. Als alle snijpunten van γ met L_α enkelvoudig zijn, kan men k ook berekenen als

$$k = \sum_{P \in \gamma \cap L_\alpha} \text{teken}(P),$$

een som over alle snijpunten van γ met L_α, waarbij het teken van zo'n snijpunt $+1$ of -1 is, afhankelijk van of γ L_α van rechts naar links of van links naar rechts snijdt, zoals aangegeven in het onderstaande plaatje:

teken $\qquad +1 \qquad\qquad -1$

Tot slot merken we nog op dat als α niet een *oneven* veelvoud van π is, het punt 1 niet op de halve lijn L_α ligt en $\log_\alpha$ in de buurt van 1 een analytische funktie is met machtreeksontwikkeling

$$\log_\alpha(z) = 2k\pi i + \sum_{n\geq 1} \frac{(1-z)^n}{n} \tag{108}$$

waarbij het *gehele getal* k is bepaald door

$$2k\pi \leq \alpha < (2k+2)\pi;$$

inderdaad voor $n \geq 1$ is

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \log_\alpha(z)\bigg|_{z=1} = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{z^n}\bigg|_{z=1} = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Opgaven

1. Beschouw de funktie $f(z) = e^z$ op $\mathbb{C}$, ofwel $F(x, y) = (e^x \cos y,\, e^x \sin y)$ op $\mathbb{R}^2$. Schets het beeld van de lijn $y = x$ onder F.

2. We bekijken de functie $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ gegeven door $f(z) = \left(\dfrac{\bar{z}}{z}\right)^2$.

   (a) Laat zien dat $\lim\limits_{z \to 0,\, z \in \mathbb{R}} f(z) = 1$.

   (b) Onderzoek $\lim\limits_{z \to 0,\, z \in i\mathbb{R}} f(z)$.

   (c) Onderzoek $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$.

3. Van een funktie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ is gegeven dat zowel f als $\overline{f} : z \mapsto \overline{f(z)}$ complex differentieerbaar zijn. Wat betekent dit voor f, gelet op de Cauchy-Riemann vergelijkingen?

4. Bepaal in de onderstaande gevallen alle punten $z = x + iy \in \mathbb{C}$ waarin de funktie f complex differentieerbaar is en bepaal in die punten $f'(z)$.

   (a) $f(z) = (1 - 4z^2)^8$;

   (b) $f(x + iy) = \frac{x+iy}{x^2+y^2}$;

   (c) $f(z) = (z^2 + 3iz - 2)^{-1}$;

   (d) $f(x + iy) = x + y + i(\sin x + \cos y)$.

5. Toon aan dat de afbeeldingen $z \mapsto \text{Re}\, z$, $z \mapsto \text{Im}\, z$, $z \mapsto |z|$ in geen enkel punt z complex differentieerbaar zijn.

6. (a) Geef een parametrisering van het lijnstuk tussen $1 - i$ en $2 + 2i$. Bereken daarmee de lijnintegraal

$$\int_{1-i}^{2+2i} \cos z \, dz;$$

   (b) Geef een parametrisering van het lijnstuk tussen 1 en $2i$. Bereken daarmee de lijnintegraal

$$\int_{1}^{2i} (z^2 - 2\sin z)\, dz.$$

7. Bereken de integraal $\int_C \overline{z}\, dz$, waarbij C een der volgende krommen met beginpunt 0 en eindpunt $4+2i$ is:

   (a) C wordt geparametrizeerd door $\sigma(t) = t^2 + it \;\; (0 \leq t \leq 2)$;

   (b) C is de vereniging van het lijnstuk van 0 tot $2i$ en het lijnstuk van $2i$ tot $4+2i$.

8. Zij C het deel van de kromme $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ dat de punten $1+i$ en $2+3i$ verbindt. Bereken de integraal

$$\int_C (12z^2 - 4iz)\, dz.$$

9. Bereken de integraal $\int_C z^2 \sin(4z)\, dz$ met C het in $\operatorname{Im} z \geq 0$ gelegen deel van de positief georiënteerde cirkel met middelpunt π en straal π.

10. Bereken de integraal $\int_C (z+2)e^{iz}\, dz$ met C het deel van de parabool $\pi^2 y = x^2$ dat het punt 0 met het punt $\pi + i$ verbindt.

