

FUNCTIONS EN REEKSEN

J.J. Duistermaat

© Mathematisch Instituut
Universiteit Utrecht
Augustus 2002
Gecorrigeerd juni 2005
Aangepast augustus 2011

Inhoudsopgave

1	Partiële en Totale Afgeleiden	1
1.1	Partiële Afgeleiden	1
1.2	Weglopen in een Willekeurige Richting	3
1.3	De Totale Afgeleide	5
1.4	Rekenregels voor Totale Afgeleiden	11
1.5	Vraagstukken bij Hoofdstuk 1	14
2	Verwisselingsstellingen	21
2.1	Verwisseling van Limieten	21
2.2	Verwisseling van de Differentiatievolgorde	22
2.3	Limietnemen onder het Integraalteken	25
2.4	Differentiatie onder het Integraalteken	28
2.5	Verwisseling van de Integratievolgorde	30
2.6	Vraagstukken bij Hoofdstuk 2	32
3	Lijnintegralen	36
3.1	Lijnintegralen van Differentiaalvormen	36
3.2	Exacte Differentiaalvormen	44
3.3	Gesloten Differentiaalvormen	46
3.4	De Stelling van Stokes	51
3.5	Vraagstukken bij Hoofdstuk 3	53
4	Complexe Functies	59
4.1	Complexe Getallen	59
4.2	Complexe Veeltermen	63
4.3	De Complexe Exponentiële Functie	65
4.4	Complex Differentieerbare Functies	69
4.5	Cauchy's Integraalformule	73
4.6	Vraagstukken bij Hoofdstuk 4	81
5	Reeksen van Functies	93
5.1	Uniforme Convergentie	93
5.2	Machtreeksen	99
5.3	Analytisch en Complex Differentieerbaar	105
5.4	Vraagstukken bij Hoofdstuk 5	112
6	Fourier-reeksen	119
6.1	Elementaire Theorie	119
6.2	De Dirichlet-kern en Functies met Sprongen	129
6.3	Orthonormale Stelsels	137
6.4	Hilbert-ruimten	145
6.5	Fourier-reeksen en Machtreeksen	149
6.6	Fourier-integralen	152
6.7	Vraagstukken bij Hoofdstuk 6	158

Index

Voorwoord

Deze tekst is samengesteld uit diverse vroegere collegedictaten die zijn geschreven door Dr. J.D. Stegeman, Dr. J.A.C. Kolk, Dr. E.P. van den Ban en mijzelf. Hierbij is geprobeerd om er opnieuw een lopend verhaal van te maken.

Om de zelfstandige leesbaarheid te bevorderen zijn af en toe bekende feiten in het kort herhaald. Ook zijn er 'luikjes open gezet' naar verdere ontwikkelingen. Hierdoor bevat de tekst meer dan op het college en bij de oefeningen behandeld kan worden. De verplichte tentamenstof is een deelverzameling van wat op het college en bij de oefeningen wordt behandeld.

Hans Duistermaat,
Utrecht, juli 2003.

1 Partiële en Totale Afgeleiden

In dit hoofdstuk bespreken we het differentiëren van functies van meer dan één variabele. Hoewel in dit college de meeste toepassingen betrekking hebben op functies van twee variabelen, geven we de basistheorie voor een willekeurig aantal variabelen, omdat dat nauwelijks extra werk kost. Alleen de notatie wordt daardoor iets zwaarder, maar dat hoort na een college Lineaire Algebra geen al te grote problemen op te leveren.

1.1 Partiële Afgeleiden

Zij $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ een reëelwaardige functie van n variabelen, gedefinieerd op een omgeving X van een gegeven punt ξ in $\mathbb{R}^n$. Zij $1 \leq j \leq n$. Fixeren we de coördinaten met rangnummer $k \neq j$, en laten we de j -de coördinaat nog vrij bewegen, dan krijgen we de reëelwaardige functie

$$\phi : x_j \mapsto f(\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, x_j, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n) \quad (1.1)$$

van één reële variabele x_j . Deze functie is gedefinieerd op de verzameling

$$I(\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n) := \{x_j \in \mathbb{R} \mid (\xi_1, \dots, \xi_{j-1}, x_j, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n) \in X\},$$

waarvan gemakkelijk is na te gaan dat dit een omgeving is van het speciale punt ξ_j in $\mathbb{R}$.

Definitie 1.1 De functie f heet *partieel differentieerbaar naar de j -de variabele, in het punt $\xi \in X$* , als de functie (1.1) differentieerbaar is in het punt $x_j = \xi_j$. Is dit het geval, dan wordt de afgeleide van de functie (1.1) in het punt $x_j = \xi_j$ de *partiële afgeleide van f naar de j -de variabele in het punt ξ* genoemd en genoteerd met $D_j f(\xi)$.

Men zegt dat f *partieel differentieerbaar naar de j -de variabele* is als voor iedere $x \in X$ geldt dat f partieel differentieerbaar is naar de j -de variabele in het punt x . In dat geval kunnen we de partiële afgeleide $D_j f(x)$ beschouwen als een functie van $x \in X$. Dit definieert een nieuwe reëelwaardige functie op X , die we met $D_j f : X \rightarrow \mathbb{R}$ aanduiden en die de *partiële afgeleide van f naar de j -de variabele* heet.

De klassieke notatie voor de partiële afgeleide $D_j f(x)$ van f naar de j -de variabele is

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}, \quad (1.2)$$

waarin we de notatie $x = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$ hebben gebruikt en alle coördinaten als variabelen worden opgevat. (Deze variabelen mogen met willekeurige andere letters genoteerd worden, zoals bijvoorbeeld (x, y) voor de coördinaten in het vlak.) $\oslash$

Opmerking 1.2 Men schrijft in plaats van (1.2) ook wel $\partial f(x)/\partial x_j$, of

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)$$

als de formule voor $f(x)$ te groot is om boven een breukstreep te zetten. Het gebruik om partiële afgeleiden met het symbool ∂ aan te duiden is omstreeks 1840 door Jacobi ingevoerd. In het Engels wordt dit symbool, de ‘kromme d’, uitgesproken als ‘partial’ of ‘del’.

Als men, voor een gegeven $\xi \in X$, de partiële afgeleide in het punt ξ aan wil geven, dan betekent dit dat we van de functie in (1.2) de waarde in het punt $x = \xi$ dienen te nemen, dus

$$D_j f(\xi) = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right|_{x=\xi}.$$

Het is ook gebruikelijk (en verleidelijk) om de functie $D_j f$ aan te duiden als $\partial f / \partial x_j$. Dit leidt dan tot de kortere notatie

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi)$$

voor de partiële afgeleide van f in het punt ξ . Deze notatie is echter verwarrend omdat het symbool x_j niet onder de coördinaten van ξ voorkomt. Bijvoorbeeld, als $f(y, t)$ een functie is van de twee variabelen y en t , dan leidt dit tot de notatie

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

voor de partiële afgeleide van f naar de eerste variabele in het punt $(0, 0)$. Men kan zich hier terecht afvragen of met de variabele y , waarnaar gedifferentieerd wordt, de eerste of de tweede variabele bedoeld wordt.

Nog verwarrender is een uitdrukking als

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, x),$$

met als voor de hand liggende interpretaties

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{y=x} = (D_1 f)(x, x),$$

of

$$\left. \frac{\partial f(y, x)}{\partial x} \right|_{y=x} = (D_2 f)(x, x),$$

of

$$\frac{d}{dx} f(x, x),$$

hetgeen weer iets heel anders is.

We willen niet pietluttig doen, maar het is wel aanbevelenswaardig om notaties zó te kiezen dat duidelijk is wat er bedoeld wordt. $\oslash$

Omdat partiële differentiatie in feite differentiatie is van een functie van één reële variabele (namelijk de j -de coördinaat), zijn de volgende rekenregels een direct gevolg van de corresponderende bekende rekenregels voor functies van één variabele.

Lemma 1.3 *Zij f, g partieel differentieerbaar naar de j -de variabele. Dan zijn $f + g$ en $f g$ partieel differentieerbaar naar de j -de variabele en*

$$D_j(f + g) = D_j f + D_j g, \quad \text{ofwel} \quad \frac{\partial(f(x) + g(x))}{\partial x_j} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial g(x)}{\partial x_j} \quad \text{en} \quad (1.3)$$

$$D_j(f g) = (D_j f) g + f D_j g \quad \text{ofwel} \quad \frac{\partial(f(x) g(x))}{\partial x_j} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} g(x) + f(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_j} \quad (1.4)$$

Is bovendien $f(x) \neq 0$, dan is $1/f$ partieel differentieerbaar naar de j -de variabele in het punt x en is

$$D_j \left(\frac{1}{f} \right) = -\frac{D_j f}{f^2} \quad \text{ofwel} \quad \frac{\partial(1/f(x))}{\partial x_j} = -\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} / f(x)^2. \quad (1.5)$$

Lemma 1.4 Zij X een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$, ξ een inwendig punt van X en $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ partieel differentieerbaar naar de j -de variabele. Als f een lokaal maximum, resp. minimum heeft in het punt ξ , dan is de partiële afgeleide van f , naar de j -de variabele, in het punt ξ gelijk aan nul.

Bewijs Het gegeven impliceert dat de functie ϕ van één variabele, die gedefinieerd is in (1.1), een lokaal maximum, resp. minimum heeft in het punt $x_j = \xi_j$. Uit de theorie van differentieerbare functies van één variabele is bekend dat hieruit volgt dat $\phi'(\xi_j) = 0$. $\square$

Zij X een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ en neem nu aan dat voor iedere $1 \leq j \leq n$ de functie $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ partieel differentieerbaar is naar de j -de variabele. In dit geval is de *gradiënt* van f in het punt x de vector in $\mathbb{R}^n$ die is gedefinieerd door

$$\text{grad } f(x) := \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right). \quad (1.6)$$

Men zegt dat ξ een *stationair* (of ook wel *kritiek*) punt is van f als $\text{grad } f(\xi) = 0$, dat wil zeggen: voor iedere $1 \leq j \leq n$ geldt dat $\partial f(x)/\partial x_j = 0$ als $x = \xi$. Het *variatieprincipe* van Lemma 1.4 zegt dat als f een lokaal maximum of minimum in het punt ξ heeft, dan is ξ een stationair punt van f .

Voorbeeld 1.5 Zij $f(x, y) = x^2 + y^2$. Dan heeft f een minimum in $(0, 0)$, dus is $\text{grad } f(0, 0) = 0$. Dit kan ook door een berekening van de partiële afgeleiden geverifieerd worden: $\partial f(x, y)/\partial x = 2x = 0$ als $x = 0$ en $\partial f(x, y)/\partial y = 2y = 0$ als $y = 0$.

Neem nu $f(x, y) = x^2 - y^2$. Ook in dit geval is $\text{grad } f(0, 0) = 0$, dus is $(0, 0)$ een stationair punt van f . Echter, f heeft geen lokaal minimum in $(0, 0)$ omdat er willekeurig dicht bij $(0, 0)$ punten (x, y) zijn met $f(x, y) < 0 = f(0, 0)$, neem bijvoorbeeld $x = 0$ en $y \neq 0$. Anderzijds zien we, door punten (x, y) te beschouwen met $y = 0$ en $x \neq 0$, dat f ook geen lokaal maximum heeft in $(0, 0)$. Een stationair punt van f waarin f geen lokaal minimum en ook geen lokaal maximum heeft, wordt ook wel een *zadelpunt* van f genoemd. $\odot$

1.2 Weglopen in een Willekeurige Richting

In de definitie van partiële afgeleide van de functie f naar de j -de variabele wordt alleen de j -de coördinaat van het punt x gevarieerd. We gaan nu de toename $f(x) - f(\xi)$ van de functie f onderzoeken voor willekeurige punten x in een omgeving van het uitgangspunt ξ . We nemen daarbij aan dat f gedefinieerd is op een open deelverzameling X van $\mathbb{R}^n$, dat $x, \xi \in X$ en dat f partieel differentieerbaar is naar iedere variabele.

Definieer

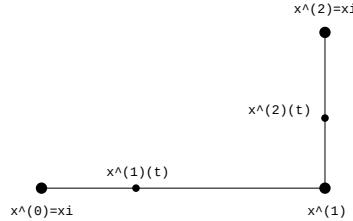
$$x^{(j)} = (x_1, \dots, x_j, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n),$$

waarbij $x^{(0)} := \xi$ en $x^{(n)} := x$. Het rechte lijnstuk van $x^{(j-1)}$ naar $x^{(j)}$ wordt geparametriseerd door

$$x^{(j)}(t) := (x_1, \dots, x_{j-1}, \xi_j + t(x_j - \xi_j), \xi_{j+1}, \dots, \xi_n), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (1.7)$$

Merk op dat $x^{(j)}(0) = x^{(j-1)}$, $x^{(j)}(1) = x^{(j)}$ en dat alleen de j -de coördinaat van $x^{(j)}(t)$ verandert als t van 0 naar 1 loopt.

