Werkcollege-opgaven
Klassieke mechanica

Dr. G.J.H. Roelofs

2013-2014

Voorwoord

Het doel van deze werkcollegebundel is een aansluiting te maken tussen de mechanicahoofdstukken in het boek University Physics van Young en Freedman en het college Klassieke Mechanica. De bundel is nadrukkelijk niet bedoeld als een collegedictaat of vervanging/samenvatting van het boek. De opgaven zijn lastiger dan de opgaven in MasteringPhysics. De tentaminering is op het niveau van de bundel.

De huidige bundel is een herziene versie van de werkcollegebundel uit 2009 samengesteld door Dr. A.F.M. Arts en Prof. Dr. A.M.L. Kappers. Er zijn een aantal kortere opgaven toegevoegd om te oefenen met krachtendiagrammen en met situaties waarbij de centripetaalkracht een rol speelt, terwijl opgaven die betrekking hebben op veranderlijke krachten verwijderd zijn.

Een toegewijde student zou voor (bijna) alle opgaven een goede en mooie oplossing moeten kunnen geven. Hierbij moet opgemerkt worden dat een *mooi* antwoord niet alleen bestaat uit een vergelijking of een getal, maar het hele proces van oplossen weergeeft. Dit omvat een aantal systematische stappen[1]:

- Visualisatie en conceptvorming: wat gebeurt er? wat gaat er gebeuren?

- Tekenen van diagrammen, figuren en grafieken om te bepalen welke fysische principes op welke manier gebruikt moeten worden. Het papier is hierbij een verlengstuk van je hersenen dat je helpt bij het vinden van coordinaten en het uitwerken van een strategie. Het tekenen van "free body diagrams" (krachtendiagrammen), met daarin de verschillende krachten die uitgeoefend worden op verschillende voorwerpen, helpt om een groter en complex probleem te verdelen in kleinere en meer hanteerbare onderdelen.

- Identificatie (op grond van de voorgaande stappen) van de fysische principes die nodig zijn het probleem op te lossen. Dit betreft bijna altijd de Wetten, Theorema's en Principes uit de klassieke mechanica, bijvoorbeeld de drie wetten van Newton en de behoudswetten voor energie, impuls en impulsmoment.

- Na identificatie van de principes kan de oplossing geformuleerd worden. Vaak betekent dit dat de eerder gemaakte figuren *vertaald* worden naar vergelijkingen. Bijvoorbeeld: een krachtendiagram wordt omgezet naar de tweede wet van Newton, voor elke massa en elke coordinaat afzonderlijk.

- Nu is het zware werk eigenlijk gedaan, wat overblijft is het gebruik van algebra of andere wiskundige technieken (trigonometrie, differentiatie, integratie, oplossen van vergelijkingen) om een algebraïsche vergelijking te vinden die de vraag beantwoordt.

---

[1]) gebaseerd op R.G. Brown, Review Problems for Introductory Physics 1, Duke University, Durham (USA), 2013

- Het is nuttig om de eenheden van het antwoord te controleren. De meeste grootheden zijn geassocieerd met eenheden (kg, m, s, ...) en het is eenvoudig na te gaan of het antwoord in de juiste eenheid staat. Als dat het geval is dan heb je *waarschijnlijk* geen grote fouten gemaakt (bijvoorbeeld delen in plaats van vermenigvuldigen). Een antwoord met onjuiste eenheden is echter altijd fout.

- Tot slot kunnen getallen (indien gegeven) worden ingevoerd in de gevonden vergelijking om numerieke antwoorden te bepalen.

Utrecht, juli 2013

Inhoudsopgave

1	De wetten van Newton	6
1.1	Krachtendiagrammen	7
1.2	Touwen, koorden en spankrachten	8
1.3	Normaalkrachten en wrijving	10
1.4	Extra oefenopgaven	11
2	Roterende systemen; arbeid en energie	13
2.1	Cirkelbeweging	14
2.2	Arbeid en energie	15
3	Energie, impuls en behoudswetten	17
3.1	Energie en energiebehoud	18
3.2	Impuls en impulsbehoud	19
3.3	Botsingen	21
3.4	Extra oefenopgaven	22
4	Traagheidsmoment en rotaties	24
4.1	Traagheidsmoment	25
4.2	Roteren om een vaste as	26
4.3	Rollen	28
5	Impulsmoment	29
5.1	Roteren en transleren	30
5.2	Kermisattractie	32
6	Newton's gravitatie en Keplerwetten	33
6.1	Satellieten	34
6.2	Gravitatiekracht	36
7	Harmonische oscillaties	39
7.1	Gekoppelde veersystemen	40
7.2	Trillingen om een evenwichtspunt	41
8	Differentiaalvergelijkingen	44
8.1	Introductie	44
8.2	Vallen in een constant zwaartekrachtveld	45

8.3 Afremmen door een wrijvingskracht 46
8.4 Een massa-veersysteem 47
8.5 Gedempte trilling 48

Hoofdstuk 1

De wetten van Newton



English physicist and mathematician who was born into a poor farming family. Luckily for humanity, Newton was not a good farmer, and was sent to Cambridge to study to become a preacher. At Cambridge, Newton studied mathematics, being especially strongly influenced by Euclid, although he was also influenced by Baconian and Cartesian philosophies. Newton was forced to leave Cambridge when it was closed because of the plague, and it was during this period that he made some of his most significant discoveries. With the reticence he was to show later in life, Newton did not, however, publish his results.

Bron biografie Newton: http://scienceworld.wolfram.com/biography/Newton.html

De opgaven in dit hoofdstuk gaan over toepassingen van de tweede en derde wet van Newton. In het bijzonder kijken we naar het toepassen van Newton's tweede wet:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{1.0.1}$$

Deze wordt toegepast in situaties waar meerdere krachten op een voorwerp met massa *m* werken. Essentieel is het dan om goed vast te stellen welke krachten op een voorwerp werken en in welke richting deze krachten staan. Een goed advies is om altijd tekeningen, zogenaamde "free body diagrams" te maken waarin alle krachten op het voorwerp met richting weergegeven worden. Belangrijk is hier het toepassen van de derde wet van Newton die zegt dat als een voorwerp *A* een kracht uitoefent op een voorwerp *B* dat dan *B* een even grote maar tegengesteld gerichte kracht uitoefent op *A*. Let er op dat deze krachten op verschillende voorwerpen werken! We zullen in dit hoofdstuk voornamelijk zogenaamde contactkrachten behandelen.

1.1 Krachtendiagrammen

1.1.1 Zitten op een stoel

Een persoon zit op een stoel, de stoel staat op de grond. Teken afzonderlijke krachtendiagrammen voor de persoon, de stoel en de aarde. Beschrijf elke kracht (bijv. zwaartekracht, wrijving, spankracht,..) en geef aan welk object de kracht uitoefent op welk object. Zorg dat de lengte van elke pijl de relatieve grootte van de kracht weergeeft. Identificeer alle paren die betrekking hebben op de Derde Wet.

1.1.2 Trekken aan een touw

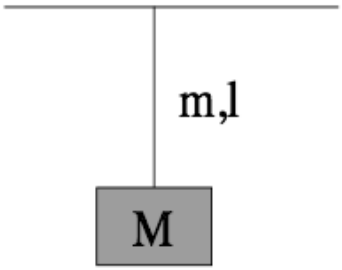
a) Een persoon staat op de grond in een schuur, en trekt verticaal omlaag aan een (niet massaloos) koord dat bevestigd is aan het plafond van de schuur. Teken afzonderlijke krachtendiagrammen voor de persoon, het koord, de schuur en de aarde. Beantwoord dan dezelfde vragen als onder 1.1.1.

b) Beantwoord a) nogmaals voor het geval de persoon aan het koord trekt onder een hoek van 45° met de vertikaal.

1.2 Touwen, koorden en spankrachten

1.2.1 Spankracht in een koord

Een blok met massa M hangt met een touw aan het plafond. De lengte van het touw is l en de massa m is gelijkmatig verdeeld over het touw. De versnelling door de zwaartekracht is g.



a) Teken de krachten op het blok en geef bij elk van die krachten aan door welk voorwerp deze wordt uitgeoefend.

b) Bepaal met behulp van vergelijking (1.0.1) hoe groot de kracht van het touw op het blok is.

c) Hoe zit het nu met het touw? Wat is er mis met de redenering dat het blok een kracht S_1 op het touw uitoefent en het plafond een kracht S_2 en dat dus volgens vergelijking (1.0.1) $S_2 - S_1 = ma = 0$, waaruit zou volgen dat $S_2 = S_1$?

d) Beschouw een klein stukje van het touw, lengte Δx, op een hoogte x ($0 < x < l$), boven het blok. Welke krachten werken er op dit kleine stukje touw? Welke kracht verdwijnt in de limiet dat $\Delta x \rightarrow 0$?

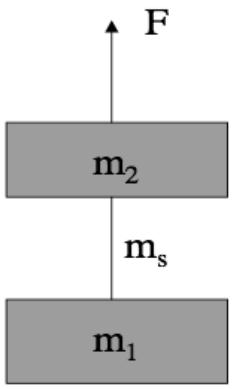
We zien hieruit dat in elk punt van het touw twee gelijke maar tegengesteld gerichte krachten werken. Deze kracht in het touw noemen we de *spankracht*.

e) Om de spankracht als functie van de hoogte x te berekenen beschouwen we het deelsysteem blok+het touw vanaf x naar beneden tezamen. Welke krachten werken op dit deelsysteem? Bepaal met behulp van vgl. (1.0.1) hoe groot de spankracht is in het touw op de hoogte x boven het blok?

f) Wat wordt de spankracht in het touw in het geval dat de massa van het touw verwaarloosbaar is, d.w.z. $m \ll M$?

1.2.2 Versneld koord

Beschouw nu twee blokken, met massa's m_1 en m_2, door een touw met massa m_s, homogeen verdeeld over het touw, met elkaar verbonden. Het geheel wordt door een een kracht F omhoog getrokken.



a) Teken de krachten op beide blokken en op het touw. Ga voor elke kracht na door welk lichaam deze kracht uitgeoefend wordt.

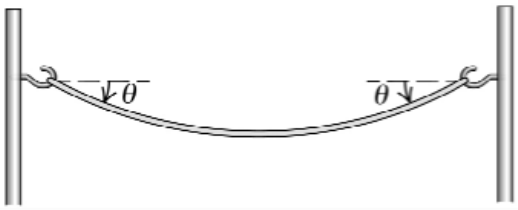
b) Bereken de versnelling van het gehele systeem.

c) Bereken de spankracht in het bovenuiteinde van het touw.

d) Bereken de spankracht halverwege het touw.

1.2.3 Touw tussen twee bomen

Ook op het eerste gezicht lastig lijkende problemen kunnen door het tekenen van krachtendiagrammen voor geschikt gekozen deelsystemen eenvoudig opgelost worden. Een touw met massa m, homogeen verdeeld, hangt tussen twee bomen. De uiteinden van het touw hangen op dezelfde hoogte en maken een hoek θ met de bomen. Bereken de spankracht T in het touw in de uiteinden en in het laagste punt. (Ter controle: als $\theta = \pi/4$ dan $T_{eind} = mg/\sqrt{2}$ en $T_{midden} = mg/2$).



1.3 Normaalkrachten en wrijving

De kracht uitgeoefend door een oppervlak in contact met een voorwerp kan in twee componenten verdeeld worden. De kracht loodrecht op het oppervlak wordt de normaalkracht genoemd, de kracht parallel aan het oppervlak wrijving. De maximale wrijvingskracht W is voor niet-samendrukbare materialen gelijk aan $W = \mu N$, met μ de wrijvingscoëfficient en N de normaalkracht. Let bij het toepassen van wrijving vooral op het woord *maximaal*! De werkelijke wrijvingskracht kan minder zijn.