11. Laat D de cirkelschijf met straal r en middelpunt α in het complexe vlak zijn.

    Toon aan dat voor een, op een open omgeving van $\overline{D}$ gedefinieerde, complex differentieerbare funktie f geldt:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha + re^{it}) dt.$$

    In woorden: $f(\alpha)$ is de gemiddelde waarde van f over de cirkel ∂D.

12. Geef de machtreeksontwikkeling van de funktie $f(z) = (1+z^2)^{-1}$ rond het punt $z = 1$. Wat is de convergentiestraal van de gevonden reeks?

13. Geef de eerste vier termen van de machtreeksontwikkeling van de funktie $f(z) = (1+z^3)^{-1}$ rond de punten: $z = 0$ en $z = 1$. Wat is de convergentiestraal van de betreffende machtreeks?

14. Bepaal de eerste vier termen van de Taylorreeks van

    (a) $\frac{1}{e^z+3}$ in de buurt van $z = 0$;

    (b) $\frac{z}{z^2-1}$ in de buurt van $z = i$;

(c) $\frac{z}{(z+1)^3}$ in de buurt van $z = 0$.

Bepaal voor elk van de reeksen de convergentiestraal.

15. Bepaal de volgende limieten:

    (a) $\lim_{z \to 0} \dfrac{(e^{\sin z} - 1)^3}{\sin z - z}$;

    (b) $\lim_{z \to 0} \dfrac{e^{\cos z} - e^{1-z^2}}{\sin^2 z}$.

16. Bereken de volgende integralen, waarbij de contour $C : |z| = 1$ eenmaal in positieve zin wordt doorlopen:

    (a) $\int_C (z^2 - \sin z)\, dz$;

    (b) $\int_C \frac{\sin z}{z}\, dz$;

    (c) $\int_C \frac{\sin z}{(z+4)^2}\, dz$;

    (d) $\int_C \frac{\cosh z}{z}\, dz$;

    (e) $\int_C \frac{\sin z}{z^2}\, dz$;

    (f) $\int_C \frac{e^z}{z^5}\, dz$.

17. **Korte versie**

    We beschouwen de rechthoek $D = \{z \in \mathbb{C};\ |x| \leq 2,\ |y| \leq 1\}$. Bereken de integraal

$$\int_{\partial D} \frac{z+4}{z-4} \frac{e^z}{\sin z}\, dz.$$

17. **Uitgebreide versie**

    We willen de integraal

$$\int_{\partial V} \frac{z+4}{z-4} \frac{e^z}{\sin z}\, dz.$$

bereken, waarbij V de rechthoek $\{z \in \mathbb{C} \mid |x| < 2,\ |y| < 1\}$ is.

(a) Definieer de funktie $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ door $g(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ voor $z \neq 0$ en $g(0) = 1$. Laat zien dat g een complex differentieerbare funktie is op het hele complexe vlak $\mathbb{C}$.

Bepaal alle nulpunten van g in $\mathbb{C}$.

(b) Bekijk de funktie

$$f(z) = \frac{z+4}{z-4}\,\frac{ze^z}{\sin z}.$$

Laat zien dat f een analytische funktie is op de open rechthoek $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |x| < 3,\ |y| < 2\}$.

(c) Neem nu de schijf $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \frac{1}{2}\}$ en laat $B = V \setminus \overline{D}$. Teken een plaatje van de situatie.

Laat m.b.v. de stelling van Cauchy zien dat

$$\int_{\partial B} \frac{f(z)}{z}\, dz = 0.$$

Laat zien dat

$$\int_{\partial V} \frac{f(z)}{z}\, dz = \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z}\, dz.$$

(d) Bereken $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z}\, dz$ met de integraalformule van Cauchy.

(e) Bereken $\displaystyle\int_{\partial V} \frac{z+4}{z-4}\,\frac{e^z}{\sin z}\, dz$

18. Beschouw de negatief georiënteerde cirkel $C : |z| = 3$. Bereken de integraal

$$\int_C \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)}\, dz.$$

19. Geef de Laurentreeksontwikkeling van de funktie $f(z) = (z-1)^{-1}$ naar machten van z op de gebieden $0 < |z| < 1$ en $|z| > 1$.