Het idee is nu om van het uitgangspunt ξ naar het punt x te lopen via de rechte lijnstukken $x^{(j)}(t)$, $t \in [0, 1]$, $1 \leq j \leq n$. We nemen in het vervolg aan dat voor iedere $1 \leq j \leq n$ en iedere $t \in [0, 1]$ geldt dat $x^{(j)}(t) \in X$.



Het pad van het punt ξ naar het punt x in het vlak ($n = 2$).

Omdat $x^{(0)} = \xi$ en $x^{(n)} = x$, geldt dat

$$f(x) - f(\xi) = \sum_{j=1}^n \left(f(x^{(j)}) - f(x^{(j-1)}) \right).$$

Voor iedere $1 \leq j \leq n$ schrijven we $f(x^{(j)}) - f(x^{(j-1)}) = \phi_j(1) - \phi_j(0)$ als de toename van de reëelwaardige functie

$$\phi_j(t) := f(x^{(j)}(t)) \quad (1.8)$$

van de reële variabele $t \in [0, 1]$.

Met het oog op (1.7) impliceert de aanname dat f partieel differentieerbaar is naar de j -de variabele dat de functie ϕ_j differentieerbaar is op het interval $[0, 1]$. Toepassing van de middelwaardestelling op de functie ϕ_j leidt tot de existentie van een $0 < t < 1$, waarvoor $\phi_j(1) - \phi_j(0) = \phi'_j(t)$, de afgeleide van de functie ϕ_j in het tussenpunt t . Merk op dat dit tussenpunt $t = t_j(x)$ nog op een niet nader gespecificeerde manier afhangt van de keuze van j en van het eindpunt x .

Combinatie van (1.8), (1.7) en de kettingregel geeft dat

$$\phi'_j(t) = D_j f(x^{(j)}(t)) (x_j - \xi_j),$$

hetgeen tot de conclusie leidt dat

$$f(x) - f(\xi) = \sum_{j=1}^n L_j(x) (x_j - \xi_j), \quad (1.9)$$

waarin, voor iedere $1 \leq j \leq n$,

$$L_j(x) = D_j f(x^{(j)}(t)) \quad \text{voor een } t = t_j(x) \in]0, 1[. \quad (1.10)$$

Dit leidt tot de volgende conclusie.

Stelling 1.6 Zij X een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ en $\xi \in X$. Onderstel dat voor iedere $1 \leq j \leq n$ de functie f partieel differentieerbaar is naar de j -de variabele en dat de functie

$D_j f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continu is in het punt ξ . Dan is er een omgeving U van ξ in X en zijn er functies $L_j : U \rightarrow \mathbb{R}$, waarvoor geldt dat

$$f(x) - f(\xi) = \sum_{j=1}^n L_j(x) (x_j - \xi_j), \quad x \in U \quad \text{en} \quad \lim_{x \rightarrow \xi} L_j(x) = D_j f(\xi). \quad (1.11)$$

Bewijs Zij $\epsilon > 0$. Omdat X open is, $\xi \in X$ en de functies $D_j f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continu zijn in het punt ξ , is er een $\delta > 0$ met de eigenschap dat voor iedere $y \in \mathbb{R}^n$ met $\|y - \xi\| \leq \delta$ geldt dat $y \in X$ en $|D_j f(y) - D_j f(\xi)| \leq \epsilon$ voor iedere $1 \leq j \leq n$.

Neem nu aan dat $x \in \mathbb{R}^n$ en $\|x - \xi\| \leq \delta$. Zij $1 \leq j \leq n$ en $0 \leq t \leq 1$. De schatting

$$\|x^{(j)}(t) - \xi\|^2 = \sum_{i=1}^{j-1} (x_i - \xi_i)^2 + t^2 (x_j - \xi_j)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2 = \|x - \xi\|^2 \leq \delta^2, \quad (1.12)$$

impliceert dat $\|x^{(j)}(t) - \xi\| \leq \delta$ en daarmee dat $x^{(j)}(t) \in X$. Dit impliceert dat we (1.9), (1.10) tot onze beschikking hebben, waarbij $|D_j f(y) - D_j f(\xi)| \leq \epsilon$ voor $y = x^{(j)}(t)$ impliceert dat $|L_j(x) - D_j f(\xi)| \leq \epsilon$. Omdat er voor iedere $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ is waarvoor deze conclusie geldt, hebben we bewezen dat $L_j(x)$ naar $D_j f(\xi)$ convergeert als $x \rightarrow \xi$. $\square$

Voor vectorwaardige functies $f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$ definiëren we, voor iedere $1 \leq i \leq p$, de reëelwaardige functie $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ door middel van $f_i(x) := f(x)_i$, $x \in X$. Men noemt f_i ook wel *de i -de coördinaatsfunctie van de afbeelding $f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$* .

Is voor iedere x in een omgeving van ξ , iedere $1 \leq i \leq p$ en iedere $1 \leq j \leq n$ een reëel getal $L_{ij}(x)$ gegeven, dan definieert

$$(L(x)v)_i := \sum_{j=1}^n L_{ij}(x) v_j, \quad v \in \mathbb{R}^n$$

een (nog van x afhankelijke) lineaire afbeelding $L(x)$ van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^p$. Preciezer, dit is de lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^p$ waarvan de matrix gegeven wordt door de reële getallen $L_{ij}(x)$, het matrixelement op de i -de rij en in de j -kolom. Met deze notatie leidt Stelling 1.6, met f vervangen door de coördinaatsfuncties f_i , tot

Gevolg 1.7 Zij X een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$ en $\xi \in X$. Onderstel dat voor iedere $1 \leq i \leq p$ en iedere $1 \leq j \leq n$ de functie f_i partieel differentieerbaar is naar de j -de variabele en dat de functie $D_j f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ continu is in het punt ξ . Dan is er een omgeving U van ξ in X en zijn er functies $L_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$, waarvoor geldt dat

$$f(x) - f(\xi) = L(x) (x - \xi), \quad x \in U \quad \text{en} \quad \lim_{x \rightarrow \xi} L_{ij}(x) = D_j f_i(\xi). \quad (1.13)$$

1.3 De Totale Afgeleide

In de verdere discussie van afbeeldingen van n -dimensionale ruimten naar p -dimensionale ruimten zullen we regelmatig gebruik maken van de volgende definities en opmerkingen over lineaire afbeeldingen van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^p$.

Vanwege het optreden van functies waarvan de waarden lineaire afbeeldingen van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^p$ zijn, definiëren we de *afstand* tussen twee lineaire afbeeldingen A en B als de norm $\|A - B\|$ van het verschil $A - B$ van de lineaire afbeeldingen A en B . Hierin is de norm van de lineaire afbeelding $L = A - B$ gedefinieerd door

$$\|L\| := \left(\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n (L_{ij})^2 \right)^{1/2}, \quad (1.14)$$

waarin de L_{ij} de matrixcoëfficiënten van L voorstellen. Anders gezegd, de norm van L is gelijk aan de norm van de vector in $\mathbb{R}^{np}$ waarvan de coördinaten de matrixcoëfficiënten van L zijn.

De verzameling $\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ van alle lineaire afbeeldingen van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^p$ wordt hiermee, inclusief de norm, via de matrixcoëfficiënten geïdentificeerd met de np -dimensionale ruimte $\mathbb{R}^{np}$. Dit impliceert dat $L(x) \rightarrow L$ in $\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ als $x \rightarrow \xi$, dan en slechts dan als voor iedere i en j geldt dat $L(x)_{ij} \rightarrow L_{ij}$ als $x \rightarrow \xi$.

Het volgende lemma is handig voor het verkrijgen van schattingen voor uitdrukkingen waarin lineaire afbeeldingen voorkomen.

Lemma 1.8 Voor iedere lineaire afbeelding $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ en iedere vector $v \in \mathbb{R}^n$ geldt dat

$$\|L v\| \leq \|L\| \|v\|. \quad (1.15)$$

Is M een lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^p$ naar $\mathbb{R}^q$, dan geldt dat

$$\|M \circ L\| \leq \|M\| \|L\|. \quad (1.16)$$

Bewijs Toepassing van de Cauchy-Schwarz-ongelijkheid levert voor iedere $1 \leq i \leq p$ dat

$$((L v)_i)^2 = \left(\sum_{j=1}^n L_{ij} v_j \right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n (L_{ij})^2 \right) \|v\|^2.$$

Sommatie hiervan over i geeft dat $\|L v\|^2 \leq \|L\|^2 \|v\|^2$, waaruit door worteltrekken (1.15) volgt.

Het bewijs van (1.16) gaat op analoge manier, door toepassen van de Cauchy-Schwarz-ongelijkheid op

$$((M L)_{hj})^2 = \left(\sum_{i=1}^p M_{hi} L_{ij} \right)^2,$$

gevolgd door sommatie over alle h en j . □

Opmerking 1.9 Een oefening in het werken met normen van lineaire afbeeldingen. Onderstel $v, v' \in \mathbb{R}^n$ en $L, L' \in \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Gebruikmakend van (1.15) krijgen we uit

$$L' v' - L v = (L' - L) v + L (v' - v) + (L' - L) (v' - v)$$

dat

$$\|L' v' - L v\| \leq \|L' - L\| \|v\| + \|L\| \|v' - v\| + \|L' - L\| \|v' - v\|. \quad (1.17)$$

Laat $v(x)$, $v \in \mathbb{R}^n$ en $L(x)$, $L \in \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, waarin $v(x)$ en $L(x)$ afhangen van $x \in \mathbb{R}^m$. Neem aan dat $v(x) \rightarrow v$ en $L(x) \rightarrow L$ als $x \rightarrow \xi$. Dan geldt dat $L(x) v(x) \rightarrow L v$ als $x \rightarrow \xi$. Men kan dit inzien door de coëfficiënten uit te schrijven. Echter, (1.17) met $L' = L(x)$ en $v' = v(x)$ geeft een directe schatting voor de afstand $\|L(x) v(x) - L v\|$ in termen van de afstanden $\|v(x) - v\|$ en $\|L(x) - L\|$. Eenzelfde opmerking kan gemaakt worden over de norm van het verschil van producten van matrices. $\odot$

Het volgende lemma is een observatie van Hadamard uit het begin van de 20-ste eeuw.

Lemma 1.10 *Zij $X \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$ en zij ξ een inwendig punt van X . Dan zijn de volgende twee uitspraken equivalent.*

a) *Er is een afbeelding $L : X \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, waarvoor*

$$f(x) - f(\xi) = L(x) (x - \xi), \quad x \in X \quad \text{en} \quad \lim_{x \rightarrow \xi} L(x) = L(\xi). \quad (1.18)$$

b) *Er is een lineaire afbeelding A van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^p$ met de eigenschap dat*

$$\|f(x) - f(\xi) - A(x - \xi)\| / \|x - \xi\| \rightarrow 0 \quad \text{als} \quad x \in X, x \neq \xi \quad \text{en} \quad x \rightarrow \xi. \quad (1.19)$$

Bewijs Als (1.18) geldt, dan is $f(x) - f(\xi) - L(\xi)(x - \xi) = (L(x) - L(\xi))(x - \xi)$, terwijl uit (1.15) volgt dat $\|(L(x) - L(\xi))(x - \xi)\| \leq \|L(x) - L(\xi)\| \|x - \xi\|$. Dit leidt tot

$$\|f(x) - f(\xi) - L(\xi)(x - \xi)\| / \|x - \xi\| \leq \|L(x) - L(\xi)\|,$$

waarbij het rechterlid naar 0 convergeert als $x \rightarrow \xi$ op grond van (1.18). Dit bewijst (1.19) met $A = L(\xi)$.

Stel nu omgekeerd dat (1.19) geldt. Schrijf

$$\begin{aligned} r(x) &:= f(x) - f(\xi) - A(x - \xi), \\ L(\xi) &:= A \quad \text{en} \\ L_{ij}(x) &:= A_{ij} + r_i(x) (x_j - \xi_j) / \|x - \xi\|^2 \quad \text{als} \quad x \in X \quad \text{en} \quad x \neq \xi. \end{aligned}$$

Vermenigvuldiging van $x_j - \xi_j$ met $x_j - \xi_j$ en sommatie over j levert $\|x - \xi\|^2$. Daarom geldt voor iedere $x \in X$ met $x \neq \xi$ dat

$$\sum_{j=1}^n L_{ij}(x) (x_j - \xi_j) = \sum_{j=1}^n A_{ij} (x_j - \xi_j) + r_i(x) = f_i(x) - f_i(\xi),$$

terwijl deze identiteit voor $x = \xi$ ook geldig is omdat dan zowel het linker- als het rechterlid gelijk is aan nul. Dit bewijst de formule voor $f(x)$ in (1.18). Verder krijgen we dat

$$\|L(x) - L(\xi)\|^2 = \|r(x)\|^2 \|x - \xi\|^2 / \|x - \xi\|^4 = \|r(x)\|^2 / \|x - \xi\|^2,$$

dus $\|L(x) - L(\xi)\| = \|r(x)\| / \|x - \xi\|$, hetgeen vanwege (1.19) naar nul convergeert als $x \rightarrow \xi$. Dit bewijst (1.18). $\square$

In woorden betekent (1.19) dat de toename $f(x) - f(\xi)$ van de functie f zó goed benaderd wordt door $A(x - \xi)$, het beeld onder de lineaire afbeelding A van de toename $x - \xi$ van het argument, dat het verschil $r(x)$ van kleinere orde is dan $x - \xi$, in de zin dat $\|r(x)\| / \|x - \xi\| \rightarrow 0$ als $x \rightarrow \xi$.