1.3.1 Een blok

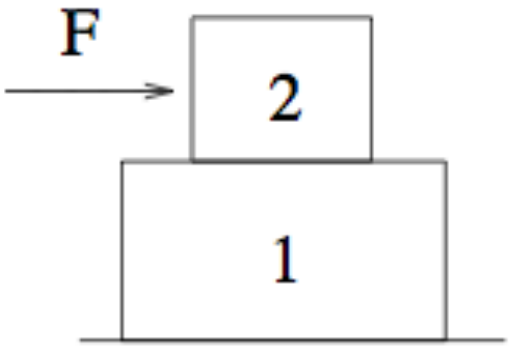
U duwt in horizontale richting tegen een blok dat op de tafel rust.

a) U duwt tegen het blok, maar niet hard genoeg om het te laten bewegen. Welke krachten werken op het blok?

b) U duwt wat harder en het blok begint te bewegen. Na een kort moment van op gang komen beweegt het blok met constante snelheid. Welke van de eerder genoemde krachten zijn op het moment dat het blok met constante snelheid beweegt veranderd?

c) Stel het blok heeft een massa van 0.4 kg en de wrijvingscoëfficient tussen blok en tafel μ is gelijk aan 0.3. Welke kracht is er nodig om het blok te laten bewegen met een constante snelheid? Hangt deze kracht van de snelheid af?

1.3.2 Twee blokken



Een blok met massa m_2 rust op een blok met massa m_1 dat op een wrijvingsloze tafel ligt. De wrijvingscoëfficient tussen de blokken is μ. Er wordt op het bovenste blok een kracht uitgeoefend parallel aan het oppervlak van de tafel.

a) Wat is de maximale kracht die op blok 2 uitgeoefend kan worden zonder dat blok 2 gaat slippen? Probeer eerst de vraag te beantwoorden zonder naar het vervolg te kijken, lukt dit niet volg dan de volgende stappen.

1. Als de kracht F klein genoeg is zal blok 2 niet over blok 1 slippen. Beide bewegen dan als één geheel. Met welke versnelling beweegt het geheel dan?

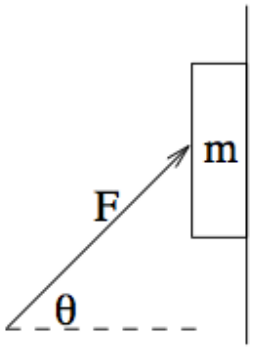
2. Pas nu de wetten van Newton toe op de blokken apart. Wat volgt hieruit voor de wrijvingskracht tussen de blokken?

3. Bereken nu de maximale kracht F die op blok 2 uitgeoefend kan worden zonder dat blok 2 gaat slippen.

b) Beschouw nu het geval dat de kracht F op blok 1 wordt uitgeoefend. Beantwoord dezelfde vragen als hierboven.

1.3.3 Een blok tegen de muur

Een blok met massa m wordt door een kracht F tegen een verticale muur geduwd. De wrijvingscoefficient tussen blok en muur is μ. De kracht F maakt een hoek θ ($0 < \theta < \pi/2$) met de normaal op het oppervlak van de muur (zie figuur).



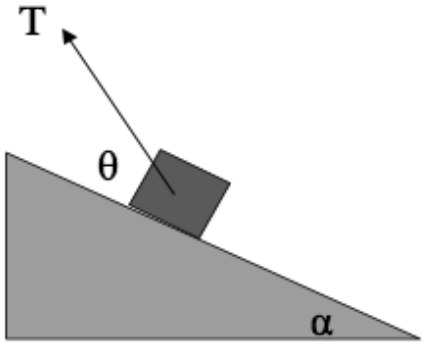
a) Bereken voor gegeven hoek θ de grootte van F waarbij het blok net niet valt.

b) Bereken bij welke waarde van θ deze kracht minimaal is.

c) Druk de bijbehorende waarde van F uit in m, g en μ.

1.4 Extra oefenopgaven

1.4.1 Een blok op een helling

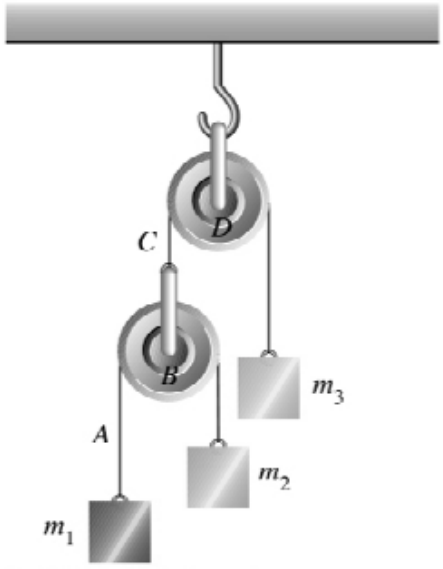


Een voorwerp met massa m wordt door een touw een helling opgesleurd. De spanning in het touw is T. De helling maakt een hoek α met de horizontaal en het touw maakt een hoek θ met de helling. De wrijvingscoëfficient tussen voorwerp en helling is μ.

a) Maak een krachtendiagram van de krachten die op het voorwerp werken. Ontbind de krachten in de richtingen parallel en loodrecht op de helling.

b) Toon aan, onder de voorwaarde dat het voorwerp in contact blijft met de helling, dat de versnelling van het voorwerp maximaal is als $\tan(\theta) = \mu$. Wat is hierbij de voorwaarde voor de hoek α?

1.4.2 Katrollenkermis



In het college werd een voorbeeld behandeld waarbij twee massa's via een massaloze, wrijvingsloze katrol met elkaar verbonden waren met een massaloos touw. De belangrijkste aspecten hierbij zijn dat de *spankrachten* aan beide kanten van de katrol even groot zijn, en het *schijnbare gewicht* van beide massa's ook. In deze opgave bekijken we een wat ingewikkelder systeem bestaande uit drie massa's en twee katrollen. De massa's zijn in het begin in rust, verder zijn de katrollen zonder wrijving en is hun massa verwaarloosbaar klein. Ook de koorden worden massaloos verondersteld.

a) Maak voor de drie massa's afzonderlijk een krachtendiagram en formuleer voor elke massa de tweede wet van Newton.

b) Maak voor katrol *B* een krachtenbalans op en leidt uit het gegeven dat de massa van deze katrol verwaarloosbaar klein is een relatie af tussen de spankrachten in de koorden verbonden met deze katrol.

c) Laat zien dat uit de geometrie volgt: $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + 2\vec{a}_3 = \vec{0}$.

d) In principe kunnen we het systeem nu volledig oplossen omdat we 5 onafhankelijke vergelijkingen hebben met 5 onbekenden, ga dit na! Fysisch is het probleem hiermee opgelost, de rest is algebra. Om het rekenwerk te beperken nemen we $m_2 = 2m_1$ en $m_3 = \frac{8}{5}m_1$. Bereken de grootte en richting van de versnellingen van de massa's en de spankrachten in de koorden.

Hoofdstuk 2

Roterende systemen; arbeid en energie

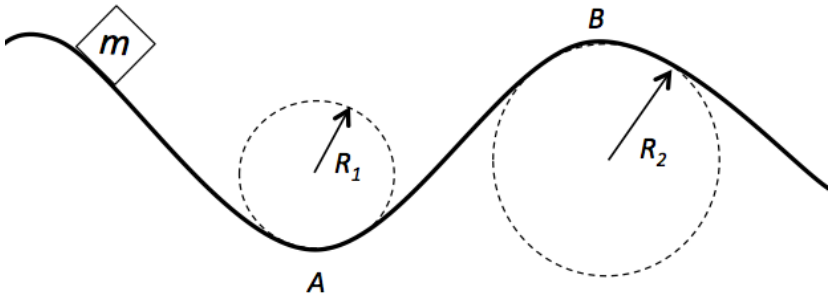
Newton invented a scientific method which was truly universal in its scope. Newton presented his methodology as a set of four rules for scientific reasoning. These rules were stated in the Principia and proposed that (1) we are to admit no more causes of natural things such as are both true and sufficient to explain their appearances, (2) the same natural effects must be assigned to the same causes, (3) qualities of bodies are to be esteemed as universal, and (4) propositions deduced from observation of phenomena should be viewed as accurate until other phenomena contradict them.

These four concise and universal rules for investigation were truly revolutionary. By their application, Newton formulated the universal laws of nature with which he was able to unravel virtually all the unsolved problems of his day. Newton went much further than outlining his rules for reasoning, however, actually describing how they might be applied to the solution of a given problem. The analytic method he invented far exceeded the more philosophical and less scientifically rigorous approaches of Aristotle and Aquinas. Newton refined Galileo's experimental method, creating the compositional method of experimentation still practiced today.

2.1 Cirkelbeweging

Wanneer een voorwerp met massa m een uniforme cirkelbeweging met straal R aflegt moet er een kracht werken die het voorwerp steeds richting het middelpunt afbuigt. Dit is de zogenaamde *centripetale* kracht, die een grootte heeft van $F = ma_{rad} = mv^2/R$, waarin a_{rad} de radiale versnelling is. De radiale versnelling staat loodrecht op de snelheid, en is naar het middelpunt gericht. Afhankelijk van de situatie wordt de centripetale kracht geleverd op verschillende manieren, bijvoorbeeld door een touw of een veer, of door de zwaartekracht of een normaalkracht.

2.1.1 Achtbaan



Een achtbaankarretje met passagiers heeft massa m en legt een baan af als getekend in de figuur. De massa kan als puntmassa opgevat worden.

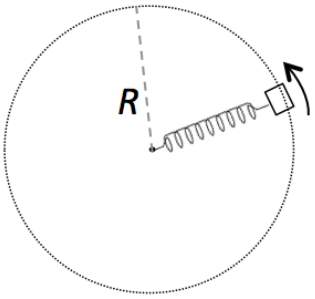
a) In punt A heeft het karretje een snelheid v_A. Wat is de kracht die door de baan op het karretje wordt uitgeoefend?

b) Wat is de maximale snelheid waarbij het karretje op punt B nog net contact met de baan houdt?

2.1.2 Vertikaal draaien

Een massa m is bevestigd aan het uiteinde van een koord met lengte R, en beschrijft een vertikale cirkelbeweging rondom het andere uiteinde. Bepaal de spankracht in het koord *voor elk punt* op de cirkel. Neem aan dat de massa een snelheid v heeft.

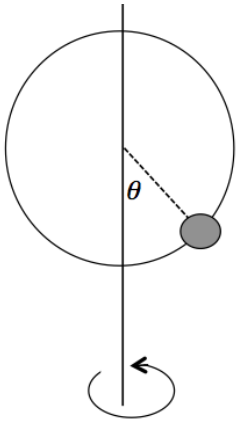
2.1.3 Rotatie aan een veer



Een massa m draait, verbonden aan een massaloze veer, rondjes op een wrijvingsloze tafel (zie figuur hiernaast, van boven gezien). De lengte van de veer is l_0 wanneer hij niet uitgetrokken wordt, de veerconstante is k. De schijf draait rond met frekwentie f (omwentelingen per tijdseenheid). Bepaal de straal R van de uniforme cirkelbeweging.

2.1.4 Kraal aan hoepel

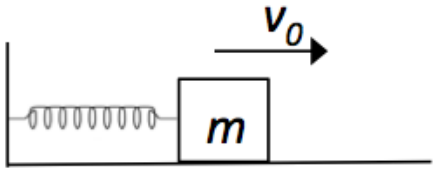
Een kraal kan met verwaarloosbare wrijving bewegen over een verticale hoepel met straal R. De hoepel, die altijd verticaal staat, draait om een verticale as met een periode T. De hoek θ is de hoek tussen de verticale as en de kraal. Geef een uitdrukking voor θ waarbij de kraal in evenwicht is, in g, R en T.