20. Geef de Laurentreeksontwikkeling van de funktie $f(z) = (\cos z)^{-1}$ naar machten van $z - \frac{\pi}{2}$ op de gereduceerde omgeving $0 < |z - \frac{\pi}{2}| < \pi$.

21. Geef de eerste vijf termen van de Laurentreeksontwikkeling rond $z = 0$ van de volgende funkties. Op welk gebied convergeert deze Laurentreeks?

(a) $\displaystyle\frac{1}{z^2 \sinh z}$ (b) $\displaystyle\frac{1}{2(z^3+z)}$

22. De funktie $F(z) = \frac{e^z}{z(z^2+1)}$ heeft een Laurentreeksontwikkeling op een gereduceerde omgeving van $z = 0$. Geef de eerste vier termen en het geldigheidsgebied.

23. Ontwikkel de funktie $F(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ naar machten van z in de gebieden:

$$\text{(a)} \quad |z| < 1, \quad \text{(b)} \quad 1 < |z| < 3, \quad \text{(c)} \quad |z| > 3.$$

24. Bepaal voor de onderstaande complexe funkties de aard van de singulariteiten en bereken de residuen:

    (a) $$\frac{z}{(z-1)(z+1)^2},$$

    (b) $$\frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)},$$

    (c) $$\frac{e^z}{\sin^2 z}.$$

25. Gegeven is een complexe funktie $f(z)$ die in het punt $\alpha \in \mathbb{C}$ een pool van de orde m heeft. Bewijs dat:

$$\operatorname{Res}_\alpha(f) = \lim_{z \to \alpha} \frac{1}{(m-1)!} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} [(z-\alpha)^m f(z)].$$

26. Bereken het residu in $z = 0$ van de funktie: $F(z) = z^{-3} \cot z \coth z$.

27. Bereken de volgende integralen:

    (a) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$,

    (b) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta}$.

28. Bereken de volgende integralen:

    (a) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2}\, dx$,

    (b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\, dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}$,

    (c) $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2+1}\, dx \qquad (a > 0)$.

29. De eerste twee onderdelen van de nu volgende opgave dienen ter voorbereiding op de laatste twee.

    (a) Toon aan dat voor alle $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ geldt: $\frac{2}{\pi} t \le \sin t \le t$. (Maak een plaatje!)

    (b) Toon aan dat $\int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \sin 2t}\, dt \le \frac{\pi}{4R^2}$ voor alle $R > 0$.

(c) Bepaal de integraal $\int_0^\infty e^{ix^2} dx$ door gebruik te maken van de residuenstelling. Hint: integreer over de rand van de cirkelsector $S = \{re^{i\varphi};\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le r \le R\}$, en laat $R \to \infty$.

(d) Bereken de integralen van Fresnel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2)\, dx, \qquad \text{en} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2)\, dx.$$

30. **Korte versie**
Bereken de integraal

$$\int_{\partial V} \frac{\sinh 3z}{(z - \pi/4)^3}\, dz$$

waarbij V het vierkant met hoekpunten $\pm 2 \pm 2i$ is.

30. **Uitgebreide versie**
We willen de integraal

$$\int_{\partial V} \frac{\sinh 3z}{(z - \frac{\pi}{4})^3}\, dz$$

berekenen, waarbij V het vierkant met hoekpunten $\pm 2 \pm 2i$ is.

Neem de schijf $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \frac{\pi}{4}| < 1\}$ en laat $B = V \setminus \overline{D}$. Teken een plaatje van de situatie.

(a) Laat zien dat $\dfrac{\sinh 3z}{(z - \frac{\pi}{4})^3}$ een analytische funktie is op $\mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{4}\}$.

(b) Bereken

$$\int_{\partial B} \frac{\sinh 3z}{(z - \frac{\pi}{4})^3}\, dz$$

(c) Bereken

$$\int_{\partial D} \frac{\sinh 3z}{(z - \frac{\pi}{4})^3}\, dz$$

m.b.v. formule (28).

(d) Bereken

$$\int_{\partial V} \frac{\sinh 3z}{(z - \frac{\pi}{4})^3}\, dz$$

31. **Korte versie**
Bereken de integraal
$$\int_{\partial V} \frac{2 + 3\sin \pi z}{z(z-1)^2}\, dz$$
waarbij V het vierkant met hoekpunten $\pm 3 \pm 3i$ is.