Lemma 1.11 Als (1.18), resp. (1.19) geldt, dan is voor iedere $1 \leq i \leq p$ en $1 \leq j \leq n$ de functie f_i in het punt ξ partieel differentieerbaar naar de j -de variabele en er geldt $L_{ij}(\xi) = D_j f_i(\xi)$, resp. $A_{ij} = D_j f_i(\xi)$.

Bewijs Zij e_j de j -de standaardbasisvector en $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$. Invullen van $x = \xi + t e_j$ in (1.18) geeft dat

$$L_{ij}(\xi + t e_j) = (f_i(\xi + t e_j) - f_i(\xi)) / t.$$

Hierin de limiet nemend voor $t \rightarrow 0$ zien we dat f_i partieel differentieerbaar is naar de j -de variabele in het punt ξ , met $D_j f_i(\xi) = L_{ij}(\xi)$.

Als (1.19) geldt, dan geeft het bewijs van Lemma 1.10 dat (1.18) geldt met $L(\xi) = A$, dus $A_{ij} = D_j f_i(\xi)$. $\square$

Definitie 1.12 Zij $X \subset \mathbb{R}^n$, ξ een inwendig punt van X en $f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$. Men noemt f (totaal) differentieerbaar in het punt ξ als aan de voorwaarde b) in Lemma 1.10 is voldaan. Merk op dat hiermee equivalent is dat aan de voorwaarde a) in Lemma 1.10 is voldaan.

De volgens Lemma 1.11 eenduidig bepaalde lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ heet de totale afgeleide $Df(\xi)$ van f in het punt ξ .

Als X een open deelverzameling is van $\mathbb{R}^n$ en $f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$, dan noemt men f (totaal) differentieerbaar als voor iedere $x \in X$ geldt dat f totaal differentieerbaar is in het punt x . De totale afgeleide $Df(x)$, beschouwd als functie van $x \in X$, definieert een afbeelding $Df : X \rightarrow \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. $\odot$

Opmerking 1.13 Als $n = 1$, dan is $x - \xi$ een scalar en impliceren (1.18) en de lineariteit van de afbeelding $L(x)$ dat $f(x) - f(\xi) = (x - \xi) L(x) 1$. Als $x \neq \xi$ dan volgt hieruit dat $L(x) 1 = (x - \xi)^{-1} (f(x) - f(\xi))$, waarbij we de scalar $(x - \xi)^{-1}$ zoals gebruikelijk vóór de vector $f(x) - f(\xi)$ zetten in het geval dat $p > 1$. Hiermee is de lineaire afbeelding $L(x)$ voor $x \neq \xi$ eenduidig bepaald door middel van de formule $L(x) v = v (x - \xi)^{-1} (f(x) - f(\xi))$ voor iedere $v \in \mathbb{R}$. De limietuitspraak in (1.18) is equivalent met de uitspraak dat f differentieerbaar is in het punt ξ en dat $f'(\xi) = L(\xi) 1$. In termen van Definitie 1.12 betekent dit dat f totaal differentieerbaar is in het punt ξ dan en slechts dan als de functie f van één variabele differentieerbaar is in het punt ξ en dat

$$f'(\xi) = Df(\xi) 1. \quad (1.20)$$

Beschouw deze wat komische formule maar als een oefening in het opvatten van de totale afgeleide als een lineaire afbeelding.

Als $n > 1$ dan is er nog steeds bij iedere $x \in X$ met $x \neq \xi$ een lineaire afbeelding $L(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ waarvoor $f(x) - f(\xi) = L(x)(x - \xi)$, maar deze lineaire afbeelding is dan verre van eenduidig bepaald. Dit kan als volgt ingezien worden. Als $v \in \mathbb{R}^n$ en $v \neq 0$, dan is er een basis $v^{(1)}, \dots, v^{(n)}$ van $\mathbb{R}^n$ waarvan v één van de elementen is, zeg $v = v^{(j)}$. Bijvoorbeeld, als de j -de coördinaat van v niet gelijk aan nul is, dan kunnen we nemen $v^{(j)} = v$ en $v^{(i)} = e_i$ als $i \neq j$. Nu is het uit de Lineaire Algebra bekend dat er bij iedere keuze van vectoren $w^{(i)} \in \mathbb{R}^k$ precies één lineaire afbeelding $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ is waarvoor $L v^{(i)} = w^{(i)}$ voor alle $1 \leq i \leq n$. Nemen we $v = v^{(j)} = x - \xi$ en $w^{(j)} = f(x) - f(\xi)$, dan is $L(x - \xi) = f(x) - f(\xi)$. Echter, de vrijheid in de keuze van de $n - 1$ vectoren $w^{(i)} \in \mathbb{R}^k$ met $i \neq j$ laat zien dat de lineaire afbeelding L met deze eigenschap verre van eenduidig is. Deze opmerking is gerelateerd aan de opmerking dat delen door vectoren in $\mathbb{R}^n$ niet goed gedefinieerd is als $n > 1$. Als gevolg hiervan kan de afgeleide van de functie f in het punt ξ niet gedefinieerd worden als de limiet voor $x \rightarrow \xi$ van $(f(x) - f(\xi))/(x - \xi)$ als $n > 1$. $\odot$

Lemma 1.14 Als f totaal differentieerbaar is in het punt ξ , dan is f continu in het punt ξ .

Bewijs Als $x \rightarrow \xi$ dan geldt voor iedere i en j dat $L_{ij}(x) \rightarrow L_{ij}(\xi)$ en $x_j - \xi_j \rightarrow 0$. Vanwege de gebruikelijke rekenregels voor limieten volgt hieruit dat

$$L_{ij}(x) (x_j - \xi_j) \rightarrow L_{ij}(\xi) 0 = 0.$$

We lezen nu uit (1.18) af dat voor iedere $1 \leq i \leq p$ geldt dat $f_i(x) \rightarrow f_i(\xi)$ als $x \rightarrow \xi$, hetgeen impliceert dat $f(x) \rightarrow f(\xi)$ als $x \rightarrow \xi$. $\square$

In termen van Definitie 1.12 vatten we een aantal van de tot toe bereikte resultaten samen in de volgende stelling.

Stelling 1.15 Zij $X \subset \mathbb{R}^n$, ξ een inwendig punt van X en $f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$. Als voor iedere $1 \leq i \leq p$ en $1 \leq j \leq n$ de functie f_i partieel differentieerbaar is naar de j -de variabele en $D_j f_i$ is continu in het punt ξ , dan is f totaal differentieerbaar in het punt ξ .

Is omgekeerd f totaal differentieerbaar in het punt ξ , dan geldt voor iedere $1 \leq i \leq p$ en $1 \leq j \leq n$ dat de functie f_i partieel differentieerbaar is naar de j -de variabele in het punt ξ en dat $D_j f_i(\xi) = (Df(\xi))_{ij}$.

Is X open in $\mathbb{R}^n$ en $f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$, dan zijn de volgende twee uitspraken equivalent.

- i) Voor iedere $1 \leq i \leq p$ en $1 \leq j \leq n$ is de functie f_i partieel differentieerbaar naar de j -de variabele en $D_j f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ is continu.
- ii) f is totaal differentieerbaar en de afbeelding $Df : x \mapsto Df(x)$ is continu van X naar $\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

Bewijs De eerste, resp. tweede uitspraak volgt uit Gevolg 1.7, resp. Lemma 1.11.

Neem nu aan dat i) geldt. Uit de eerste uitspraak volgt dan dat f totaal differentieerbaar is. Uit de tweede uitspraak volgt vervolgens dat de matrixcoëfficiënten $(Df(x))_{ij} = D_j f_i(x)$ van $Df(x)$ continu van x afhangen.

Tenslotte volgt ii) $\implies$ i) uit de tweede uitspraak. $\square$

Als f totaal differentieerbaar is op X , dan wordt, voor iedere $x \in X$, de matrix van $Df(x)$ gegeven door

$$\text{de matrix van } Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

De matrix van partiële afgeleiden in het rechterlid van (1.21) heet ook wel de *Jacobi-matrix van de afbeelding f in het punt x* , een matrixwaardige functie van de n variabelen $(x_1, \dots, x_n)$.

Definitie 1.16 Zij X een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ en $f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$. Men noemt de afbeelding f *continu differentieerbaar* als aan een van de equivalente voorwaarden i) of ii) in Stelling 1.15 is voldaan. Merk op dat uit Lemma 1.14 volgt dat dit impliceert dat de afbeelding f continu is.

Notaties: $f \in C^1(X, \mathbb{R}^p)$, $f \in C^1(X)$, of $f \in C^1$, in afnemende mate van gedetailleerdheid. $\oslash$

In de definitie van de partiële afgeleide naar de j -de variabele lopen we vanuit het punt ξ weg in de richting van de j -de basisvector. Men kan ook de afbeelding onderzoeken waarbij men in de richting

van een willekeurige vector $v \in \mathbb{R}^n$ vanuit het punt ξ weglloopt. Dit leidt tot de volgende definitie. Zij $X \subset \mathbb{R}^n$, ξ een inwendig punt van X en $f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$. Men noemt f *richtingsdifferentieerbaar in het punt ξ , in de richting van de vector v* , als de functie $\phi : t \mapsto f(\xi + t v)$ differentieerbaar is in $t = 0$. Is dit het geval, dan noemt men $\phi'(0)$ de *richtingsafgeleide van f in het punt ξ in de richting van de vector v* . Notatie:

$$D_v f(\xi) := \left. \frac{df(\xi + t v)}{dt} \right|_{t=0}. \quad (1.22)$$

Als $v = 0$, dan is f op triviale manier richtingsdifferentieerbaar in de richting van v en $D_0 f(\xi) = 0$. Ook merken we op dat f partieel differentieerbaar is naar de j -de variabele, dan en slechts dan als f richtingsdifferentieerbaar is in de richting van de j -de standaardbasisvector e_j . In dat geval is $D_j f(\xi) = D_{e_j} f(\xi)$, hetgeen tot een lichte botsing van notaties leidt.

Lemma 1.17 *Zij f totaal differentieerbaar in het punt ξ . Dan geldt voor iedere $v \in \mathbb{R}^n$ dat f richtingsdifferentieerbaar is in het punt ξ in de richting van v en dat*

$$D_v f(\xi) = Df(\xi) v. \quad (1.23)$$

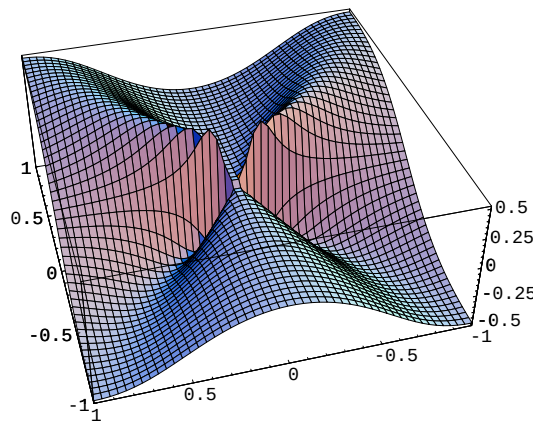
Omdat $Df(\xi)$ een lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^p$ is, volgt hieruit dat de richtingsafgeleide $D_v f(\xi)$ op een lineaire manier afhangt van de vector v .