2.2 Arbeid en energie

2.2.1 Kracht en arbeid

Een blok met massa m staat op een tafel en is bevestigd aan een horizontale veer. In de beginsituatie heeft het blok een snelheid v_0 en oefent de veer geen kracht op het blok uit. Het blok beweegt naar rechts over een afstand l en staat dan stil. De veerconstante is k, de kinetische wrijvingscoefficient tussen tafel en blok is μ_k.



a) Hoeveel werk is er door de wrijvingskracht verricht gedurende de verplaatsing l?

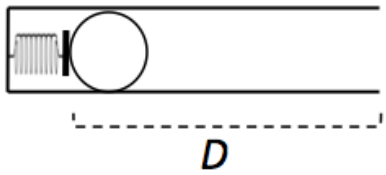
b) Hoeveel werk is er door de veer verricht gedurende de verplaatsing l?

c) Welke andere krachten werken op M en hoeveel arbeid verrichten ze?

d) Hoeveel arbeid is er in totaal op het blok verricht?

e) Druk l uit in M, v_0, μ_k, g en k.

2.2.2 Kogel in een loop



De figuur bevat een eenvoudige schets van een systeem waarmee een kogel door middel van een ingedrukte, massaloze springveer in beweging wordt gezet. Als de veer wordt losgelaten duwt hij de kogel (met massa *m*) door de wrijvingsloze loop, helemaal tot het eind. De kracht die de veer uitoefent wordt gegeven door:

$$F = \frac{F_0}{D^2} x^2$$

met *D* de lengte van de loop, en *x* de indrukking van de veer gemeten *vanaf het uiteinde* van de loop.

a) Geef een uitdrukking voor de arbeid die door de veer wordt verricht terwijl de kogel versneld door de loop beweegt.

b) Bereken de kinetische energie van de kogel aan het uiteinde van de loop, en de snelheid waarmee hij de loop verlaat.

Hoofdstuk 3

Energie, impuls en behoudswetten

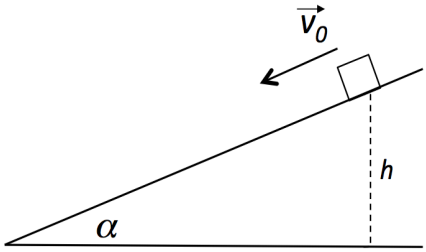
In Book I of Principia, Newton opened with definitions and the three laws of motion now known as Newton's laws (laws of inertia, action and reaction, and acceleration proportional to force). Book II presented Newton's new scientific philosophy which came to replace Cartesianism. Finally, Book III consisted of applications of his dynamics, including an explanation for tides and a theory of lunar motion. To test his hypothesis of universal gravitation, Newton wrote Flamsteed to ask if Saturn had been observed to slow down upon passing Jupiter. The surprised Flamsteed replied that an effect had indeed been observed, and it was closely predicted by the calculations Newton had provided. Newton's equations were further confirmed by observing the shape of the Earth to be oblate spheroidal, as Newton claimed it should be, rather than prolate spheroidal, as claimed by the Cartesians. Newton's equations also described the motion of Moon by successive approximations, and correctly predicted the return of Halley's Comet.

Behoudswetten spelen in de klassieke mechanica (en in de natuurkunde in het algemeen) een zeer belangrijke rol. Met behulp van zulke wetten kan vaak al zeer veel over het gedrag van een systeem gezegd worden, zelfs zonder de oplossing van de bewegingsvergelijking voor dat systeem te kennen. In dit hoofdstuk komen de behoudswetten voor energie en impuls aan de orde. In een later hoofdstuk zal ook nog een derde belangrijke behoudswet aan de orde komen, namelijk de wet van behoud van impulsmoment.

3.1 Energie en energiebehoud

3.1.1 Massa op een helling

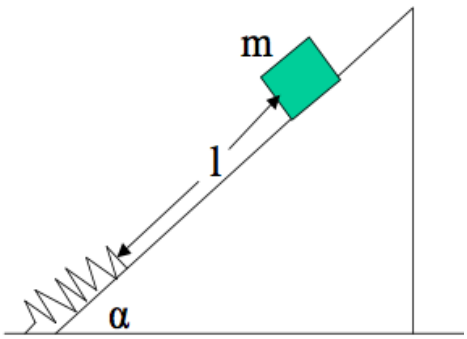
Een kist (massa m) beweegt met een beginsnelheid v_0 naar beneden op een helling met hoek α, vanaf een hoogte h. De wrijvingscoëfficient tussen de kist en de helling heeft grootte μ.



a) Teken het volledige krachtendiagram voor de kist. Schrijf de krachtvergelijkingen in de x- en y-richting op; druk hierbij de grootte van de krachten uit in (een of meer van) de gegeven grootheden m, v_0, h, α, μ, g.

b) Hoe groot moet v_0 minimaal zijn zodat de kist de onderkant van de helling bereikt? Druk je antwoord weer uit in de gegeven grootheden.

3.1.2 Massa op een helling met een veer



Een massa m wordt losgelaten op een helling op een afstand l van een massaloze veer vastgemaakt onderaan de helling. De wrijvingscoëfficient tussen massa en helling is μ, de hellingshoek is α, de veerconstante is k.

a) Onder welke voorwaarde(n) begint het blok naar beneden te schuiven?

b) Ga onder die voorwaarden na hoe groot de snelheid is van de massa op het moment dat het de veer raakt? Los dit op met een energiebeschouwing.

c) Hoe groot is de maximale indrukking van de veer? Laat voor het gemak de wrijving buiten beschouwing wanneer het blok en de veer contact hebben, dit geldt ook voor onderdeel d)

d) De massa veert terug de helling op. Hoe dicht komt de massa bij zijn uitgangspositie? Neem hierbij aan dat de veer massaloos is.

e) Waarom is de laatstgenoemde aanname noodzakelijk?

3.1.3 Deeltje in een potentiaalveld

Een deeltje beweegt langs de positieve x-as in een krachtveld waarvoor de volgende potentiële energie-functie geldt:

$$U(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{b}{x}$$

a) Geef een uitdrukking voor de kracht $F(x)$ die het deeltje ondervindt.

b) Maak een schets van de potentiële energie als functie van x.

c) De totale energie van het deeltje is $E_{tot} = -b$. Geef in je schets aan welke waarden van x toegestaan dan wel verboden zijn.

d) Bereken indien aanwezig de waarden voor x waarbij het deeltje in een stabiel of een instabiel evenwicht verkeert.

3.2 Impuls en impulsbehoud

3.2.1 Schaatser op het ijs

In deze opgave beschouwen we systemen die in onderlinge interactie zijn. We beginnen met een betrekkelijk simpel geval. Een schaatster staat stil op het ijs met een bal in haar handen. Dan gooit ze de bal van zich af. (De reden dat we het over ‘schaatsen’ en ‘ijs’ hebben is dat we wrijving willen verwaarlozen.)

a) Geef m.b.v. de wetten van Newton *kwalitatief* aan wat er met de bal en de schaatster gebeurt.

De vraag is nu of we ook meer kwantitatieve uitspraken kunnen doen. Stel b.v. dat de schaatster de bal met een snelheid v_0 van zich afwerpt (d.w.z., de bal beweegt na de worp met een snelheid v_0 t.o.v. de schaatster). Kunnen we nu zowel de snelheid van de schaatster als de snelheid van de bal t.o.v. het ijs bepalen? Dit blijkt inderdaad te kunnen met behulp van de wetten van Newton (met in het bijzonder een belangrijke rol voor de derde wet), zonder dat we de details van de interactie tussen de schaatster en de bal kennen.

Zij m_b en m_s de massa van de bal resp. de schaatster, $\frac{dx_b}{dt}(t)$ en $\frac{dx_s}{dt}(t)$ de (horizontale) snelheid op tijdstip t van de bal resp. de schaatster. Veronderstel verder dat op de bal en de schaatster geen andere (horizontale) krachten werken dan de krachten die ze op elkaar uitoefenen.

b) Leid m.b.v. de wetten van Newton af dat geldt:

$$\frac{d}{dt}\left[m_b \frac{dx_b}{dt}(t) + m_s \frac{dx_s}{dt}(t)\right] = 0 \qquad (3.2.1)$$

c) Uit (3.2.1) volgt dat voor elk tijdstip t geldt:

$$m_b \frac{dx_b}{dt}(t) + m_s \frac{dx_s}{dt}(t) = C\,.$$

Hierin is C een constante die weer nader te bepalen is uit beginvoorwaarden. Bepaal die constante.

d) Bepaal zowel de snelheid van de schaatster als de snelheid van de bal t.o.v. het ijs (na de worp), als gegeven is dat de bal na de worp met een snelheid v_0 t.o.v. de schaatster beweegt.

Vergelijking (3.2.1) drukt voor het geval dat we zojuist bekeken hebben impulsbehoud uit. Meer algemeen luidt *de wet van behoud van impuls*:

Als op een systeem van voorwerpen geen andere krachten werken dan de onderlinge wisselwerkingen, is de som van de impulsen van die voorwerpen behouden in de tijd.

Merk op dat dit resultaat onafhankelijk is van de precieze aard van de onderlinge wisselwerkingen.

e) Ga er nu vanuit dat de schaatster aanvankelijk niet stilstaat, maar beweegt met een snelheid V t.o.v. het ijs, met de bal in haar handen. Vervolgens werpt ze de bal weer met een snelheid v_0 van zich af. Bepaal de snelheid van de schaatster en de snelheid van de bal t.o.v. het ijs na de worp.

3.2.2 Karretje en steen

We beschouwen een open wagentje met massa m_w dat wrijvingsloos met snelheid V over een rechte horizontale rails beweegt. Terwijl het karretje voorbij rijdt, laat men er voorzichtig een steen met massa m_s in vallen. (De reden waarom we veronderstellen dat men de steen er *voorzichtig* in laat vallen, is dat we de verticale beweging buiten beschouwing willen laten.)

a) Geef m.b.v. de wetten van Newton kwalitatief aan wat er met de steen en het wagentje gebeurt.

b) Bepaal de snelheid waarmee het wagentje uiteindelijk beweegt, nadat de steen stil is komen te liggen t.o.v. de bodem van het wagentje.

3.3 Botsingen

3.3.1 Een-dimensionale botsing en massamiddelpunt

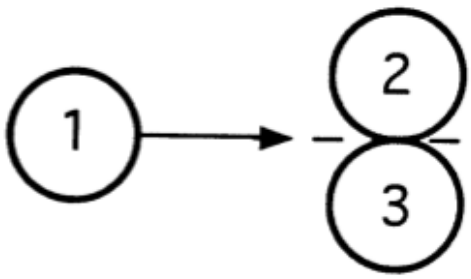
a) Laat zien dat in een een-dimensionale elastische botsing de snelheid van het massamiddelpunt van twee deeltjes, m_1 met beginsnelheid v_{1i} , en m_2 met beginsnelheid v_{2i}, wordt gegeven door

$$v_{cm} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2i}$$

b) Leid uitdrukkingen af voor v_{1f} en v_{2f}, de snelheden van beide deeltjes ná de botsing, en laat zien dat v_{cm} vóór en ná de botsing gelijk zijn. (Hint: gebruik het merkwaardig product $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$)

3.3.2 Biljartballen

Twee biljartballen (2 en 3) liggen tegen elkaar aan op de tafel. De stootbal (1) krijgt een richting precies tussen de beide andere ballen in en loodrecht op de verbindingslijn tussen de twee stilstaande ballen. Bal 1 botst volkomen elastisch op ballen 2 en 3.