31. **Uitgebreide versie**
We willen de integraal
$$\int_{\partial V} \frac{2 + 3\sin \pi z}{z(z-1)^2}\, dz$$
berekenen, waarbij V het vierkant met hoekpunten $\pm 3 \pm 3i$ is.

(a) Bepaal de getallen a, b, c zo dat
$$\frac{1}{z(z-1)^2} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-1} + \frac{c}{(z-1)^2}$$

(b) Laat $D_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \frac{1}{3}\}$ en $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| < \frac{1}{3}\}$. Teken een plaatje van de situatie.

Bereken $\displaystyle\int_{\partial D_0} \frac{2 + 3\sin \pi z}{z(z-1)^2}\, dz$ en $\displaystyle\int_{\partial D_1} \frac{2 + 3\sin \pi z}{z(z-1)^2}\, dz$
met behulp van de breuksplitsing in onderdeel a., de stelling van Cauchy, de integraalformule van Cauchy en formule (28).

(c) Laat m.b.v. de stelling van Cauchy zien dat
$$\int_{\partial V} \frac{2 + 3\sin \pi z}{z(z-1)^2}\, dz = \int_{\partial D_0} \frac{2 + 3\sin \pi z}{z(z-1)^2}\, dz + \int_{\partial D_1} \frac{2 + 3\sin \pi z}{z(z-1)^2}\, dz.$$

(d) Bereken $\displaystyle\int_{\partial V} \frac{2 + 3\sin \pi z}{z(z-1)^2}\, dz$.

32. (a) Bepaal de Laurentreeksontwikkeling van $(z^2-3)^{-1}$ naar machten van z, en ook naar machten van $z - \sqrt{3}$, in het gebied $|z| < \sqrt{3}$;

(b) Bepaal de eerste vijf termen van de Laurentreeksontwikkeling van $(e^z - 1)^{-1}$ naar machten van z, in het gebied $0 < |z| < 2\pi$;

(c) Bepaal de Laurentreeksontwikkeling van $(z^3+4z)^{-1}$ naar machten van $z-2i$, in het gebied Re $z > 4$.

33. (a) Bewijs dat de funktie

$$f(z) = \frac{1}{2}z\cot\frac{1}{2}z$$

een ophefbare singulariteit heeft in $z = 0$.

(b) Laat zien dat de Laurentreeks van f in een gereduceerde omgeving van $z = 0$ van de vorm

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_n z^{2n}}{(2n)!}$$

is; bepaal B_0, B_1, B_2 en B_3.
De B_n heten *de getallen van Bernoulli.*

34. Bepaal de aard van de singuliere punten van de volgende funkties; bepaal in de geïsoleerde singuliere punten het residu.

(a) $\frac{1}{z(z^2+1)}$;

(b) $\frac{1}{(z^2+1)^2}$;

(c) $e^{z^{-1}}$;

(d) $\frac{1}{e^z-1}$;

(e) $\tan z$;

(f) $\sin\frac{1}{z}$;

(g) $\frac{1}{\sin z^{-1}}$;

(h) $\frac{1}{(z+1)^3}$.

35. Bereken met behulp van de residuenstelling de volgende integralen (a is een reëel getal, n is een natuurlijk getal):

(a) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\varphi}{a+\cos\varphi}d\varphi \quad (a > 1)$;

(b) $\int_0^{\pi} \frac{\cos 2\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}d\varphi \quad (|a| < 1)$;

(c) $\int_0^{2\pi} e^{\cos\varphi}\cos(n\varphi - \sin\varphi)d\varphi$;

(d) $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} \qquad (a > 0);$

(e) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+a^2} dx \qquad (a > 0);$

(f) $\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2} dx \qquad (a > 0);$

(g) $\int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^4+1} dx.$

36. Zij w de weg die ontstaat door de rand van de rechthoek met hoekpunten $-R, R, R+2\pi i$ en $-R+2\pi i$ te onderbreken door binnenwaarts beschreven halve cirkeltjes met middelpunten 0 en $2\pi i$ (en met voldoend kleine straal δ). Zij $0 < a < 1$; bereken

$$\int_0^\infty \frac{e^{ax} - e^{(1-a)x}}{e^x - 1} dx$$

door integratie van

$$\frac{e^{ax}}{e^z - 1}$$

over w.