Bewijs Door in (1.18) de vector $x - \xi$ te vervangen door $t v$ met $t \neq 0$, krijgen we dat

$$(f_i(\xi + t v) - f_i(\xi)) / t = \sum_{j=1}^n L_{ij}(\xi + t v) v_j \rightarrow \sum_{j=1}^n L_{ij}(\xi) v_j \quad \text{als } t \rightarrow 0.$$

Dit betekent dat f richtingsdifferentieerbaar is in het punt ξ in de richting van v en dat de richtingsafgeleide gegeven wordt door (1.23). $\square$

Voorbeeld 1.18 Definieer $f(x, y) = x y^2 / (x^2 + y^4)$ als $(x, y) \neq (0, 0)$ en $f(0, 0) = 0$. Dan is f continu differentieerbaar op $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.



$$f(x, y) = x y^2 / (x^2 + y^4) \text{ voor } -1 < x < 1, -1 < y < 1.$$

Neem $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ met $a \neq 0$. Dan is

$$\frac{f(tv) - f(0)}{t} = \frac{t^3 a b^2}{t(t^2 a^2 + t^4 b^4)} = \frac{a b^2}{a^2 + t^2 b^4} \rightarrow \frac{a b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a}$$

als $t \neq 0$ en $t \rightarrow 0$. Is anderzijds $b \neq 0$ en $t \neq 0$, dan is $(f(t, tb) - f(0, 0))/t = 0$. Dus in het punt $(0, 0)$ is f richtingsdifferentieerbaar in de richting van iedere vector, met $D_v f(0, 0) = b^2/a$ als $v = (a, b)$ en $a \neq 0$ en $D_v f(0, 0) = 0$ als $v = (0, b)$. Het is duidelijk dat deze richtingsafgeleide niet op een lineaire manier van de richtingsvector $v = (a, b)$ afhangt. Met het oog op Lemma 1.17 concluderen we dat f niet totaal differentieerbaar kan zijn in het punt $(0, 0)$.

Voor iedere $c \in \mathbb{R}$ en $y \neq 0$ is

$$f(c y^2, y) = \frac{c y^4}{c^2 y^4 + y^4} = \frac{c}{c^2 + 1}.$$

Stel dat de functie f continu is in het punt $(0, 0)$. Als $y \rightarrow 0$, dan $(c y^2, y) \rightarrow (0, 0)$ en dan zou de continuïteit van f in het punt $(0, 0)$ impliceren dat $f(c y^2, y)$ naar 0 convergeert als $y \rightarrow 0$. Echter, als $c \neq 0$ dan is $f(c y^2, y)$ voor iedere $y \neq 0$ gelijk aan de constante $c/(c^2 + 1) \neq 0$ en we krijgen een tegenspraak.

Anders gezegd, dit is een voorbeeld van een functie die in ieder punt differentieerbaar is met betrekking tot iedere variabele, zelfs richtingsdifferentieerbaar is in iedere richting, maar die in de oorsprong niet continu is. Ook met het oog op Lemma 1.14 kan deze functie dus niet totaal differentieerbaar zijn.

⊗

1.4 Rekenregels voor Totale Afgeleiden

Lemma 1.19 *Laten f en g totaal differentieerbare reëelwaardige functies in het punt ξ zijn. Dan zijn $f + g$ en $f g$ totaal differentieerbaar in het punt ξ en*

$$D(f + g)(\xi) = Df(\xi) + Dg(\xi), \quad (1.24)$$

$$D(f g)(\xi) = g(\xi) Df(\xi) + f(\xi) Dg(\xi). \quad (1.25)$$

Is bovendien $f(\xi) \neq 0$, dan is $1/f$ totaal differentieerbaar in het punt x en is

$$D(1/f)(\xi) = -\frac{1}{f(\xi)^2} Df(\xi). \quad (1.26)$$

Merk op dat we in de producten steeds de scalair (reële getallen) vóór de lineaire afbeeldingen hebben gezet, hetgeen de gebruikelijke volgorde is. Het opschrijven in de verkeerde volgorde zou erop kunnen wijzen dat men denkt dat $Df(\xi)$ een getal is (de afgeleide van f in het punt ξ), in plaats van een lineaire afbeelding.

Als f en g continu differentieerbaar zijn op een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$, dan volgt Lemma 1.19 met het oog op Stelling 1.15 uit Lemma 1.3. Men kan Lemma 1.19 echter ook zonder al te veel moeite direct uit Definitie 1.12 bewijzen. Rekenregels voor vectorwaardige totaal differentieerbare functies volgen door Lemma 1.19 op de coördinaatfuncties toe te passen.

Zeer belangrijk is de nu volgende *kettingregel voor totale afgeleiden*.

Stelling 1.20 Zij $X \subset \mathbb{R}^n$, ξ een inwendig punt van X , $f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$ totaal differentieerbaar in het punt ξ . Zij verder $Y \subset \mathbb{R}^p$, $f(\xi)$ een inwendig punt van Y en $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^q$ totaal differentieerbaar in het punt $f(\xi)$. Dan is $g \circ f$ gedefinieerd in een omgeving van ξ in $\mathbb{R}^n$, $g \circ f$ is totaal differentieerbaar in het punt ξ en

$$D(g \circ f)(\xi) = Dg(f(\xi)) \circ Df(\xi). \quad (1.27)$$

De formule (1.27) is equivalent met de formule

$$\left. \frac{\partial g_h(f(x))}{\partial x_j} \right|_{x=\xi} = \sum_{i=1}^p \left. \frac{\partial g_h(y)}{\partial y_i} \right|_{y=f(\xi)} \left. \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right|_{x=\xi}, \quad 1 \leq h \leq q, \quad 1 \leq j \leq n \quad (1.28)$$

voor de matrixcoëfficiënten.

Bewijs We hebben, voor iedere x in een geschikte omgeving X_0 van ξ in X , dat

$$f(x) - f(\xi) = L(x) (x - \xi),$$

waarin $L(x) \in \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ en $L(x) \rightarrow Df(\xi)$ als $x \rightarrow \xi$.

Schrijven we verder $\eta = f(\xi)$ dan geldt, voor iedere y in een geschikte omgeving Y_0 van η in Y , dat

$$g(y) - g(\eta) = M(y) (y - \eta),$$

waarin $M(y) \in \text{Lin}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ en $M(y) \rightarrow Dg(\eta)$ als $y \rightarrow \eta$. Dit levert

$$g(f(x)) - g(f(\xi)) = M(f(x)) (f(x) - f(\xi)) = M(f(x)) (L(x) (x - \xi)) = M(f(x)) \circ L(x) (x - \xi).$$

Anders gezegd, we hebben voor de afbeelding $h = g \circ f$ de formule $h(x) - h(\xi) = N(x) (x - \xi)$, met $N(x) := M(f(x)) \circ L(x) \in \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$.

Merk op dat $x \rightarrow \xi$ impliceert dat $f(x) \rightarrow f(\xi)$, zie Lemma 1.14, dus als x voldoende dicht bij ξ ligt dan is $M(f(x))$ gedefinieerd. Met het oog op de kettingregel voor limieten krijgen we vervolgens dat $M(f(x)) \rightarrow Dg(f(\xi))$. Dit leidt tot

$$N(x) = M(f(x)) \circ L(x) \rightarrow Dg(f(\xi)) \circ Df(\xi)$$

als $x \rightarrow \xi$. Dit impliceert dat $g \circ f$ totaal differentieerbaar is in het punt ξ , met totale afgeleide in het punt ξ gelijk aan $Dg(f(\xi)) \circ Df(\xi)$. $\square$

De formule (1.28) komt ook voor in het college Infinitesimaalrekening. De relatie met de eenvoudiger ogende formule (1.27) kan gezien worden als een oefening in de interpretatie van de totale afgeleide als een lineaire afbeelding.

Een belangrijk speciaal geval ontstaat als $I \subset \mathbb{R}$ een interval is en $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ differentieerbaar is in het punt $\tau \in I$. Men noemt γ een *kromme* in de n -dimensionale ruimte. Als $t \in I$ als de *tijd* wordt geïnterpreteerd en $\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ als de *positie*, dan wordt de afbeelding γ , de ‘positie als functie van de tijd’, ook wel als een *beweging* in de n -dimensionale ruimte opgevat. In dit geval heet de afgeleide $\gamma'(\tau) \in \mathbb{R}^n$ de *snellheidsvector* van de beweging op het tijdstip τ .

Zij nu $X \subset \mathbb{R}^n$, $\xi = \gamma(\tau)$ een inwendig punt van X en $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ totaal differentieerbaar in het punt ξ . Men noemt dan $f \circ \gamma$, de functie die aan iedere $t \in I$ met $\gamma(t) \in X$ toevoegt het reële getal $f(\gamma(t))$, de *functie f langs de kromme γ* . Merk op dat dit een reëelwaardige functie van één reële variabele is. De kettingregel (1.27) geeft nu dat

$$D(f \circ \gamma)(\tau) = Df(\xi) \circ D\gamma(\tau).$$

Toepassen van het linker- en rechterlid op $1 \in \mathbb{R}$ leidt nu met het oog op (1.20) tot de formule

$$(f \circ \gamma)'(\tau) = Df(\gamma(\tau)) \gamma'(\tau) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \Big|_{x=\gamma(\tau)} \gamma'_j(\tau) \quad (1.29)$$

voor de afgeleide van de functie f van n variabelen langs de kromme γ . Merk op dat in de middelste uitdrukking $Df(\gamma(\tau))$ een lineaire afbeelding is van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}$; het beeld hieronder van de snelheidsvector $\gamma'(\tau) \in \mathbb{R}^n$ is blijkbaar gelijk aan het reële getal $(f \circ \gamma)'(\tau)$. Ook kan nog opgemerkt worden dat het rechterlid in (1.29) gelijk is aan het inproduct van de vectoren $\text{grad } f(\gamma(\tau)) \in \mathbb{R}^n$ en $\gamma'(\tau) \in \mathbb{R}^n$, zie (1.6).

Als we nemen $\gamma(t) = \xi + t v$ en $\tau = 0$, dan zien we dat het linkerlid in (1.29) gelijk is aan de richtingsafgeleide $D_v f(\xi)$. Daarmee correspondeert de eerste identiteit in (1.29) met de vroeger afgeleide formule (1.23). De tweede identiteit zegt dat de richtingsafgeleide ook gelijk is aan het inproduct van de vectoren $\text{grad } f(\xi)$ en v .

Verdere specialisatie tot $\xi = 0$ en $v = (1, 1, \dots, 1)$ geeft de formule

$$\frac{d}{dt} f(t, t, \dots, t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \Big|_{x=(t, t, \dots, t)}. \quad (1.30)$$

Dit leidt tot de volgende *somregel voor differentiatie*, een in allerlei toepassingen zeer nuttig principe.

Gevolg 1.21 *Als één en dezelfde variabele op een aantal plaatsen in een uitdrukking voorkomt, dan wordt de afgeleide van de uitdrukking naar die variabele verkregen door voor iedere j de variabele op alle andere plaatsen dan de j -de te fixeren en te differentiëren naar de variabele op de j -de plaats, en vervolgens deze partiële afgeleiden te sommeren over alle j . Dit principe is geldig onder de aanname dat de uitdrukking totaal differentieerbaar is als we de variabelen op alle plaatsen onafhankelijk van elkaar laten variëren.*

Door deze regel toe te passen op

$$g_h(f_1(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)),$$

beschouwd als functie van de variabele x_j die op p plaatsen voorkomt, en op ieder van de differentiaties de kettingregel toe te passen voor functies van één reële variabele, krijgen we de formule (1.28). Dit laat zien dat de somregel equivalent is met de kettingregel.

1.5 Vraagstukken bij Hoofdstuk 1

Vraagstuk 1.1 Zij $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ partieel differentieerbaar naar iedere variabele en zij $\text{grad } f(x) = 0$ voor iedere $x \in \mathbb{R}^n$. Bewijs dat f constant is. $\oslash$

Vraagstuk 1.2 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is gedefinieerd door $f(x, y) = (1 - x^2)(1 - y^2)$.

- a) Bereken alle stationaire punten van f .
- b) Onderzoek in alle stationaire punten of f een lokaal maximum, een lokaal minimum of geen van beide heeft. Aanwijzing: teken het nulniveau van f en de gebieden waar $f > 0$, resp. $f < 0$.

$\oslash$

Vraagstuk 1.3 De functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is gedefinieerd door $f(x, y) = x y (x + y - 1)$.

- a) Bewijs dat f vier stationaire punten heeft.
- b) Bewijs dat f in precies één van deze punten een extremum heeft. Aanwijzing: teken het nulniveau van f en de gebieden waar $f > 0$, resp. $f < 0$.

$\oslash$

Vraagstuk 1.4 Beschouw de veeltermfunctie

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - x + x y^2$$

van twee variabelen. Bereken de partiële afgeleiden $\partial f(x, y)/\partial x$ en $\partial f(x, y)/\partial y$ en bepaal de stationaire punten. Onderzoek of f zijn maximum en/of minimum aanneemt op het rechter halfvlak

$$V_+ = \{(x, y) \mid x \geq 0\},$$

respectievelijk op het linker halfvlak

$$V_- = \{(x, y) \mid x \leq 0\}.$$

Is dit zo, bepaal dan ook het maximum, resp. minimum. Beantwoord tenslotte dezelfde vragen met $f(x, y)$ vervangen door $g(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - x - x y^2$. $\oslash$

Vraagstuk 1.5 Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Neem aan dat voor iedere $1 \leq i \leq n$ de functie f partieel differentieerbaar is naar de i -de variabele en dat de functie $D_i f$ begrensd is op U .