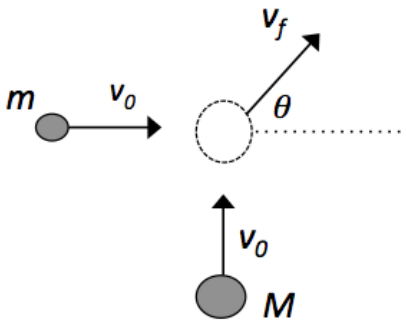
De snelheid van de stootbal *op het moment van de botsing* is v_0 en is zo groot dat de bal niet rolt, maar over het laken *glijdt*. Alle ballen hebben straal R en massa m.

a) Welke behoudswetten gelden gedurende de botsing en waarom?

b) Teken de biljartballen op het moment van de botsing en schets daarin de snelheidsvectoren ná botsing. Onder welke hoeken gaan de ballen uit elkaar?

c) Bereken de snelheid van de drie ballen meteen na de botsing, gebruikmakend van de symmetrie, en druk je antwoord uit in v_0. (NB: we beschouwen de snelheid *meteen* na de botsing omdat we er dan vanuit kunnen gaan dat de ballen glijden, en nog niet rollen.)

3.3.3 Inelastische botsing en wrijving



Twee massa's, M en m, bewegen in een horizontaal vlak, beiden met snelheid v_0. Ze bewegen loodrecht op elkaar, op dat moment is er geen wrijving. De massa's botsen, en daarna gaan ze als één massa verder onder een hoek θ.

a) Bereken de snelheid v_f na de botsing en θ.

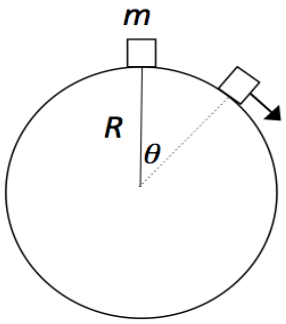
b) Hoeveel kinetische energie gaat er in de botsing verloren?

c) De samengestelde massa na de botsing ondervindt wrijving met het oppervlak. De wrijvingscoefficient is μ_k. Hoever glijdt de massa door alvorens tot stilstand te komen?

3.4 Extra oefenopgaven

3.4.1 Glijden op een cylinder

Een blokje met massa m ligt bovenop een wrijvingsloze cylinder, op een afstand R van de as van de cylinder. Na een klein duwtje glijdt de massa, met verwaarloosbare beginsnelheid, langs de cylinder naar beneden.

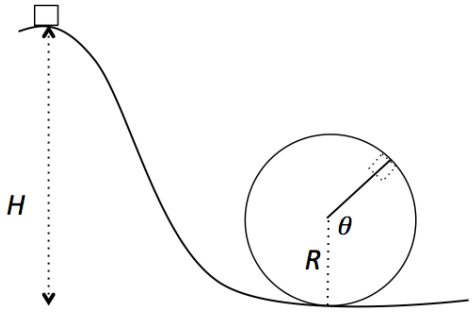


a) Wat is de snelheid van het blokje wanneer het over een hoek θ verplaatst is? (Het blokje bevindt zich nog steeds op de cylinder, en kan als puntmassa worden opgevat).

b) Hoe groot is de normaalkracht die het blokje ondervindt van de cylinder op dit punt?

c) Bij welke hoek θ verliest het blokje contact met de cylinder?

3.4.2 Looping



Een blok met massa m (te beschouwen als puntmassa) ligt op een wrijvingsloze heuvel van hoogte H. De helling loopt af naar een cirkelvormige looping met straal R.

a) Geef een uitdrukking voor de minimale hoogte H_{min} waarbij het blok *nog net* de looping rondgaat, d.w.z, aan de bovenkant blijft het contact met de baan behouden.

b) Als het blok start vanaf die hoogte H_{min}, hoe groot is de normaalkracht die het blok ondervindt *onderaan* de looping?

3.4.3 Biljarten/snooker

Een bal met massa m botst met snelheid v tegen een stilliggende bal met massa m. Toon aan dat bij een elastische niet-centrale botsing de richtingen van de twee ballen na de botsing loodrecht op elkaar staan. Hint: gebruik het inproduct!

Hoofdstuk 4

Traagheidsmoment en rotaties

Newton formulated the classical theories of mechanics and optics and invented calculus years before Leibniz. However, he did not publish his work on calculus until afterward Leibniz had published his. This led to a bitter priority dispute between English and continental mathematicians which persisted for decades, to the detriment of all concerned. Newton discovered that the binomial theorem was valid for fractional powers, but left it for Wallis to publish (which he did, with appropriate credit to Newton). Newton formulated a theory of sound, but derived a speed which did not agree with his experiments. The reason for the discrepancy was that the concept of adiabatic propagation did not yet exist, so Newton's answer was too low. Newton therefore fudged his theory until agreement was achieved.

Starre niet puntvormige voorwerpen kunnen naast transleren ook roteren. De beschrijving van rotatie met de wetten van Newton is volledig analoog aan die van translatie. De basiswet hier is $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$, waarin $\vec{\tau}$ het resulterende krachtmoment is t.o.v. de draaias en $\vec{L}$ het impulsmoment. Als de as niet van richting verandert kunnen we de vectoraanduiding weglaten en vinden we de vergelijking $\tau = \frac{dL}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$, waarin $I = \sum_i m_i r_i^2$ het traagheidsmoment, ω de hoeksnelheid en α de hoekversnelling is.

Vergelijk dit met de wet van Newton voor lineaire beweging $F = ma$, de letters zijn anders, maar de vergelijking is hetzelfde! Als er geen netto moment is dan moet het impulsmoment L behouden zijn. Dit is de wet van behoud van impulsmoment. Het belangrijke verschil met de wet van behoud van impuls is dat de impulsmomentwet altijd ten opzichte van *een punt* geldt! De kinetische energie van rotatie is analoog aan die van translatie, dus: $K = \frac{1}{2} I\omega^2$.

Een willekeurige beweging van een star lichaam kan ontbonden worden in een translatiebeweging van het massamiddelpunt en een rotatie om een as door het massamiddelpunt. Het toepassen van de mechanische behoudswetten voor energie, impuls en impulsmoment kunnen berekeningen zeer vereenvoudigen. Deze wetten zijn vooral nuttig als er actie-reactie krachten werken waarvan de grootte onbekend is.

4.1 Traagheidsmoment

Het traagheidsmoment $I = \sum_i m_i r_i^2$ is een geometrische grootheid die alleen afhangt van de verdeling van de massa ten opzichte van de draaias. Als de massa verdeeld is over de ruimte wordt de sommatie vervangen door een integratie $I = \int r^2 dm$.

Gegeven zijn drie objecten, allen met dezelfde massa *m*. *A* is een massieve cylinder met straal *R*, *B* is een holle pijp met straal *R* en een dunne wand, en *C* is een kubus met ribben 2*R*. De objecten kunnen draaien, de cylinders om de lengte-as en de kubus om een as door het middelpunt, loodrecht op het voorvlak.

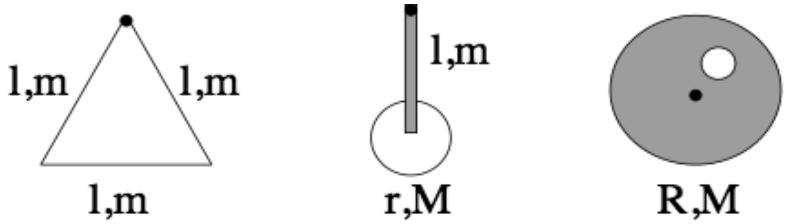
a) Welk object heeft het kleinste traagheidsmoment en welk het grootste?

b) Als we een massieve bol *D* nemen met massa *m* en straal *R,* en deze laten roteren om een as door het middelpunt, tussen welke objecten zou het traagheidsmoment uitkomen?

Een belangrijk hulpmiddel voor het berekenen van traagheidsmomenten is het parallelle-assen theorema, ook wel genoemd *de stelling van Steiner*. Dit theorema is vooral nuttig als we het traagheidsmoment om een as door het massamiddelpunt kennen. We kunnen dan op een simpele wijze het traagheidsmoment om een willekeurige parallelle as

berekenen met de regel $I = I_{cm} + md^2$, met I_{cm} het traagheidsmoment t.o.v. de as door het massamiddelpunt en *d* de afstand tussen de twee parallelle assen. Pas deze stelling toe in de volgende opgaven.

c) Een ring met massa *m* en straal *r* draaiend om een as loodrecht op de ring door een punt op de rand.



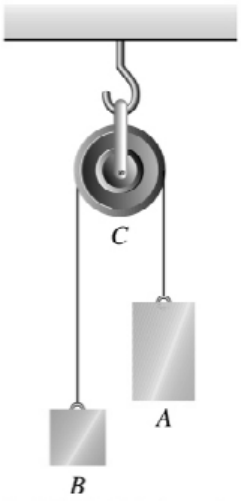
d) Een gelijkzijdige driehoek van drie latten elk met massa *m* en lengte *l*, draaiend om een as door een hoekpunt loodrecht op het vlak van de driehoek.

e) Een lat met massa *m* en lengte *l* star verbonden met een schijf met massa *M* en straal *r*, t.o.v. een as door het uiteinde van de lat (de tekening geeft een bovenaanzicht weer).

f) Hoe verandert het antwoord als de schijf t.o.v. de lat kan roteren?

g) In een ronde schijf, straal *R*, zit op een afstand *a* van het midden een rond gat met een straal *r*. De massa van het geheel is *M*. Laat zien dat het traagheidsmoment t.o.v. de as door het centrum, loodrecht op de schijf, gelijk is aan $I = \frac{M}{2\left(R^2 - r^2\right)}\left[R^4 - r^4 - 2r^2a^2\right]$.

4.2 Roteren om een vaste as



4.2.1 Katrol met gewichten

Twee voorwerpen *A* en *B* zijn via een massaloos koord met elkaar verbonden. Het koord loopt over katrol *C* (straal *r*). De massa's zijn m_A en m_B en het traagheidsmoment van de katrol is *I*. Het koord slipt niet over de katrol.

a) Teken voor de voorwerpen *A* en *B* en de katrol, afzonderlijk, het krachtendiagram.

b) Waarom is de spankracht in het linkerkoord *niet* gelijk aan de spankracht in het rechterkoord?

c) Stel dat het koord wrijvingsloos (dus slippend) over de katrol zou lopen. Hoe zou dit het voorgaande antwoord beïnvloeden?

d) Schrijf de bewegingsvergelijkingen op voor beide massa's en de katrol en bereken hieruit de versnelling van de massa's en de hoekversnelling van de katrol. Let hierbij op de geometrische relaties tussen de onderlinge (hoek)versnellingen.

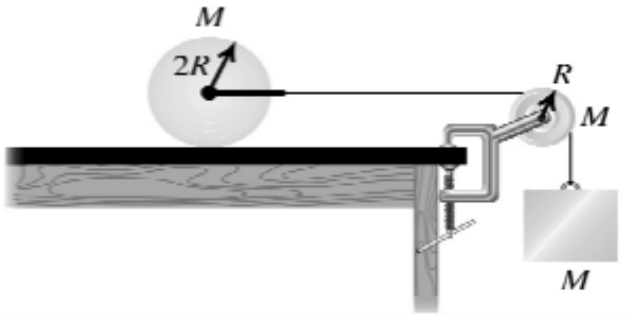
e) Deze opgaven kunnen bijna altijd veel eenvoudiger opgelost worden door het toepassen van een mechanische behoudswet. De behoudswet die hier geldt is de wet van behoud van mechanische energie E. Waar is de totale mechanische energie E hier gelijk aan?

f) Maak nu gebruik van de relatie $\frac{dE}{dt} = 0$ en het eerder afgeleide verband tussen de (hoek)versnellingen om de versnelling van de massa's te bepalen.

Het voordeel van deze methode is dat de spankrachten in het probleem niet voorkomen! De reden is dat spankrachten zogenaamde actie-reactie krachten zijn die altijd in paren met tegengesteld teken voorkomen. Bij het afleiden van de behoudswetten vallen ze weg.