- a) Bewijs dat f continu is.
- b) Geef een voorbeeld van een functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die in $(0, 0)$ niet continu is, maar wel de eigenschap heeft dat beide eerste orde partiële afgeleiden in een omgeving van $(0, 0)$ bestaan. Merk op dat a) impliceert dat noodzakelijkerwijze één van de partiële afgeleiden onbegrensd is op iedere omgeving van $(0, 0)$. Verifieer dat dit bij uw voorbeeld het geval is.

⊗

Vraagstuk 1.6 De functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd door: $f(x, y) = x y^3 + e^{x y}$. Laat zien dat f in het punt $(1, 1)$ richtingsdifferentieerbaar is in iedere richting $v \in \mathbb{R}^2$. Geef een formule voor $D_v f(1, 1)$. ⊗

Vraagstuk 1.7 We definiëren de functie $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ door $\varphi(x, y) = x y$. Laten $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbare functies zijn. Gebruik de kettingregel voor differentiëren langs een kromme om

$$\frac{d}{dt} \varphi(f(t), g(t))$$

uit te drukken in f, g en hun afgeleiden f' en g' . Kunt u het gevonden resultaat ook op een andere manier begrijpen? Formuleer en bewijs een productregel voor differentiatie van een product van n functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. ⊗

Vraagstuk 1.8 Laat $f \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ zijn en $m \in \mathbb{R}$. Bewijs dat de volgende twee uitspraken equivalent zijn:

- $\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = m f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- $f(t x) = t^m f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ en $t > 0$.

Hint: Onderzoek de afgeleide naar t van de functie:

$$t^{-m} f(t x) = t^{-m} f(t x_1, \dots, t x_n).$$

De functie heet *positief homogeen van de graad m* als zij aan b) voldoet. De vergelijking in a) heet de *differentiaalvergelijking van Euler*.

Bewijs dat als f aan a) of b) voldoet, dan is f eenduidig vastgelegd door zijn waarden op de sfeer

$$S = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\| = 1\}$$

met middelpunt in de oorsprong en straal gelijk aan 1. (Hint: zoek t waarvoor $\|t x\| = 1$.) ⊗

Vraagstuk 1.9

- Zij $f(x) = \varphi(\|x\|)$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, waarin $\varphi :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ een nader te bepalen tweemaal differentieerbare functie is. Bewijs dat $\partial\|x\|/\partial x_j = x_j/\|x\|$. Bepaal de functies φ waarvoor

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} = 0$$

op $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Hint: herken een Euler differentiaalvergelijking voor de functie $\psi(r) = \varphi'(r)$.

- Voor een differentieerbaar vectorveld $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ in een open deelverzameling U van $\mathbb{R}^n$ definieert men de *divergentie* $\operatorname{div} v : U \rightarrow \mathbb{R}$ door middel van de formule

$$(\operatorname{div} v)(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}, \quad x \in U.$$

Zij nu $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ en v gedefinieerd door $v_i(x) = \|x\|^{-n} x_i$, voor iedere $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ en iedere $1 \leq i \leq n$. Gebruik uw berekening in a) om aan te tonen dat $\operatorname{div} v = 0$.

⊗

Vraagstuk 1.10 Gegeven zijn de functies $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ en $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door:

$$f(t) = (t, \cos t), \quad g(x, y) = e^x \cos y.$$

Bereken de afgeleide van $g \circ f$ op twee manieren:

- Door een formule voor $g \circ f$ te bepalen en die te differentiëren.
- Door de kettingregel toe te passen.

⊗

Vraagstuk 1.11 Gegeven zijn de functies $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ en $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door:

$$f(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad g(x, y, z) = (x + y)^2 - z^2.$$

Bereken de afgeleide van $g \circ f$ op twee manieren:

- Door een formule voor $g \circ f$ te bepalen en die te differentiëren.
- Door de kettingregel toe te passen.

⊗

Vraagstuk 1.12

- Gegeven zijn differentieerbare functies $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Bewijs dat $\text{grad}(f \circ g) = (f' \circ g) \text{grad } g$.
- Gegeven zijn een differentieerbare functie $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ en een C^1 functie $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$. Bewijs dat de i -de component van $\text{grad}(f \circ g)(x)$ gelijk is aan het inproduct in $\mathbb{R}^p$ van de vector $(\text{grad } f)(g(x))$ met de vector $\partial g(x)/\partial x_i$.

⊗

Vraagstuk 1.13 Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ en $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar. Zij $a, b \in U$ en onderstel dat het *lijnstuk*

$$L(a, b) := \{a + t(b - a) \mid t \in [0, 1]\}$$

van a naar b in zijn geheel bevat is in U . Definieer $g(t) := f(a + t(b - a))$.

- Bewijs dat er een $t \in]0, 1[$ is, waarvoor $g(1) - g(0) = g'(t)$. Laat zien dat bijgevolg

$$f(b) - f(a) = \langle \text{grad } f(a + t(b - a)), b - a \rangle$$

en dat

$$|f(b) - f(a)| \leq \|\text{grad } f(a + t(b - a))\| \|b - a\|.$$

- Bewijs dat als $\text{grad } f$ begrensd is op $L(a, b)$, dan is

$$|f(b) - f(a)| \leq M \|b - a\|, \quad \text{waarin } M := \sup_{x \in L(a, b)} \|\text{grad } f(x)\|.$$

- c) Een deelverzameling U van $\mathbb{R}^n$ heet *convex* als voor iedere $a, b \in U$ geldt dat $L(a, b) \subset U$. Bewijs dat als U convex is en $\text{grad } f$ is begrensd op U , dan is er een constante C met de eigenschap dat voor iedere $a, b \in U$ geldt $|f(b) - f(a)| \leq C \|b - a\|$.
- d) Bewijs: als U convex is en $\text{grad } f = 0$ op U , dan is f constant op U .

◊

Vraagstuk 1.14

- a) Bewijs dat de afbeelding $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, gedefinieerd door $f(x, y) = (x + y, x^2 + y^2, x y)$, in ieder punt van $\mathbb{R}^2$ totaal differentieerbaar is en bereken de Jacobi-matrix van f .
- b) Overeenkomstige vragen voor $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door $g(x, y, z) = x y z + x y + x$.
- c) Idem voor $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door $\varphi(x) = (1, x, x^2)$.

◊

Vraagstuk 1.15 Gegeven zijn twee vaste vectoren b en c in $\mathbb{R}^n$. Bewijs dat elk der onderstaande afbeeldingen in ieder punt van $\mathbb{R}^n$ totaal differentieerbaar is. Bereken, voor iedere $x, v \in \mathbb{R}^n$ de afgeleide $Df(x)v = D_v f(x)$, zonder gebruik te maken van coördinaten.

- a) $f(x) = \langle b, x \rangle$,
- b) $f(x) = \langle b, x \rangle \langle c, x \rangle$,
- c) $f(x) = \langle x, x \rangle$,
- d) $f(x) = \langle b, x \rangle b$,
- e) $f(x) = \langle x, x \rangle x$.

◊

Vraagstuk 1.16 Zij $m \in \mathbb{R}$ en $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ positief homogeen van de graad m , zie Vraagstuk 1.8. Neem aan dat f begrensd is op S en niet identiek gelijk aan nul.

- a) Bewijs dat als $f(x)$ convergeert voor $x \rightarrow 0$, dan is $m \geq 0$. Bewijs dat omgekeerd, als $m > 0$, dan geldt dat $f(x) \rightarrow 0$ als $x \rightarrow 0$ terwijl, als $m = 0$, dan convergeert $f(x)$ voor $x \rightarrow 0$ dan en slechts dan als f constant is.
- b) Zij nu $m > 0$ en definieer $f(0) = 0$. Bewijs dat als f richtingsdifferentieerbaar is in 0 in iedere richting, dan is $m \geq 1$. Is omgekeerd $m > 1$, dan is f richtingsdifferentieerbaar in het punt 0 in iedere richting en heeft richtingsafgeleide gelijk aan nul. Is $m = 1$, dan is f richtingsdifferentieerbaar in iedere richting v met $D_v f(0) = f(v)$.
- c) f is totaal differentieerbaar in het punt 0 dan en slechts dan als ofwel $m > 1$, in welk geval $Df(0) = 0$, ofwel $m = 1$ en f is een lineaire functie.

⊗

Vraagstuk 1.17 Gegeven is dat $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ en $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ totaal differentieerbare functies zijn. Bewijs dat $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, gedefinieerd door $F(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$, een totaal differentieerbare functie is en bewijs dat de totale afgeleide DF gegeven wordt door de formule:

$$DF(x)(v) = \langle Df(x)(v), g(x) \rangle + \langle f(x), Dg(x)(v) \rangle, \quad x, v \in \mathbb{R}^n.$$

Hierin is $v \in \mathbb{R}^n$ en $Df(x) \in \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, dus $Df(x)(v) = (Df(x))(v) \in \mathbb{R}^p$, etcetera. ⊗

Vraagstuk 1.18 Zij $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ een totaal differentieerbare functie en $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ een lineaire afbeelding. Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn.

- a) Voor iedere $x \in \mathbb{R}^n$ is $Df(x) = L$.
- b) Er is een $c \in \mathbb{R}^p$ met de eigenschap dat $f(x) = L(x) + c$ voor iedere $x \in \mathbb{R}^n$.

Aanwijzing voor a) $\Rightarrow$ b): pas Vraagstuk 1.1 toe op $f - L$. ⊗

Vraagstuk 1.19 Van $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven dat

$$(\text{grad } f)(x, y) = (y e^x, e^x - \frac{1}{y^2 + 1}).$$

Bereken alle f die hieraan voldoen. ⊗

Vraagstuk 1.20 Van $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is de Jacobi-matrix gegeven door

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 e^x & 2y e^x \\ \frac{1}{1+x^2} & \frac{1}{1+y^2} \end{pmatrix}.$$

Bereken f als ook nog gegeven is dat $f(0, 1) = (1, 0)$. ⊗

Vraagstuk 1.21 De afbeeldingen $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ en $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zijn gedefinieerd door

$$g(x, y, z) = (x z, \log(y^2 + e^z)), \quad h(x, y) = (x + y, x y).$$

Bereken de Jacobi-matrix van $h \circ g$ op twee manieren:

- a) rechtstreeks, dat wil zeggen door $h \circ g$ te berekenen en de definitie van de Jacobi-matrix te gebruiken;
- b) met behulp van de kettingregel.

⊗

Vraagstuk 1.22 De afbeeldingen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ en $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zijn gedefinieerd door

$$f(x, y) = (x^2, y, x y), \quad g(x, y, z) = (x y z, z \sin(x y)).$$

Bereken de Jacobi-matrices van $f \circ g$ en $g \circ f$.

⊗

Vraagstuk 1.23 Gegeven zijn differentieerbare afbeeldingen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Noem de componenten van g respectievelijk $g_1, \dots, g_n$. Geef de Jacobi-matrices van $f \circ g$ en $g \circ f$ in termen van de partiële afgeleiden van f en de afgeleiden van de g_j .

⊗

Vraagstuk 1.24 Gegeven is een differentieerbare functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. We definiëren $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ door $F(x, y) = f(x + y, x - y)$.

Geef een formule die $D_1 F + D_2 F$ uitdrukt in $D_1 f$ en $D_2 f$.

⊗

Vraagstuk 1.25 We beschouwen een differentieerbare functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. De functie $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is gedefinieerd door $g(\rho, \phi) = f(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi)$.

- Geef een formule die de partiële afgeleiden van g uitdrukt in ρ, ϕ en de partiële afgeleiden van f .
- Geef een formule die de partiële afgeleiden van f uitdrukt in ρ, ϕ en de partiële afgeleiden van g .
- Geef een formule die

$$D_1^2 f + D_2^2 f$$

uitdrukt in ρ, ϕ en de (eventueel hogere orde) partiële afgeleiden van g .

⊗

Vraagstuk 1.26 De functie $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ is gedefinieerd door

$$F(r, \theta, \phi) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta).$$

Bereken de Jacobi-matrix van F . In welke punten is de determinant van deze matrix gelijk aan nul?

⊗

Vraagstuk 1.27 Laten V en W open deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ zijn. Zij $f : V \rightarrow W$ bijectief en differentieerbaar en zij $f^{-1} : W \rightarrow V$ differentieerbaar. Bewijs dat voor iedere $a \in V$ de afgeleide $Df(a)$ bijectief is en dat $Df(a)^{-1} = D(f^{-1})(f(a))$.