4.2.2 Cylinder en katrol aan een tafel

Een uniforme massieve cylinder met massa M en straal $2R$ ligt op een horizontale tafel. Een koord is via een draaiende katrol (massa M, straal R) verbonden van de as van de cylinder naar een hangend gewicht met massa M. Het koord slipt niet over de katrol en de cylinder rolt zonder te slippen over de tafel.

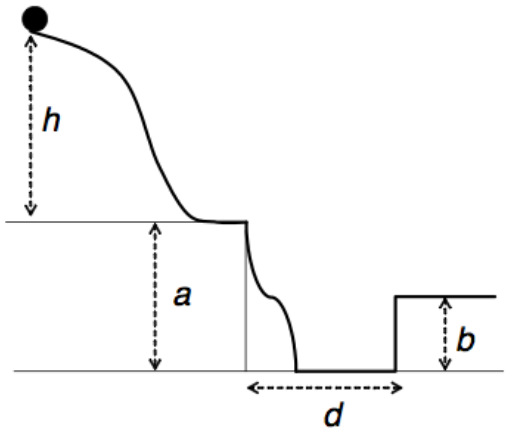


a) Welke geometrische relaties zijn er tussen de lineaire versnelling en de hoekversnellingen van de cylinder en de katrol?

b) Bereken de versnelling van het omlaagvallende blok.

4.3 Rollen

4.3.1 Knikkerbaan



Een uniforme knikker met straal r en massa m rolt zonder te slippen vanuit rust van een knikkerbaan.

a) Bepaal de minimale hoogte h die nodig is om te voorkomen dat de knikker in de put valt.

b) Stel nu dat de knikker wrijvingsloos (gaat niet rollen) over de baan beweegt. Bepaal wat dat voor gevolgen voor de hoogte h heeft.

Hoofdstuk 5

Impulsmoment

Newton suffered a mental breakdown in 1675 and was still recovering through 1679. In response to a letter from Hooke, he suggested that a particle, if released, would spiral in to the center of the Earth. Hooke wrote back, claiming that the path would not be a spiral, but an ellipse. Newton, who hated being bested, then proceeded to work out the mathematics of orbits. Again, he did not publish his calculations. Newton then began devoting his efforts to theological speculation and put the calculations on elliptical motion aside, telling Halley he had lost them. Halley, who had become interested in orbits, finally convinced Newton to expand and publish his calculations. Newton devoted the period from August 1684 to spring 1686 to this task, and the result became one of the most important and influential works on physics of all times, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (Mathematical Principles of Natural Philosophy) (1687), often shortened to Principia Mathematica or simply ”the Principia.”

5.1 Roteren en transleren

5.1.1 IJsrevue

Twee schaatsers (A en B) bevinden zich op een bevroren lang recht kanaal. Schaatser A staat stil en heeft een massaloze stok met lengte l vast. De stok wijst evenwijdig aan het ijs en staat loodrecht op de lengterichting van het kanaal. Schaatser B schaatst in de lengterichting van het kanaal met eenparige snelheid v en passeert A op afstand l. Bij het passeren pakt B het vrije uiteinde van de stok vast waarna hun onderlinge afstand l blijft. Beide schaatsers hebben massa m en kunnen voor dit probleem als puntmassa's beschouwd worden. Wrijvingskrachten zijn te verwaarlozen.

a) Teken de baan van het massamiddelpunt voor en na de ontmoeting en bereken de snelheid v_m van het massamiddelpunt.

b) Welke behoudswetten zijn geldig? Leg je antwoord uit.

c) Hoe groot is na de ontmoeting de hoeknelheid ω_m van de schaatsers t.o.v. hun massamiddelpunt? Druk je antwoord uit in v, m en/of l.

d) Bereken de kinetische energie van de twee schaatsers na de ontmoeting. Druk je antwoord uit in v, m en/of l.

e) Met enige inspanning verkleinen de schaatsers hun onderlinge afstand van l tot x. Bereken de nieuwe hoeksnelheid om het massamiddelpunt. Druk je antwoord uit in v, m en/of l.

5.1.2 Lat en kogel 1

Een uniform massieve lat met lengte l en massa m, ligt op een wrijvingsloze tafel. De staaf kan draaien om een pin door een uiteinde. De lat is in rust. Er wordt nu een kogel, horizontaal aan de tafel en vertikaal op de lat in het midden van de lat geschoten. De kogel blijft steken. De massa van de kogel is $m/4$.

a) Beredeneer welke mechanische behoudswetten er wel en niet gelden.

b) Bereken met behulp van de geldende behoudswet de hoeksnelheid van de staaf om de pin na de botsing.

c) Bereken de verhouding van de kinetische energie na en voor de botsing.

5.1.3 Lat en kogel 2

We bekijken nu eenzelfde probleem als 5.1.2, alleen nu zonder de vaste pin, de lat kan nu vrij bewegen. De kogel schieten we op een afstand x van het midden van de lat, de kogel blijft in de lat steken.

a) Teken intuitief de beweging van lat en kogel na de botsing.

b) Beredeneer welke mechanische behoudswetten er wel en niet gelden.

c) Splits nu de beweging in een translatiebeweging van het massamiddelpunt en een rotatie van het massamiddelpunt. Wat is de snelheid van het massamiddelpunt voor de botsing? en na de botsing?

d) Hoe ziet de beweging van de lat er uit voor een waarnemer die zich met de snelheid van het massamiddelpunt met de lat meebeweegt?

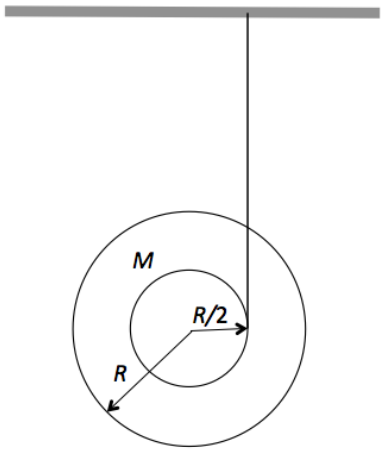
e) Bereken, als functie van x, de hoeksnelheid van lat en kogel om het massamiddelpunt.

f) Teken de resulterende beweging voor een stilstaande waarnemer en vergelijk het resultaat met onderdeel a)

g) Voor één bepaalde waarde van x is de snelheid van een van de uiteinden meteen na de botsing gelijk aan nul. Voor welke waarde van x is dit? (Dit punt wordt ook wel het percussiepunt genoemd, iedereen die wel eens met een stok, bat of stick tegen een bal of voorwerp heeft geslagen, weet wat de consequentie is als de bal dit punt niet raakt).

5.1.4 Jojo

Een jojo is bevestigd aan het plafond. Op tijdstip t=0 wordt hij vanuit rust losgelaten. De jojo heeft massa M, straal R, en traagheidsmoment $I = \beta MR^2$. De draad van de jojo is massaloos, en is gedraaid om een as met straal $R/2$. Na loslaten rolt het touw af en de jojo valt.



a) Hoe groot is de hoekversnelling $\vec{\alpha}$ tijdens de val? Geef ook de richting aan van deze vector.

b) Geef een uitdrukking voor de spankracht T in het touw tijdens het afrollen.

c) Geef een uitdrukking voor de hoeksnelheid ω wanneer de jojo een afstand H gevallen is.

5.1.5 Glijden en rollen

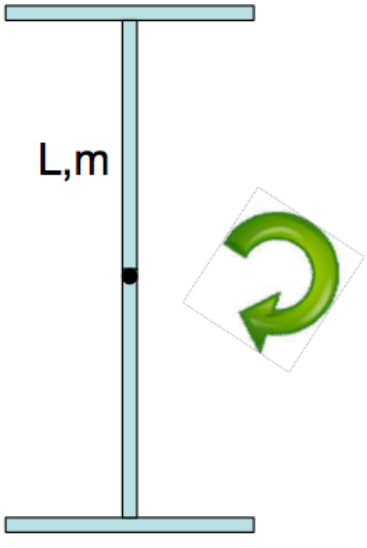
Een biljarter stoot tegen een bal met massa m en straal R. In eerste instantie *glijdt* de bal over het laken, met een initiële snelheid v_0. De kinetische wrijvingscoëfficient tussen bal en laken is μ. Door de wrijving met het laken neemt de snelheid af en gaat de bal na bepaalde tijd rollen.

a) Laat zien dat dit tijdstip gegeven wordt door $t = 2v_0/7\mu g$ (gerekend vanaf de botsing). Hint: door de wrijving ondergaat de bal een laterale vertraging en tegelijkertijd een hoekversnelling. Als de bal *rolt* dan geldt: $v = \omega R$.

b) Bereken ook de snelheid van de bal op dat tijdstip.

5.2 Kermisattractie

Een slinger in de vorm van een T kan vrij ronddraaien in een verticaal vlak om een draaias door het uiteinde. In de figuur is de T in twee



posities getekend. De draaias is loodrecht op het papier. In de bovenste stand is de hoeksnelheid ω_1, in het laagste punt ω_2. In de getekende standen zijn de volgende krachten van belang, de zwaartekracht (valversnelling g) en de krachten die de T en de draaias op elkaar uitoefenen. In de hoogste stand is de kracht van de as op de T, S_1 en in de laagste stand S_2, deze krachten zijn verticaal gericht. De T bestaat uit twee dunne latten elk met massa m en lengte l. De totale massa van de T is dus $2m$.

a) Bereken de positie van het massamiddelpunt van de T t.o.v. de draaias en het traagheidsmoment van de T t.o.v. de draaias.

b) Beargumenteer welke van de drie behoudswetten: mechanische energie, impuls, impulsmoment tijdens het draaien geldig is (zijn).

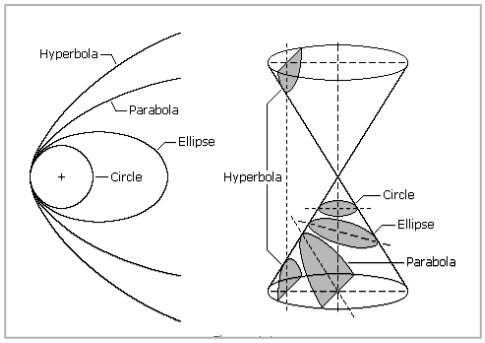
c) Bereken $S_2 - S_1$. Neem in de berekening voor het traagheidsmoment $I = \alpha m l^2$. Vul de waarde van α pas op het laatste moment in. (Ter controle: voor $\alpha = 3$, $S_2 - S_1 = 7mg$.)

Hoofdstuk 6

Newton's gravitatie en Keplerwetten

Newton also formulated a system of chemistry in Query 31 at the end of Optics. In this corpuscular theory, ”elements” consisted of different arrangements of atoms, and atoms consisted of small, hard, billiard ball-like particles. He explained chemical reactions in terms of the chemical affinities of the participating substances. Newton devoted a majority of his free time later in life (after 1678) to fruitless alchemical experiments. Newton was extremely sensitive to criticism, and even ceased publishing until the death of his archrival Hooke. It was only through the prodding of Halley that Newton was persuaded at all to publish the Principia Mathematica. In the latter portion of his life, he devoted much of his time to alchemical researches and trying to date events in the Bible. After Newton’s death, his burial place was moved. During the exhumation, it was discovered that Newton had massive amounts of mercury in his body, probably resulting from his alchemical pursuits. This would certainly explain Newton’s eccentricity in late life. Newton was appointed Warden of the British Mint in 1695. Newton was knighted by Queen Anne. However, the act was "an honor bestowed not for his contributions to science, nor for his service at the Mint, but for the greater glory of party politics in the election of 1705".