⊗

Vraagstuk 1.28 De verzameling van alle inverteerbare $A \in \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ wordt met $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ aangeduid, deze heet de *algemene lineaire groep in n reële variabelen*. Bewijs dat $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ een open deelverzameling is van $\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ en dat de afbeelding $A \mapsto A^{-1}$ continu is van $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ naar $\text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Aanwijzing: gebruik dat als $A \in \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, dan is $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ dan en slechts dan als $\det A \neq 0$. Gebruik verder de *formule van Cramer* voor A^{-1} , die zegt dat

$$(A^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det(A^{(ji)})}{\det A}.$$

Hierin is $A^{(ji)}$ de $(n-1) \times (n-1)$ -matrix die uit de matrix van A is verkregen door de i -de rij en de j -de kolom van de matrix van A te schrappen.

⊗

Vraagstuk 1.29 Laten X en Y deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ zijn en $f : X \rightarrow Y$ een bijectieve afbeelding met inverse afbeelding g . Zij ξ een inwendig punt van X en veronderstel dat voldaan is aan de volgende voorwaarden:

- a) de afbeelding f is differentieerbaar in ξ en $Df(\xi)$ is bijjectief,
- b) $\eta := f(\xi)$ is inwendig punt van Y en g is continu in het punt η .

Bewijs dat g differentieerbaar is in $f(\xi)$ en dat $(Dg)(f(\xi)) = (Df(\xi))^{-1}$.

Aanwijzing: beschouw (1.18). Bewijs dat als $y = f(x)$, $x \in X$ en $L(x)$ is inverteerbaar, dan is

$$g(y) = g(\eta) + L(g(y))^{-1} (y - \eta).$$

Pas nu Vraagstuk 1.28 toe.

⊗

Vraagstuk 1.30 We beschouwen de functie $\gamma : t \mapsto (\cos t, \sin t)$.

- a) Toon aan dat γ differentieerbaar is, en bepaal de afgeleide γ' .
- b) Toon aan dat er geen $\tau \in [0, \pi]$ bestaat met de eigenschap dat

$$\gamma(\pi) - \gamma(0) = \pi \gamma'(\tau).$$

- c) Toon aan dat er wel een $\tau \in [0, \pi]$ bestaat waarvoor

$$\|\gamma(\pi) - \gamma(0)\| \leq \pi \|\gamma'(\tau)\|.$$

Het analogon van de middelwaardestelling geldt dus in het algemeen niet voor vectorwaardige functies.

De schatting in c) is de in Vraagstuk 1.13, a) verkregen ‘middelwaardeschatting’ voor vectorwaardige functies.

⊗

2 Verwisselingsstellingen

2.1 Verwisseling van Limieten

De gebruikelijke rekenregels voor limieten van functies van meer variabelen worden op dezelfde manier bewezen als voor functies van één reële variabele. Echter, als $n \geq 2$, dan kan de rijkere meetkundige structuur van $\mathbb{R}^n$ tot nieuwe verschijnselen leiden.

We beginnen met een lemma dat zegt dat als $f(x, y)$ convergeert naar de waarde c wanneer het punt (x, y) in het vlak convergeert naar het punt (a, b) , en bovendien $f(x, y) \rightarrow \phi(x)$ als $y \rightarrow b$, dan geldt dat $\phi(x) \rightarrow c$ als $x \rightarrow a$. In formule:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right) = \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y).$$

De formulering van het onderstaande lemma ziet er wat bewerkelijk uit, omdat we eisen dat alle punten die in het lemma voorkomen limietpunten zijn van het definitiegebied van de functie. Het resultaat heeft een sterk ‘nogal wieses’ gehalte en het is dan ook enigszins verrassend dat het volledige bewijs nog een paar stappen vergt.

Lemma 2.1 *Zij $V \subset \mathbb{R}^2$ en $f : V \rightarrow \mathbb{R}^p$. Neem aan dat $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ een limietpunt is van V , dat $c \in \mathbb{R}^p$ en dat*

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = c.$$

Voor iedere $x \in \mathbb{R}$ noteren we $Y(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in V\}$. Zij X de verzameling der $x \in \mathbb{R}$ waarvoor b limietpunt is van $Y(x)$ en zij a een limietpunt van X . Neem aan dat er voor iedere $x \in X$ een $\phi(x) \in \mathbb{R}^p$ is, waarvoor $f(x, y) \rightarrow \phi(x)$ als $y \rightarrow b$. Dan geldt dat $\phi(x) \rightarrow c$ als $x \rightarrow a$.

Bewijs Zij $\epsilon > 0$. Uit het eerste gegeven volgt dat er een $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ is met de eigenschap dat als $(x, y) \in V$ en $\|(x, y) - (a, b)\| < \delta$, dan is $\|f(x, y) - c\| \leq \epsilon$.

Fixeer even $x \in X$ met $|x - a| < \delta$. Uit het tweede gegeven volgt dat er bij iedere $\eta > 0$ een $\mu > 0$ is met de eigenschap dat als $(x, y) \in V$ en $|y - b| \leq \mu$, dan is $\|f(x, y) - \phi(x)\| \leq \eta$. Nemen we hierin een y waarvoor bovendien geldt dat $|y - b| < \delta - |x - a|$, dan is

$$\|(x, y) - (a, b)\| \leq |x - a| + |y - b| < \delta$$

en dus $\|f(x, y) - c\| \leq \epsilon$. Combinatie van beide ongelijkheden geeft nu dat

$$\|\phi(x) - c\| \leq \|\phi(x) - f(x, y)\| + \|f(x, y) - c\| \leq \eta + \epsilon.$$

Omdat dit argument geldt voor iedere $\eta > 0$, concluderen we dat $\|\phi(x) - c\| \leq \epsilon$.

Hiermee is aangetoond dat voor iedere $\epsilon > 0$ en iedere $x \in X$ met $|x - a| < \delta(\epsilon)$ geldt dat $\|\phi(x) - c\| \leq \epsilon$. Dit impliceert dat $\phi(x) \rightarrow c$ als $x \rightarrow a$. $\square$

Als ook geldt dat $f(x, y) \rightarrow \psi(y)$ als $x \rightarrow a$, dan krijgen we door verwisseling van de rol van x en y in Lemma 2.1 dat ook $\psi(y) \rightarrow c$ als $y \rightarrow b$. Dit leidt tot het volgende principe over de verwisselbaarheid van de volgorde van het limietnemen.

Gevolg 2.2 *Er geldt dat*

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right) = \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow b} \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right), \quad (2.1)$$

mits alle hierin voorkomende limieten bestaan.

Voorbeeld 2.3 Dat hierin in het algemeen de voorwaarde dat $f(x, y)$ convergeert voor $(x, y) \rightarrow (a, b)$ niet kan worden weggelaten, laat het volgende voorbeeld zien. Neem $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ en $f(x, y) = y^2 / (x^2 + y^2)$ als $(x, y) \in V$. De functie f is continu op V , hetgeen impliceert dat voor iedere $x \neq 0$ geldt dat $f(x, y) \rightarrow f(x, 0) = 0$ als $y \rightarrow 0$, dus

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0.$$

Anderzijds geldt voor iedere $y \neq 0$ dat $f(x, y) \rightarrow f(0, y) = 1$ als $x \rightarrow 0$, dus

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 1.$$

Vanwege Gevolg 2.2 concluderen we dat $f(x, y)$ niet kan convergeren voor $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Om het gedrag van de functie $f(x, y)$ bij de oorsprong beter te begrijpen, gebruiken we de substitutie van poolcoördinaten $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Dit geeft dat $f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \sin^2 \theta$, onafhankelijk van r . Voor iedere $s \in [0, 1]$ is er een θ waarvoor $\sin^2 \theta = s$ en we zien dat $f(r \cos \theta, r \sin \theta) \rightarrow s$ als $r \downarrow 0$. Als $f(x, y) \rightarrow c$ voor $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, dan levert dit in combinatie met $(r \cos \theta, r \sin \theta) \rightarrow (0, 0)$ en de kettingregel voor limieten, dat $s = c$. Het feit dat ieder getal $s \in [0, 1]$ als limiet op kan treden leidt tot een tegenspraak met de eenduidigheid van de limiet van $f(x, y)$ voor $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, als die bestaat.

De grafiek van de functie f , de verzameling der $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ met $z = f(x, y)$, bevat voor iedere hoek θ de ‘horizontale trede’

$$T(\theta) := \{(r \cos \theta, r \sin \theta, \sin^2 \theta) \mid r > 0\}.$$

Deze treden komen bij de z -as bij elkaar in het verticale interval

$$S := \{(0, 0, z) \mid 0 \leq z \leq 1\},$$

de *spil van de wenteltrap*. Het verticaal staan van de wenteltrap bij de spil correspondeert met de meerduidelijkheid van de limietwaarden van $f(x, y)$ als $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. (De wenteltrap in de domtoren is inderdaad onaangenaam steil bij de centrale as. Natuurlijk is ons voorbeeld van de T_θ ’s niet een ‘echte’ wenteltrap, omdat bij het rondlopen het niveau $\sin^2 \theta$ op en neer gaat en niet steeds omhoog.)

⊗

2.2 Verwisseling van de Differentiatievolgorde

Laat V een open deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ zijn, en $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ een reëelwaardige functie op V die partieel differentieerbaar is naar de eerste variabele. Neem aan dat de functie $D_1 f : V \rightarrow \mathbb{R}$ op zijn beurt partieel differentieerbaar is naar de tweede variabele. We kunnen dan de ‘gemengde tweede orde partiële afgeleide’ $D_2 D_1 f = D_2 (D_1 f)$ vormen, de ‘partiële afgeleide naar de tweede variabele van de partiële afgeleide van f naar de eerste variabele’. Men noteert deze ook wel als

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} := \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right). \quad (2.2)$$

We hebben nu de volgende stelling over de verwisselbaarheid van de differentiatievolgorde. In de formulering zijn alleen die voorwaarden opgenomen die in het bewijs zijn gebruikt — dat zijn er opmerkelijk weinig.

Stelling 2.4 Laat V een open deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ zijn, $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ partieel differentieerbaar naar beide variabelen en $D_1 f$ partieel differentieerbaar naar de tweede variabele. Neem bovendien aan dat $(\xi, \eta) \in V$ en dat de functie $D_2 D_1 f$ continu is in het punt (ξ, η) . Dan is de functie $D_2 f$ partieel differentieerbaar naar de eerste variabele in het punt (ξ, η) en er geldt dat

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} \quad \text{als } (x, y) = (\xi, \eta). \quad (2.3)$$

Bewijs Omdat (ξ, η) een inwendig punt is van V , is er een $\delta > 0$ met de eigenschap dat als $h, k \in \mathbb{R}$ en $|h| < \delta$ en $|k| < \delta$, dan is $(\xi + h, \eta + k) \in V$. Neem in het vervolg aan dat $0 < |h| < \delta$ en $0 < |k| < \delta$.

Definieer, voor $k \neq 0$, het differentiequotient

$$v_k(x) := \frac{f(x, \eta + k) - f(x, \eta)}{k}$$

en, voor $h \neq 0$ en $k \neq 0$, het tweede orde differentiequotient

$$Q(h, k) := \frac{v_k(\xi + h) - v_k(\xi)}{h} = \frac{f(\xi + h, \eta + k) - f(\xi + h, \eta) - f(\xi, \eta + k) + f(\xi, \eta)}{h k}.$$

Ons eerste doel is om te bewijzen dat

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} Q(h, k) = c := D_2 D_1 f(\xi, \eta). \quad (2.4)$$

De functie v_k is differentieerbaar met afgeleide gelijk aan

$$v'_k(x) = \frac{D_1 f(x, \eta + k) - D_1 f(x, \eta)}{k}.$$

Toepassing van de middelwaardestelling geeft dat er een $t \in]0, 1[$ is, waarvoor $(v_k(\xi + h) - v_k(\xi))/h = v'_k(\xi + t h)$, hetgeen vanwege het voorgaande met $x = \xi + t h$ leidt tot

$$Q(h, k) = \frac{D_1 f(\xi + t h, \eta + k) - D_1 f(\xi + t h, \eta)}{k}.$$

Voor iedere x is de functie $\phi : y \mapsto D_1 f(x, y)$ differentieerbaar, met afgeleide $D_2 D_1 f(x, y)$, dus nogmaals de middelwaardestelling toepassend krijgen we de existentie van een $s \in]0, 1[$, waarvoor $(\phi(\eta + k) - \phi(\eta))/k = D_2 D_1 f(x, \eta + s k)$. Dit toepassend met $x = \xi + t h$ krijgen we dat

$$Q(h, k) = D_2 D_1 f(\xi + t h, \eta + s k).$$

De reële getallen t en s hierin hangen op een niet nader gespecificeerde manier af van h en k , het enige wat we ervan weten is dat ze in het interval $]0, 1[$ liggen.

De continuïteit van de functie $D_2 D_1 f$ in het punt (ξ, η) geeft dat er bij iedere $\epsilon > 0$ een $0 < \mu \leq \delta$ is met de eigenschap dat als $|h| \leq \mu$ en $|k| \leq \mu$, dan is

$$|D_2 D_1 f(\xi + h, \eta + k) - c| \leq \epsilon.$$

Nu impliceren $|h| \leq \mu$ en $|k| \leq \mu$ en $t, s \in]0, 1[$ dat $|th| \leq \mu$ en $|sk| \leq \mu$. We krijgen daarom dezelfde schatting als we h , resp. k vervangen door th , resp. sk . Dit geeft dat

$$|Q(h, k) - c| \leq \epsilon \quad \text{als} \quad 0 < |h| \leq \mu \quad \text{en} \quad 0 < |k| \leq \mu.$$

Dit bewijst (2.4).

Anderzijds geldt dat $v_k(x) \rightarrow D_2 f(x, \eta)$ als $k \rightarrow 0$, dus

$$\lim_{k \rightarrow 0} Q(h, k) = \frac{D_2 f(\xi + h, \eta) - D_2 f(\xi, \eta)}{h}.$$

Uit Lemma 2.1 met $p = 1$, f vervangen door Q en $(a, b) = (0, 0)$, lezen we nu af dat

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{D_2 f(\xi + h, \eta) - D_2 f(\xi, \eta)}{h} = c.$$

Maar dit betekent precies dat $D_2 f$ partieel differentieerbaar is naar de eerste variabele in het punt (ξ, η) en dat $D_1 D_2 f(\xi, \eta) = D_2 D_1 f(\xi, \eta)$. $\square$

Zij X open in $\mathbb{R}^n$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$. Met inductie over k zegt men dat de afbeelding f k keer differentieerbaar is, indien f $k - 1$ keer differentieerbaar is en voor iedere keuze van indices $j(1), \dots, j(k-1)$ de afbeelding $D_{j(k-1)} \dots D_{j(1)} f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$ totaal differentieerbaar is. (Vanwege Lemma 1.14 is deze afbeelding dan ook continu.) Hierbij is $D_{j(k-1)} \dots D_{j(1)} f$ de herhaalde partiële afgeleide, die met inductie over k wordt gedefinieerd als

$$D_{j(k)} D_{j(k-1)} \dots D_{j(1)} f = D_{j(k)} (D_{j(k-1)} \dots D_{j(1)} f), \quad 1 \leq j(k) \leq n.$$

Men zegt dat f k keer continu differentieerbaar is, notatie $f \in C^k(X, \mathbb{R}^p)$, $f \in C^k(X)$ of $f \in C^k$, als bovendien alle k -de orde partiële afgeleiden $D_{j(k)} D_{j(k-1)} \dots D_{j(1)} f$ continu zijn. Vanwege Stelling 2.4 kan men de differentiatievolgorde hierin naar believen verwisselen, door een willekeurige permutatie van de indices te schrijven als een samenstelling van buursverwisselingen (= verwisselingen van indices die naast elkaar staan). Als α_j het aantal der rangnummers l voorstelt waarvoor $j(l) = j$, dat wil zeggen het aantal keren dat D_j in de herhaalde partiële afgeleide voorkomt, dan kunnen we dus schrijven

$$D_{j(k)} D_{j(k-1)} \dots D_{j(1)} f(x) = \frac{\partial^k f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Hierin betekent $\alpha_j = 0$ dat de partiële afgeleide naar de j -de variabele niet voorkomt. Als veel van deze uitdrukkingen voorkomen, dan kort men dit ook wel af tot $D^\alpha f(x)$, waarin $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ een rij van niet-negatieve gehele getallen voorstelt. Het getal

$$k = |\alpha| := \sum_{j=1}^n \alpha_j \tag{2.5}$$

heet de *orde* van de differentiaaloperator D^α .

Men zegt dat f *willekeurig vaak differentieerbaar* of *glad* is, notatie $f \in C^\infty(X, \mathbb{R}^p)$, $f \in C^\infty(X)$ of $f \in C^\infty$, als voor ieder positief geheel getal k geldt dat $f \in C^k$.

Uit Lemma 1.3 en de rekenregels voor limieten volgt dat als $f, g \in C^k(X, \mathbb{R})$, dan is $f + g \in C^k(X, \mathbb{R})$ en $f g \in C^k(X, \mathbb{R})$, terwijl $f/g \in C^k(X, \mathbb{R})$ als bovendien $g(x) \neq 0$ voor iedere $x \in \mathbb{R}$. Vervolgens geeft Stelling 1.20 met inductie over k dat $g \circ f \in C^k$ als $f \in C^k$ en $g \in C^k$.

2.3 Limietnemen onder het Integraalteken

In de analyse komt het dikwijls voor dat men een integraal beschouwt van een functie, die behalve van de integratievariabele nog van een aantal andere variabelen afhangt. Preciezer, zij $V \subset \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ en zij $f : V \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Voor iedere $x \in V$ is $f_x : t \mapsto f(x, t)$ een reëelwaardige functie op $[a, b]$. Is, voor iedere $x \in V$, de functie f_x Riemann-integreerbaar over $[a, b]$, dan wordt door

$$I(x) := \int_a^b f_x(t) dt = \int_a^b f(x, t) dt \quad (2.6)$$

een functie $I : V \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd. Men zegt ook wel dat de integraal in (2.6) nog afhangt van de *parameters* $(x_1, \dots, x_n)$. De volgende stelling zegt dat als de functie f continu is als functie van alle variabelen $(x_1, \dots, x_n, t)$, dan hangt de integraal over $t \in [a, b]$ continu af van de parameters $(x_1, \dots, x_n)$.

Stelling 2.5 *Zij $V \subset \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Neem verder aan dat de functie $f : V \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu is op de deelverzameling $V \times [a, b]$ van $\mathbb{R}^{n+1}$. Dan is de functie $I : V \rightarrow \mathbb{R}$, gedefinieerd door middel van (2.6), continu.*

De continuïteit van de functie I betekent dat voor ieder punt $\xi \in V$ geldt dat

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \int_a^b f(x, t) dt = \lim_{x \rightarrow \xi} I(x) = I(\xi) = \int_a^b f(\xi, t) dt = \int_a^b \left(\lim_{x \rightarrow \xi} f(x, t) \right) dt, \quad (2.7)$$

waarbij we in de laatste identiteit de continuïteit van de functie $x \mapsto f(x, t)$ in het punt ξ is gebruikt. De formule (2.7) zegt dat we ‘limieten en integralen mogen verwisselen’. Volgens Stelling 2.5 is dit geoorloofd indien de functie f continu is als functie van alle variabelen.

Het bewijs van Stelling 2.5 berust op de volgende, op zichzelf interessante, toepassing van de stelling van Bolzano-Weierstrass, die bekend is uit het college Inleiding Analyse.

Lemma 2.6 *Zij K een begrensde en gesloten deelverzameling van $\mathbb{R}^p$, $V \subset \mathbb{R}^n$ en $f : V \times K \rightarrow \mathbb{R}$ continu. Zij $\xi \in V$ en $\epsilon > 0$. Dan is er een $\delta > 0$, met de eigenschap dat als $x \in V$ en $\|x - \xi\| \leq \delta$, dan geldt voor alle $y \in K$ tegelijk dat $|f(x, y) - f(\xi, y)| \leq \epsilon$.*

Bewijs Stel dat de conclusie niet geldt. We zullen laten zien dat dit tot een tegenspraak leidt.

De ontkenning van de conclusie in Lemma 2.6 zegt dat er bij iedere $\delta > 0$ een $x \in V$ is, met $\|x - \xi\| \leq \delta$, waarvoor er een $y \in K$ is die niet voldoet aan de schatting $|f(x, y) - f(\xi, y)| \leq \epsilon$, dus waarvoor $|f(x, y) - f(\xi, y)| > \epsilon$. Door hierin $\delta = 1/i$ te nemen, krijgen we een rij $x(i) \in V$ en $y(i) \in K$, met de eigenschap dat voor iedere i geldt dat

$$\|x(i) - \xi\| < 1/i \quad \text{en} \quad |f(x(i), y(i)) - f(\xi, y(i))| > \epsilon.$$

Uit $\|x(i) - \xi\| < 1/i$ zien we dat de $x(i)$ begrensd zijn en uit $y(i) \in K$ en de begrensdheid van K volgt dat de $y(i)$ begrensd zijn. Hieruit volgt dat de rij $(x(i), y(i))$ begrensd is in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^{n+p}$. Vanwege de stelling van Bolzano-Weierstrass is er een deelrij van rangnummers $i(j)$, met $i(j) \rightarrow \infty$ als $j \rightarrow \infty$, met de eigenschap dat $(\tilde{\xi}(j), \tilde{\eta}(j)) := (x(i(j)), y(i(j)))$ voor $j \rightarrow \infty$ convergeert naar een punt $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Dit impliceert dat $\tilde{\xi}(j) \rightarrow \tilde{\xi}$ als $j \rightarrow \infty$. Omdat $\|\tilde{\xi}(j) - \xi\| = \|x(i(j)) - \xi\| < 1/i(j)$ en $i(j) \rightarrow \infty$ als $j \rightarrow \infty$, geldt ook dat $\tilde{\xi}(j) \rightarrow \xi$ als $j \rightarrow \infty$, en we concluderen uit de eenduidigheid van limieten dat $\tilde{\xi} = \xi$.

Anderzijds geldt ook dat $\eta(j) \rightarrow \eta$ als $j \rightarrow \infty$. Omdat voor iedere j geldt dat $\eta(j) = y(i(j)) \in K$ en K een gesloten deelverzameling is van $\mathbb{R}^p$, volgt hieruit dat $\eta \in K$. De schatting

$$\begin{aligned} \epsilon &< |f(\xi(j), \eta(j)) - f(\xi, \eta(j))| \\ &\leq |f(\xi(j), \eta(j)) - f(\xi, \eta)| + |f(\xi, \eta) - f(\xi, \eta(j))| \rightarrow 0 + 0 = 0 \quad \text{als } j \rightarrow \infty \end{aligned}$$

leidt nu tot de gewenste tegenspraak. $\square$

Bewijs van Stelling 2.5 Omdat $[a, b]$ een begrensde en gesloten deelverzameling is van $\mathbb{R}$, mogen we Lemma 2.6 toepassen met $p = 1$ en $K = [a, b]$. Zij $\xi \in V$ en $\mu > 0$. Dan is er een $\delta > 0$ met de eigenschap dat als $x \in V$ en $\|x - \xi\| \leq \delta$, dan geldt dat voor iedere $t \in [a, b]$ dat $|f(x, t) - f(\xi, t)| \leq \epsilon := \mu/(b - a)$. Dit leidt tot de schatting

$$|I(x) - I(\xi)| = \left| \int_a^b (f(x, t) - f(\xi, t)) dt \right| \leq \int_a^b |f(x, t) - f(\xi, t)| dt \leq \int_a^b \epsilon dt = \epsilon(b - a) = \mu,$$

die geldig is voor iedere $x \in V$ waarvoor $\|x - \xi\| \leq \delta$. Dit bewijst dat $I(x) \rightarrow I(\xi)$ als $x \rightarrow \xi$. $\square$

Voorbeeld 2.7 De *bètafunctie van Euler* is de functie van twee variabelen p, q , die is gedefinieerd door

$$B(p, q) := \int_0^1 t^{p-1} (1 - t)^{q-1} dt. \quad (2.8)$$

Deze functie is niet op algebraïsche manier in termen van de bekende functies uit te drukken. Daarom hebben we niet veel andere middelen dan Stelling 2.5 als we vast willen stellen of de bètafunctie een continue functie is.

Voor $p > 1$ en $q > 1$ kan het bewijs als volgt gegeven worden. De functie $\mu : (x, y) \mapsto x^y$ is continu op $]0, \infty[\times]0, \infty[$. Voor iedere $y > 0$ geldt dat $x^y \rightarrow 0$ als $x \downarrow 0$, daarom ligt het voor de hand om $\mu(0, y) = 0$ te nemen. De bewering is dat de zo gedefinieerde functie μ continu is op $[0, \infty[\times]0, \infty[$. Voor de continuïteit in het punt $(0, \eta)$ met $\eta > 0$ merken we op dat er bij iedere $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ is met de eigenschap dat $x^{\eta/2} < \epsilon$ als $0 < x < \delta$. Dit impliceert dat als $0 \leq x < \delta$ en $y \geq \eta/2$, dan is $|\mu(x, y) - \mu(0, \eta)| = \mu(x, y) \leq \mu(x, \eta/2) < \epsilon$.

Bijgevolg zijn de functies die aan (p, q, t) toevoegen $\mu(t, p - 1)$, resp. $\mu(1 - t, q - 1)$, beiden continu op $]1, \infty[\times]1, \infty[\times [0, 1]$. Dus is de functie f , gedefinieerd door $f(p, q, t) = \mu(t, p - 1) \mu(1 - t, q - 1)$, continu op $]1, \infty[\times]1, \infty[\times [0, 1]$. Toepassen van Stelling 2.5 geeft dat de bètafunctie, die gelijk is aan $\int_0^1 f(p, q, t) dt$, continu afhangt van $(p, q) \in]1, \infty[\times]1, \infty[$.