De opgaven in dit hoofdstuk gaan over de beweging van deeltjes onder invloed van een centrale kracht, in het bijzonder de gravitatiewet van Newton, $\vec{F} \propto \left(1/r^2\right)\hat{r}$. Het verschil met de vorige hoofdstukken is dat de beweging niet langer één-dimensionaal is maar zich afspeelt in een vlak. Omdat de krachtwet expliciet bekend is kunnen we de bewegingsvergelijking oplossen. Het resultaat is dat de baan van een voorwerp gegeven wordt door een kegelsnede, d.w.z. een ellips, parabool of hyperbool. Omdat de gravitatiekracht conservatief is en naar één punt (het krachtcentrum) gericht gelden de behoudswetten van *mechanische energie* en *impulsmoment t.o.v. het krachtcentrum*. Deze grootheden veranderen niet in de tijd en leggen de vorm van de baan vast. *Vrijwel alle Keplerproblemen* kunnen dan ook opgelost worden door gebruik te maken van deze behoudswetten!



6.1 Satellietbanen

6.1.1 Cirkelbaan

De eenvoudigste satellietbaan is de cirkelbaan.

a) Een satelliet met massa *m* beweegt in een cirkelbaan om de aarde. De straal van de cirkel is r_0 en de massa van de aarde M_a. Bereken de grootte en richting van de snelheid en de versnelling van de satelliet, de omlooptijd en de totale mechanische energie.

b) De banen van satellieten die altijd op hetzelfde punt boven het aardoppervlak staan heten geosynchroon. Waarom staan deze satellieten altijd boven de evenaar en hoe hoog staan ze?

Als we een satelliet in een cirkelbaan hebben en we gaan de snelheid vergroten of verkleinen dan gaat de satelliet een ellipsbaan beschrijven.

c) We verhogen de snelheid van de satelliet uit onderdeel a) met een factor $\alpha > 1$ waardoor de satelliet in een ellipsbaan komt met het centrum van de aarde als brandpunt. Bereken door gebruik te maken van de behoudswetten de maximale afstand tot de aarde, de snelheid op dit punt en de totale mechanische energie.

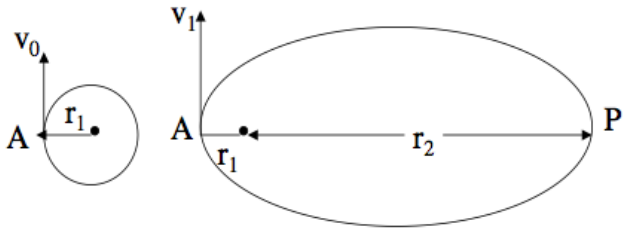
d) Voor welke waarden van α keert de satelliet in zijn beginpositie terug, d.w.z. hebben we een gesloten baan? Welke waarde van de totale mechanische energie hoort hierbij?

e) We gaan weer uit van situatie a) maar verlagen nu de snelheid met een factor $0 < \alpha < 1$. De satelliet komt dan weer in een ellipsbaan. Teken deze baan, let daarbij goed op de plaats van het brandpunt.

f) Als gegeven is dat de aardstraal R_a is, bereken dan de waarde van α opdat de satelliet de aarde net raakt.

6.1.2 Manouvreren met satellieten

Met satellieten worden manoeuvres uitgevoerd om ze naar andere planeten of de zon te sturen. We beschouwen hier hoe een satelliet het beste van de aarde naar de zon gestuurd kan worden. Uitgaande van een vrijwel cirkelvormige baan met straal r_1 van aarde en satelliet om de zon lijkt de eenvoudigste manier het afremmen van deze baansnelheid tot stilstand, waarna de satelliet in een rechte lijn naar de zon zal vallen. Een goedkopere manier, d.w.z. een die minder raketbrandstof kost, maakt gebruik van twee manoeuvres. Eerst wordt de satelliet naar de rand van het zonnestelsel gestuurd door de snelheid van de satelliet te vergroten! Vervolgens wordt in het verste punt van de nieuwe baan de satelliet afgeremd tot stilstand, waarna de satelliet weer in rechte lijn naar de zon valt. Verwaarloos bij de volgende vragen de beweging van de satelliet om de aarde en de gravitatiekracht van de aarde.



a) Bereken de snelheid v_0 van de satelliet in de cirkelbaan om de zon. Druk het antwoord uit in de straal r_1 de gravitatieconstante G en de massa M van de zon.

b) De snelheid van de satelliet wordt nu vergroot tot $v_1 = \alpha v_0$ met $\alpha > 1$, waardoor de satelliet een ellipsbaan gaat volgen en in P de maximale afstand $r_2 = 8r_1$ tot de zon bereikt. Bereken door gebruik te maken van behoudswetten de grootte van α en de snelheid van de satelliet in P. (Tijdens het vergroten van de snelheid verandert de afstand tot de zon niet).

c) In P wordt de snelheid tot nul afgeremd waarna de satelliet naar de zon valt. Maak kwantitatief duidelijk waarom deze manier van een satelliet naar de zon sturen voordeliger is dan het direct afremmen van de snelheid.

6.1.3 Exploderende satelliet

Een satelliet met massa m beweegt met snelheid v_0 in een cirkelvormige baan met straal r rondom de aarde (massa M). Door een explosie breekt de satelliet in twee fragmenten elk met massa $m/2$. Meteen na de botsing zijn de radiële componenten van de snelheid van beide fragmenten gelijk aan $+v_0$ en $-v_0$. De tangentiële snelheid verandert niet door de explosie.

a) Druk de snelheid v_0 van de satelliet vóór de explosie uit in de grootheden G, M en r, waarin G de gravitatieconstante is.

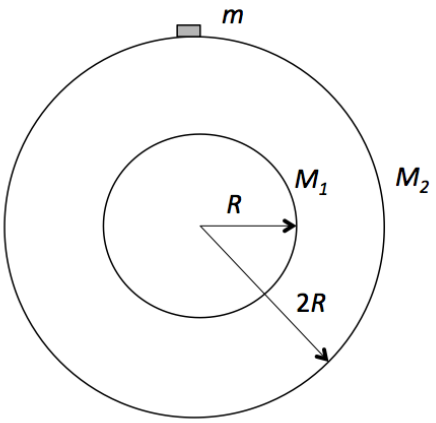
b) Bereken voor ieder fragment afzonderlijk de totale mechanische energie en het impulsmoment ten opzichte van het centrum van de aarde. Druk het resultaat uit in G, M, m en r.

c) Bereken de kortste afstand tot de aarde (uitgedrukt in r) die de fragmenten in hun baan bereiken.

6.2 Gravitatiekracht

6.2.1 Twee holle bollen

Een holle bol met massa M_1 en straal R bevindt zich binnenin een andere holle bol met massa M_2 en straal $2R$. De middelpunten van de bollen vallen samen, en de dikte van het oppervlak van beide bollen is verwaarloosbaar dun.



a) Een kleine massa m ligt op het oppervlak van M_2. Geef een uitdrukking voor de versnelling die de zwaartekracht op m uitoefent, g_2, in de termen M_1, M_2, G en R.

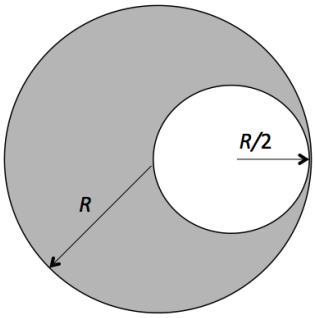
b) Nu ligt de massa op het oppervlak van M_1. Hij ondervindt een versnelling g_1, die toevallig even groot is als g_2. Geef een uitdrukking voor M_2 in de termen M_1, G en R.

c) Bereken de potentiële energie U_1 van m op de buitenste bol (situatie als a).

d) Bereken de verandering in potentiële energie, ΔU, wanneer m beweegt van zijn positie op M_2 naar een positie op M_1.

e) Een voorwerp valt vanuit stilstand door een klein gaatje van het oppervlak van M_2 naar het oppervlak van M_1. Met welke snelheid komt het daar aan?

6.2.2 Planeet met holte

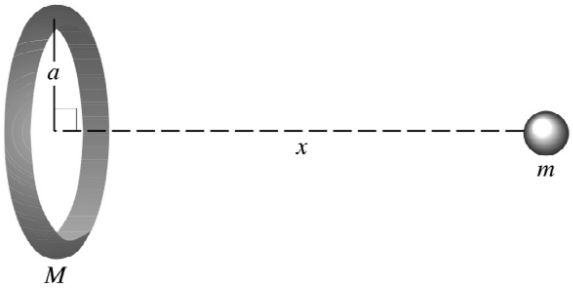


De figuur geeft een planeet weer met straal R en dichtheid r (massa gedeeld door volume). In de bol bevindt zich een bolvormige holte met straal $R/2$. Bereken de grootte van de gravitatiekracht in de holte, en laat zien dat deze kracht uniform is en naar links gericht.

6.2.3 Massaverdeling

Bij het toepassen van de gravitatiewet van Newton op bolvormige hemellichamen wordt de volledige massa van het hemellichaam in het middelpunt van de bol geplaatst. Dit zeker niet triviale resultaat (zie bewijs in University Physics) kunnen we niet gemakkelijk uitbreiden naar willekeurige massaverdelingen. We zullen dan vrijwel altijd netjes moeten sommeren (en integreren) over alle massa's en alle afstanden in rekening moeten brengen. Hierbij worden we wel geholpen door naar de symmetrie van het probleem te kijken. In plaats van te sommeren over de kracht is het soms makkelijker om potentiële energieën te sommeren en daarna de krachtcomponenten uit te rekenen via b.v. $F_x = -\partial U(x,y,z)/\partial x$. De reden hiervan is dat krachten vectoren en potentiële energieën scalairen zijn.

Beschouw daartoe een ringvormig voorwerp met massa M en straal a. Een deeltje met massa m bevindt zich op een lijn door het middelpunt van de ring en loodrecht op het ringoppervlak op een afstand x van het middelpunt.



a) Wat verwacht u intuïtief voor de grootte van de potentiële energie als de afstand x zeer veel groter is dan a?

b) Bereken de potentiële gravitatie-energie U van het systeem. Definieer het nulpunt van de potentiële energie als de massa oneindig ver weg van de ring staat. Verifieer het antwoord gevonden bij onderdeel a).

c) Bereken als functie van x de grootte en de richting van de kracht op de massa.

d) Wat zijn de waarden voor U en $\vec{F}$ als $x = 0$? Leg uit waarom u dit resultaat verwacht.

e) Het deeltje met massa m is in werkelijkheid een uniforme bol met straal R. Hoe groot is de gravitatiekracht die de bol op de ring uitoefent?

Hoofdstuk 7

Harmonische oscillaties

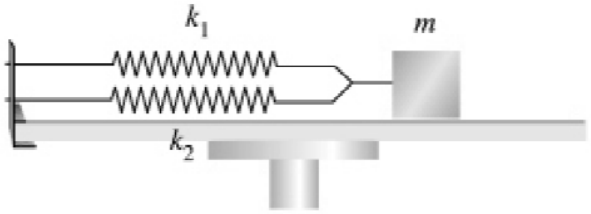
Newton single-handedly contributed more to the development of science than any other individual in history. He surpassed all the gains brought about by the great scientific minds of antiquity, producing a scheme of the universe which was more consistent, elegant, and intuitive than any proposed before. Newton stated explicit principles of scientific methods which applied universally to all branches of science. This was in sharp contradistinction to the earlier methodologies of Aristotle and Aquinas, which had outlined separate methods for different disciplines.

Although earlier philosophers such as Galileo and John Philoponus had used experimental procedures, Newton was the first to explicitly define and systematize their use. His methodology produced a neat balance between theoretical and experimental inquiry and between the mathematical and mechanical approaches. Newton mathematized all of the physical sciences, reducing their study to a rigorous, universal, and rational procedure which marked the ushering in of the Age of Reason. Thus, the basic principles of investigation set down by Newton have persisted virtually without alteration until modern times. In the years since Newton's death, they have borne fruit far exceeding anything even Newton could have imagined. They form the foundation on which the technological civilization of today rests. The principles expounded by Newton were even applied to the social sciences, influencing the economic theories of Adam Smith and the decision to make the United States legislature bicameral. These latter applications, however, pale in contrast to Newton's scientific contributions.

It is therefore no exaggeration to identify Newton as the single most important contributor to the development of modern science. The Latin inscription on Newton's tomb, despite its bombastic language, is thus fully justified in proclaiming, "Mortals! rejoice at so great an ornament to the human race!"Alexander Pope's couplet is also apropos: "Nature and Nature's laws lay hid in night; God said, Let Newton be! and all was light."

7.1 Gekoppelde veersystemen

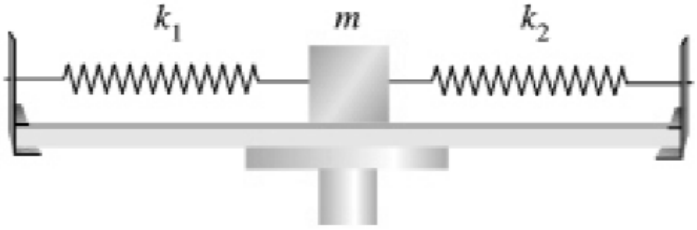
In deze opgave beschouwen we enkele gekoppelde veersystemen. Allereerst bekijken we de situatie uit onderstaande figuur, waarin we te maken met een massa m die verbonden is met een vaste muur via twee parallelle veren. De veren hebben verschillende veerconstantes (k_1 en k_2), en zijn massaloos.



In de gegeven situatie zijn de veren niet uitgerekt of ingedrukt. Beschouw nu de beweging van de massa m nadat deze een beetje naar links geduwd of naar rechts getrokken is en daarna losgelaten. U mag aannemen dat op de massa m geen andere krachten werken dan de veerkracht der beide veren.

a) Toon aan dat de beweging van de massa m dan harmonisch is, en bepaal de bijbehorende eigenfrequentie. (Hint: Bepaal de totale kracht die op de massa m werkt wanneer deze een uitwijking x van de evenwichtspositie heeft).

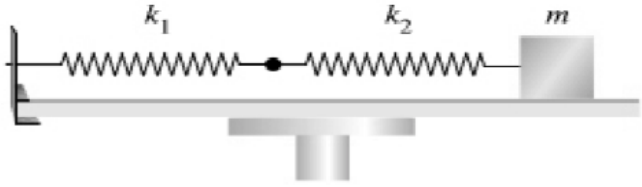
Beschouw nu de volgende situatie, waarin de massa m zich tussen de veren bevindt en elk van de veren met een vaste muur verbonden is.



De afstand tussen de beide muren is zodanig dat de veren hun evenwichtslengte hebben. In de gegeven situatie is de veerkracht van beide veren dus 0. Vervolgens wordt de massa m weer een beetje naar links geduwd of naar rechts getrokken en daarna losgelaten.

b) Toon aan dat de beweging van de massa m ook in dit geval harmonisch is, en bepaal weer de bijbehorende eigenfrequentie.

Beschouw nu de laatste situatie, waarin de massa m verbonden is met een vaste muur via twee veren in serie.



In deze situatie zijn de veren niet uitgerekt of ingedrukt. De positie waarin de massa *m* zich dan bevindt, noemen we $x = 0$. Beschouw nu weer de beweging van de massa *m* nadat deze een beetje naar links geduwd of naar rechts getrokken is en daarna losgelaten.

c) Noem $x_i(t)$ de afwijking die veer *i* op tijdstip *t* van zijn evenwichtlengte heeft, en $x(t)$ de afwijking die de massa *m* op tijdstip *t* ten opzicht van de hierboven gedefinieerde evenwichtspositie $x = 0$ heeft.

Wat is de relatie tussen $x_1(t)$, $x_2(t)$ en $x(t)$?

d) Beargumenteer dat op ieder tijdstip de veerkracht in beide veren even groot is, en dat de kracht op de massa *m* op tijdstip *t* gegeven wordt door: $-k_1 x_1(t) = -k_2 x_2(t)$.

e) Toon aan dat de beweging van de massa *m* ook nu harmonisch is, en bepaal de bijbehorende eigenfrequentie. Hint: Leid met behulp van de onderdelen c) en d) een vergelijking af van de vorm: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = k'x$

f) Wordt de beweging van de massa anders wanneer we de veren verwisselen?

7.2 Trillingen om een evenwichtspunt

7.2.1 Molecuul

In deze opgave laten we zien hoe vanuit een gegeven potentiële energiefunctie een harmonische trilling kan ontstaan. We beschouwen daartoe het molecuul kaliumchloride (KCl), de afzonderlijke atomen oefenen krachten op elkaar uit die op grote afstand aantrekkend zijn en op korte afstand afstotend.

a) Kunt U hiervoor een verklaring geven?

Het blijkt uit experimenten dat de potentiële energie van het molecuul gegeven wordt door $U = A\left[\left(R_0^7/8r^8\right) - 1/r\right]$, met *r* de onderlinge afstand van de beide atomen, $R_0 = 2.67 \times 10^{-10}$ m en $A = 2.31 \times 10^{-28}$ Jm.

b) Bereken de kracht tussen de twee atomen als functie van de onderlinge afstand *r*.

c) Maak schetsen van *U*(*r*) en *F*(*r*).

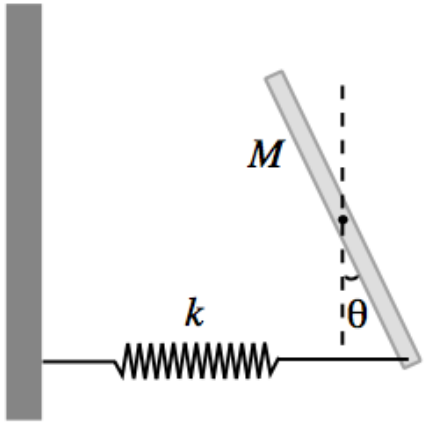
d) Toon aan dat R_0 de evenwichtsafstand is.

e) Substitueer $r = R_0 + x$ in *F*(*r*) en laat zien dat voor kleine waarden van *x*, $F = -\left(7A/R_0^3\right)x$. Hint: gebruik de Taylor-ontwikkeling $(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$.

f) Bereken de frequentie van kleine trillingen om de evenwichtsstand. Gebruik hierbij voor de massa de massa van het massamiddelpunt $m_1 m_2 / (m_1 + m_2) = 3.06 \times 10^{-26}$ kg.

7.3.2 Lat aan veer

Een dunne lat met massa M en lengte l kan wrijvingsloos draaien om een as door het middelpunt van de lat en loodrecht op de lat. Een horizontale massaloze veer met veerconstante k verbindt een uiteinde van de lat met een vast steunpunt. De staaf wordt gedraaid over een kleine hoek $\theta = \theta_0$ t.o.v. de verticaal, waardoor de veer uitrekt, en wordt vervolgens, ($t = 0$), losgelaten.



a) Laat zien dat de beweging van de lat beschreven wordt door de harmonische vergelijking $d^2\theta/dt^2 = -\omega^2\theta$. Druk ω uit in gegeven grootheden. (Maak gebruik van de kleine hoekbenaderingen van sin $\theta \approx \theta$ en cos $\theta \approx 1$).

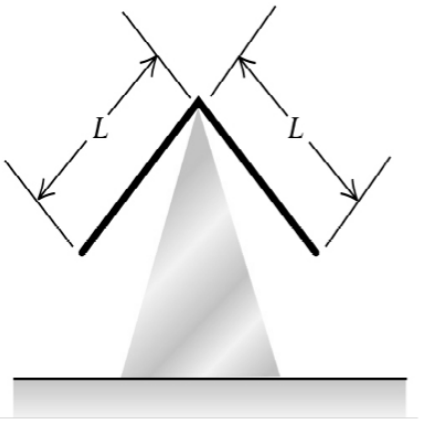
b) Geef de volledige oplossing van de beweging van de lat als functie van de tijd met de gegeven randvoorwaarden.

c) In een nieuwe situatie staat op $t = 0$ de staaf verticaal $\theta = 0$. Op dit moment wordt in het bovenste uiteinde van de lat een kogel met massa m met snelheid v horizontaal in de lat geschoten. Motiveer welke behoudswet er geldt. Bereken de hoeksnelheid $\omega_0 = d\theta/dt$ van de lat meteen na de botsing ($t = 0$). (Verwaarloos de massa van de kogel op het traagheidsmoment).

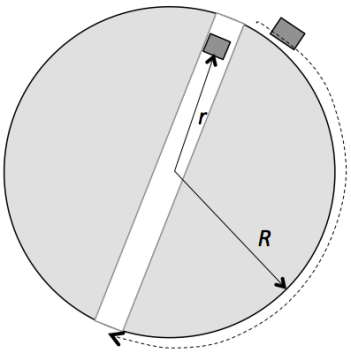
7.3.3 Oscillerende latten

a) Een lat met massa M en lengte L hangt aan een van de uiteinden. De lat kan kleine trillingen om zijn evenwichtsstand uitvoeren. Toon aan dat de hoekfrequentie van de trilling gelijk is aan $\sqrt{3g/2L}$.

b) Twee identieke dunne latten, elk met massa m en lengte L zitten onder een rechte hoek aan elkaar vast, een winkelhaak. Het geheel kan balanceren op de punt van een scherp voorwerp. Als de haak licht uit evenwicht wordt gebracht ontstaat er een trilling. Bereken de frequentie van deze trilling. (Er zijn verschillende manieren om dit probleem op te lossen, via de krachten/momenten op de individuele latten, via de potentiële energie van de latten, of door een beschouwing van de beweging van het massamiddelpunt)



7.3.4 Tunnel door planeet



Een planeet wordt doorsneden door een rechte tunnel door het middelpunt. De planeet heeft een straal R, massa M, een uniforme massaverdeling, en draait niet. Er is geen atmosfeer en de tunnel is wrijvingsloos.

a) Geef een uitdrukking voor de versnelling die een massa m ondervindt in de tunnel, op afstand $r < R$ van het middelpunt.

b) Leid hieruit een uitdrukking af voor $r(t)$, de plaats waar de massa zich bevindt. Op t=0 vertrekt de massa met verwaarloosbare snelheid op r_0=R.

c) Na hoeveel tijd komt de massa aan aan de andere kant van de planeet?

d) Een tweede massa m legt een cirkelbaan af met straal R rondom de planeet. Op t = 0 bevinden beide massa's zich op op r_0=R, Welke massa bereikt de andere kant het eerst? Verklaar je antwoord.

Hoofdstuk 8
Differentiaalvergelijkingen

8.1 Introductie

Bij het beschrijven van natuurkundige problemen, kom je al snel differentiaalvergelijkingen tegen. Differentiaalvergelijkingen zijn vergelijkingen voor functies, waarin zowel de functie als zijn afgeleiden kunnen voorkomen. Een simpel voorbeeld hiervan is radioactief verval. Het aantal deeltjes dat per tijdseenheid vervalt (dN/dt) is evenredig met het aantal deeltjes dat er is (N). Als we de evenredigheidconstante noemen, geeft dat de volgende differentiaalvergelijking

$$\frac{dN(t)}{dt} = -kN(t) \tag{8.1.1}$$

om radioactief verval te beschrijven. Dit is een vergelijking voor de functie $N(t)$, die we willen oplossen. Je kunt dit vergelijken met het oplossen van gewone vergelijkingen. Zoals we bij de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ oplossingen voor x zoeken, zo zoeken we bij de differentiaalvergelijking (8.1.1) oplossingen voor $N(t)$.

Er is geen algemene methode om oplossingen voor willekeurige differentiaalvergelijkingen te vinden. De meeste hebben zelfs geen oplossingen die uit te drukken zijn in bekende wiskundige functies als polynomen (dat zijn uitdrukkingen van de vorm $a + bx + cx^2 + ...$), goniometrische functies en e-machten. Hier zullen we een aantal specifieke differentiaalvergelijkingen behandelen die vaak in de natuurkunde voorkomen. De wiskunde om de vergelijkingen af te leiden staat soms beknopt vermeld maar wordt uitgebreid behandeld in de eerstejaars wiskundecolleges. De aanpak is heel pragmatisch, voor strikte wiskundige bewijzen en nette formuleringen wordt verwezen naar de wiskundecolleges.

De eerste twee differentiaalvergelijkingen die we zullen behandelen zijn:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -ax(t) \text{ en } \frac{dx(t)}{dt} = -ax(t) + b \tag{8.1.2}$$

met $a > 0$. Deze differentiaalvergelijkingen bevatten alleen een eerste orde afgeleide van $x(t)$ en worden daarom eerste orde differentiaalvergelijkingen genoemd. Omdat we om de oplossing te vinden één keer moeten integreren bevatten de oplossingen steeds één vrij te kiezen (integratie)constante.

Vervolgens zullen de volgende drie differentiaalvergelijkingen behandeld worden

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = c\,,\ \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -ax(t) \text{ en } \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -ax(t) - b\frac{dx(t)}{dt}, \tag{8.1.3}$$

met a, $b > 0$. Dit zijn tweede orde differentiaalvergelijkingen en de oplossingen ervan bevatten steeds twee vrij te kiezen constanten.

Merk op dat alle vijf differentiaalvergelijkingen lineair zijn in de functie $x(t)$ en de afgeleiden ervan, dus geen termen bevatten als $x\left(dx/dt\right)$ of kwadraten. Vergelijkingen waarin alléén de functie en zijn afgeleides voorkomen worden homogeen genoemd. Kenmerk van deze laatste vergelijkingen is dat als $x_1(t)$ en $x_2(t)$ oplossingen zijn dat dan ook de som $x_1(t) + x_2(t)$ een oplossing is. Dit is voor bovenstaande vergelijkingen (zonder de constantes) makkelijk na te gaan. Niet-lineaire differentiaalvergelijkingen zijn in het algemeen erg moeilijk oplosbare vergelijkingen. Een uitzondering is het type

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \tag{8.1.4}$$

waar we een fysisch voorbeeld van zullen geven. Tenslotte zullen we kort de golfvergelijking behandelen.

8.2 Vallen in een constant zwaartekrachtveld

In een zwaartekrachtveld geldt dat de kracht op een deeltje gelijk is aan $-mg$. Omdat geldt dat $F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$ levert dat de volgende differentiaalvergelijking op:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -g\,. \tag{8.2.1}$$

De oplossing hiervan is:

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + At + B\,, \tag{8.2.2}$$

met *A* en *B* twee willekeurige constanten. Dit kun je ook weer eenvoudig controleren door de oplossing in de vergelijking in te vullen, maar je kunt hem ook afleiden door de differentiaalvergelijking tweemaal te integreren (doe dit!). Deze oplossing leidt tot de bekende paraboolbanen die je krijgt bij vallen in een zwaartekrachtveld.

Door nu op te leggen dat op tijdstip $t = 0$ voor de plaats moet gelden $x(0) = x_0$ en voor de snelheid $dx(0)/dt = v_0$, krijg je het bekende resultaat:

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0 \tag{8.2.3}$$

8.3 Afremmen door een wrijvingskracht die een functie is van de snelheid

Bij de beweging van een voorwerp door lucht of door een vloeistof werkt een kracht die tegengesteld gericht is aan de beweging en een functie is van de snelheid, dus $F = F(v)$. De snelheid als functie van de tijd vinden we door het oplossen van de bewegingsvergelijking van Newton:

$$m\frac{dv}{dt} = F(v). \tag{8.3.1}$$

Deze speciale vorm van een differentiaalvergelijking kunnen we oplossen met een techniek die scheiding van variabelen genoemd wordt. De techniek komt erop neer dat we alle grootheden waarin dezelfde variabele, hier de snelheid *v* en de tijd *t*, voorkomt naar één kant van de vergelijking brengen:

$$\frac{1}{F(v)}dv = \frac{1}{m}dt\,. \tag{8.3.2}$$

Vervolgens gaan we links en rechts integreren. De linkerkant integreren we over de snelheid en de rechterkant over de tijd,

$$\int \frac{1}{F(v)}dv = \int \frac{1}{m}dt\,, \tag{8.3.3}$$

met als uitkomst,

$$\frac{t}{m} = \int \frac{dv}{F(v)} + C\,, \tag{8.3.4}$$

waarin *C* een constante is die uit de randvoorwaarde volgt. Het probleem is dan gereduceerd tot het vinden van de primitieve van $1/F(v)$ en het inverteren van de vergelijking $t = f(v)$. Verifieer dat voor $F = -bv$ en de randvoorwaarde dat op $t = 0$, de beginsnelheid gelijk is aan $v = v_0$, de oplossing is:

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{bt}{m}}, \tag{8.3.5}$$

en voor $F = -cv^2$:

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{v_0 ct}{m}}. \tag{8.3.6}$$

8.4 Een massa-veer systeem



Figuur 8.1: Een massa-veer systeem

We beschouwen een massa *m* die ligt op een wrijvingsloze tafel en vast zit aan een veer met veerconstante *k*, zie figuur 8.1. De kracht die op de massa werkt is dan $F = -kx$, dus de differentiaalvergelijking voor $x(t)$ wordt dan:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t) \tag{8.4.1}$$

Hier zoeken we naar een functie van de tijd die na twee keer differentiëren weer zichzelf oplevert met een minteken. De functies die hieraan voldoen zijn de goniometrische functies sin ωt en cos ωt. De algemene oplossing van deze vergelijking luidt dan ook

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t), \tag{8.4.2}$$

met $\omega = \sqrt{k/m}$ en *A* en *B* twee willekeurige constanten. Volledig gelijkwaardige oplossingen zijn

$$x(t) = C\cos(\omega t + \phi), \tag{8.4.3}$$

en

$$x(t) = D\sin(\omega t + \psi), \tag{8.4.4}$$

met via de randvoorwaarden te bepalen constanten. De oplossing van dit systeem is een trilling met frequentie $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m}$.

Door weer de beginsituatie op te leggen kunnen de constanten bepaald worden. Zo geeft bijvoorbeeld $x(0) = x_0$ en $dx(0)/dt = v_0$ als unieke oplossing:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) \tag{8.4.5}$$

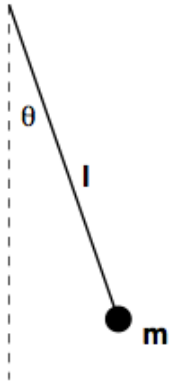
8.4.1 Een slinger

Het volgende probleem dat we beschouwen is een slinger. Voor een massa m die aan een massaloos touw hangt, krijg je de volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta(t). \tag{8.4.6}$$

Deze differentiaalvergelijking heeft geen oplossingen in termen van bekende functies. Voor kleine uitwijkingen θ kun je de oplossingen wel benaderen. Dan geldt namelijk $\sin\theta \approx \theta$, dus wordt de benaderde differentiaalvergelijking:

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta(t), \tag{8.4.7}$$



Figuur 8.2: Een slinger

wat identiek is aan de differentiaalvergelijking voor het massa-veer systeem uit de vorige paragraaf. De massa gaat dus slingeren met frequentie $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{g/l}$.

8.5 Gedempte trilling

We beschouwen wederom een massa m aan een veer met veerconstante k, maar deze keer is de tafel niet wrijvingsloos. De wrijvingskracht is evenredig met de snelheid: $F_w = -cv$. De differentiaalvergelijking voor $x(t)$ wordt dan:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) - c\frac{dx(t)}{dt}. \tag{8.5.1}$$

Ook hier kunnen we oplossingen vinden door het substitueren van goniometrische functies. Het is echter handiger om voor de variabele $x(t)$ ook complexe oplossingen toe te laten. De echte oplossing vinden we door uiteindelijk van de complexe oplossing het reële deel te nemen. Omdat in de vergelijking alleen lineaire termen staan van x en zijn afgeleiden proberen we als oplossing,

$$x(t) = Ae^{\lambda t}. \tag{8.5.2}$$

De differentiaalvergelijking reduceert dan tot een kwadratische vergelijking

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0, \tag{8.5.3}$$

met als oplossingen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4km}\,. \tag{8.5.4}$$

De oplossing van de differentiaalvergelijking wordt dan

$$x(t) = Ae^{-\lambda_1 t} + Be^{-\lambda_2 t}. \tag{8.5.5}$$

Deze oplossing vertoont drie soorten gedrag, afhankelijk van de grootte van de coëfficiënten *m*, *k* en *c*. Als de wrijving groot is, om precies te zijn $c^2 > 4km$, vinden we de reële oplossing

$$x(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}\left[Ae^{\frac{\sqrt{c^2-4km}}{2m}t} + Be^{-\frac{\sqrt{c^2-4km}}{2m}t}\right]. \tag{8.5.6}$$

De constanten *A* en *B* zijn integratie-constanten die bepaald moeten worden met de randvoorwaarden. Voor $c^2 < 4km$ geldt deze oplossing niet, omdat het getal onder het wortelteken negatief wordt en de termen in de exponent complex worden. De complexe oplossing is:

$$x(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}\left[Ce^{i\frac{\sqrt{4km-c^2}}{2m}t} + De^{-i\frac{\sqrt{4km-c^2}}{2m}t}\right], \tag{8.5.7}$$

waarin *C* en *D* complexe constanten zijn. Het reële deel van de oplossing vinden we door gebruik te maken van de identiteit van Euler,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta 0, \tag{8.5.8}$$

met als resultaat

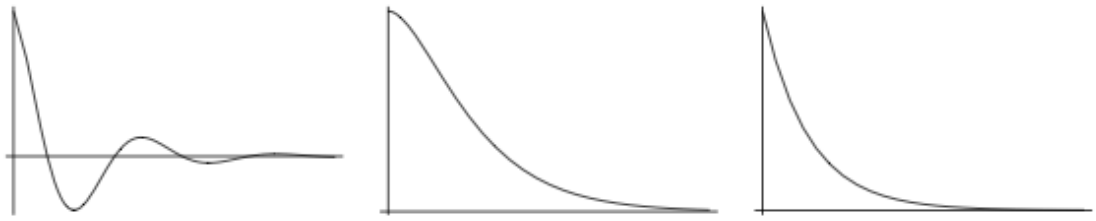
$$x(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}\left[A\cos\left(\frac{\sqrt{4km-c^2}}{2m}t\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{4km-c^2}}{2m}t\right)\right], \tag{8.5.9}$$

waarin *A* en *B* nu reëel zijn. Merk op dat je voor c = 0 weer de oplossing zonder wrijving (8.5.2) krijgt.

Een bijzondere geval treedt op als $c^2 = 4km$, de methode levert dan maar één oplossing die in zijn algemeenheid niet kan voldoen aan twee randvoorwaarden. We moeten dus iets anders proberen. Hier volstaan we met het geven van de oplossing:

$$x(t) = (At + B)e^{-\frac{c}{2m}t}. \tag{8.5b.10}$$

Controleer deze d.m.v. invullen. De drie oplossingen staan getekend in figuur 8.3.



Figuur 8.3: Oplossingen van de gedempte trilling ($c^2 - 4km > 0, = 0$ en < 0)

In het geval van veel wrijving zal de oplossing in één keer (exponentieel) uitdempen naar de evenwichtsstand. In het geval van weinig wrijving zal de oplossing trillen om de evenwichtsstand met exponentieel afnemende amplitude.