Merk op dat $B(p, 1) = 1/p$ en $B(1, q) = 1/q$. Als $p < 1$, resp. $q < 1$, dan krijgen we dat

$$x^{p-1} (1 - x)^{q-1} \rightarrow \infty$$

als $x \downarrow 0$, resp. als $x \uparrow 1$. Dus in deze gevallen is (2.8) een oneigenlijke integraal. Met behulp van de hieronder volgende Opmerking 2.8 kan men bewijzen dat de oneigenlijke integraal (2.8) een continue functie B op het grotere gebied $]0, \infty[\times]0, \infty[$ definieert. $\oslash$

Opmerking 2.8 In de toepassingen is er vaak behoefte aan een variant van Stelling 2.5 voor oneigenlijke integralen. Het hieronder geformuleerde resultaat ziet er enigszins technisch uit, maar is in de praktijk goed bruikbaar.

Zij $V \subset \mathbb{R}^n$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Neem verder aan dat de functie $f : V \times]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continu is en dat voor iedere $x \in V$ de integraal $I(x) = I_{a,b}(x)$, gedefinieerd in (2.6), bestaat als oneigenlijke integraal, dat wil zeggen als limiet voor $\alpha \downarrow a$ en $\beta \uparrow b$ van de integralen $I_{\alpha,\beta}(x)$, waarbij $a < \alpha < \beta < b$. Veronderstel verder dat $\xi \in V$ en dat er voor iedere $\eta > 0$ een $\mu > 0$ is en er reële getallen $\alpha > a$ en $\beta < b$ zijn, met de eigenschap dat voor alle $x \in V$ met $\|x - \xi\| \leq \mu$ tegelijk geldt dat

$$|I_{a,\alpha}(x)| \leq \eta \quad \text{en} \quad |I_{\beta,b}(x)| \leq \eta.$$

Dan geldt dat $I_{a,b}(x) \rightarrow I_{a,b}(\xi)$ als $x \rightarrow \xi$.

Voor het bewijs, zij $\epsilon > 0$ gegeven. Kies $0 < \eta < \epsilon/4$ en neem μ, α en β als in de gegevens. Vanwege Stelling 2.5 is er een $\nu > 0$ met de eigenschap dat als $\|x - \xi\| \leq \nu$, dan is

$$|I_{\alpha,\beta}(x) - I_{\alpha,\beta}(\xi)| \leq \epsilon - 4\eta.$$

Dan is $\delta := \min(\mu, \nu) > 0$ en als $\|x - \xi\| \leq \delta$ dan is

$$\begin{aligned} |I_{a,b}(x) - I_{a,b}(\xi)| &\leq |I_{a,b}(x) - I_{\alpha,\beta}(x)| + |I_{\alpha,\beta}(x) - I_{\alpha,\beta}(\xi)| + |I_{\alpha,\beta}(\xi) - I_{a,b}(\xi)| \\ &\leq 2\eta + (\epsilon - 4\eta) + 2\eta = \epsilon. \end{aligned}$$

Hierin is in de tweede ongelijkheid gebruikt dat

$$|I_{a,b}(x) - I_{\alpha,\beta}(x)| = |I_{a,\alpha}(x) + I_{\beta,b}(x)| \leq |I_{a,\alpha}(x)| + |I_{\beta,b}(x)| \leq 2\eta$$

zodra $\|x - \xi\| \leq \mu$, dus ook als $x = \xi$. Dit laat zien dat $I_{a,b}(x) \rightarrow I_{a,b}(\xi)$ als $x \rightarrow \xi$. ⊗

Voorbeeld 2.9 Zeer belangrijk in allerlei toepassingen is de *gammafunctie van Euler*, die wordt gegeven door de oneigenlijke integraal

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0. \quad (2.9)$$

Als $0 < x < 1$, dan gaat de integrand naar oneindig als $t \downarrow 0$, dus dan moeten we ook bij de ondergrens $t = 0$ de integraal als een oneigenlijke integraal opvatten.

Net als de bètafunctie is ook de gammafunctie niet op een algebraïsche manier in termen van de bekende functies uit te drukken.

Met behulp van Opmerking 2.8 kan men bewijzen dat (2.9) een continue functie $\Gamma :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definieert. Om de benodigde schattingen te krijgen, nemen we aan dat $p > 0$ gegeven is. Dan geldt voor iedere $0 < \alpha \leq 1$ en iedere $x \geq p$ dat

$$\int_0^\alpha e^{-t} t^{x-1} dt \leq \int_0^\alpha t^{x-1} dt = \frac{\alpha^x}{x} \leq \frac{\alpha^p}{p},$$

waarbij het rechterlid naar nul gaat als $\alpha \downarrow 0$. Anderzijds geldt voor iedere $\beta \geq 1$ en iedere $x \leq p$ dat

$$\int_\beta^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \leq \int_\beta^\infty e^{-t} t^{p-1} dt \rightarrow 0 \quad \text{als} \quad \beta \rightarrow \infty.$$

Door $n - 1$ keer partiële integraties toe te passen ziet men dat $\Gamma(n) = (n - 1)!$ als $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Anders gezegd, de gammafunctie levert een continue uitbreiding tot de positieve reële as van de faculteitsfunctie $n \mapsto (n - 1)!$, waarbij de laatste functie alleen voor de gehele positieve getallen n is gedefinieerd. ⊗

Als een toepassing van Stelling 2.5 geven we het volgende *delingslemma*.

Lemma 2.10 Zij X een interval in $\mathbb{R}$, Y open in $\mathbb{R}^p$, $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar naar de eerste variabele en neem aan dat de functie $D_1 f$ continu is op $X \times Y$. Definieer de functie $q : X \times X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ door middel van

$$q(x, \xi, y) := \begin{cases} \frac{f(x, y) - f(\xi, y)}{x - \xi} & \text{als } \xi, x \in X, x \neq \xi, y \in Y, \\ D_1 f(\xi, y) & \text{als } \xi \in X, x = \xi, y \in Y. \end{cases}$$

Dan is de functie q continu op $X \times X \times Y$.

Bewijs Zij $\xi, x \in X$ en $y \in Y$. Dan is

$$f(x, y) - f(\xi, y) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(\xi + t(x - \xi), y) dt = \int_0^1 D_1 f(\xi + t(x - \xi), y) dt \cdot (x - \xi).$$

Hieruit volgt dat

$$q(x, \xi, y) = \int_0^1 D_1 f(\xi + t(x - \xi), y) dt. \quad (2.10)$$

als $x \neq \xi$. De formule (2.10) is echter ook geldig als $x = \xi$, omdat in dat geval de integrand in het rechterlid voor iedere t gelijk is aan $D_1 f(\xi, y)$. Pas nu Stelling 2.5 toe met (x, ξ, y) als de parameters. $\square$

2.4 Differentiatie onder het Integraalteken

Lemma 2.10 leidt tot de volgende stelling over differentiatie onder het integraalteken.

Stelling 2.11 Zij I een open interval in $\mathbb{R}$ en $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Zij $f : I \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ en neem aan dat

- i) Voor iedere $x \in I$ is de functie $t \mapsto f(x, t)$ Riemann-integreerbaar over $[a, b]$.
- ii) f is partieel differentieerbaar naar de eerste variabele en $D_1 f$ is continu op $I \times [a, b]$.

Dan is de integraal $I(x)$ in (2.6) een differentieerbare functie van de parameter x en

$$\frac{dI(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \int_a^b f(x, t) dt = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt. \quad (2.11)$$

Bewijs Zij $q(x, \xi, t)$ gedefinieerd als Lemma 2.10, met y vervangen door t . Omdat de functie q continu is als functie van alle variabelen, definieert volgens Stelling 2.5 de formule

$$Q(x, \xi) := \int_a^b q(x, \xi, t) dt$$

een continue functie Q op $I \times I$. Verder volgt uit de definitie van q dat

$$Q(x, \xi) = \begin{cases} \frac{I(x) - I(\xi)}{x - \xi} & \text{als } \xi, x \in I, x \neq \xi, \\ \int_a^b D_1 f(\xi, t) dt & \text{als } \xi \in I, x = \xi. \end{cases}$$

Uit de continuïteit van Q op $I \times I$ volgt nu dat voor iedere $\xi \in X$ geldt dat

$$\lim_{x \neq \xi, x \rightarrow \xi} \frac{I(x) - I(\xi)}{x - \xi} = \int_a^b D_1 f(\xi, t) dt,$$

hetgeen precies de bewering van de stelling is. $\square$

De formule (2.11) zegt dat we ‘differentiatie en integratie mogen verwisselen’, in de zin dat de afgeleide naar x van de integraal over t gelijk is aan de integraal over t van de afgeleide naar x .

Gevolg 2.12 Zij X een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ en $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Zij $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Neem aan dat f k keer partieel differentieerbaar is naar de eerste n variabelen. Neem verder aan dat alle partiële afgeleiden $D_{j(1)} \dots D_{j(l)} f$, met $0 \leq l \leq k$ en $1 \leq j(i) \leq n$, continu zijn op $X \times [a, b]$. Dan definieert (2.6) een k keer continu differentieerbare functie op X en voor iedere $1 \leq l \leq k$ en $1 \leq j(i) \leq n$ en iedere $x \in X$ geldt dat

$$D_{j(l)} \dots D_{j(1)} I(x) = \int_a^b D_{j(l)} \dots D_{j(1)} f(x, t) dt. \quad (2.12)$$

Bewijs Dit wordt bewezen met inductie over k , waarbij in de inductiestap gebruik wordt gemaakt van Stelling 2.11. Toepassing van Stelling 2.5 op (2.12), geeft dat alle partiële afgeleiden van I tot en met de orde k continu zijn op X , hetgeen impliceert dat $I \in C^k(X, \mathbb{R})$. $\square$

Hieruit volgt op zijn beurt de volgende uitbreiding van het delingslemma 2.10.

Gevolg 2.13 Zij I een open interval in $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $f \in C^{k+1}(I, \mathbb{R})$. Definieer $q(x, \xi) = (f(x) - f(\xi))/(x - \xi)$ als $x, \xi \in I$, $x \neq \xi$ en $q(\xi, \xi) = f'(\xi)$. Dan is $q \in C^k(I \times I, \mathbb{R})$.

Bewijs Formule (2.10) geeft dat

$$q(x, \xi) = \int_0^1 f'(\xi + t(x - \xi)) dt,$$

waarbij de integrand een C^k functie is van de variabelen (x, ξ, t) . Toepassing van Gevolg 2.12 geeft dat $q \in C^k(I \times I)$. $\square$

De uitspraak over de differentieerbaarheid is vooral interessant in de punten (x, ξ) met $x = \xi$, omdat we op grond van de bekende rekenregels al wisten dat op de verzameling der (x, ξ) met $x \neq \xi$ de functie $q(x, \xi)$ een C^{k+1} functie is.

Als de functie ook nog afhangt van extra parameters y , zodanig dat alle partiële afgeleiden met betrekking tot x tot en met de orde $k + 1$ continue functie zijn van (x, y) , dan hangen alle partiële afgeleiden van $q(x, \xi, y)$ naar de variabelen (x, ξ) continu af van (x, ξ, y) .

Voorbeeld 2.14 De functie $\sigma(x)$, gedefinieerd door $\sigma(x) = (\sin x)/x$ als $x \neq 0$ en $\sigma(0) = 1$, is willekeurig vaak differentieerbaar op de hele reële as. $\oslash$

Voorbeeld 2.15 De bètafunctie van Euler, zie (2.8), is willekeurig vaak differentieerbaar op $]1, \infty[\times]1, \infty[$ en voor iedere k en l geldt dat

$$\frac{\partial^{k+l} B(p, q)}{\partial p^k \partial q^l} = \int_0^1 (\log t)^k t^{p-1} (\log(1-t))^l (1-t)^{q-1} dt. \quad (2.13)$$

De continuïteit van de integrand als functie van $(p, q, t) \in]1, \infty[\times]1, \infty[\times]0, 1[$ volgt uit het feit dat voor iedere $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ en iedere $z > 0$ geldt dat $(\log x)^m x^z \rightarrow 0$ als $x \downarrow 0$, waarbij men voor het bewijs analoog te werk gaat als in Voorbeeld 2.7. De uitspraak over de differentieerbaarheid van de bètafunctie en haar afgeleiden volgt nu door herhaald toepassen van Gevolg 2.12.

Met behulp van de methoden van Opmerking 2.8, toegepast op de oneigenlijke integralen in het rechterlid van (2.13), kan bewezen worden dat de uitspraken geldig blijven met $]1, \infty[\times]1, \infty[$ vervangen door $]0, \infty[\times]0, \infty[$.

Op soortgelijke wijze kan men aantonen dat de gammafunctie van Euler, zie (2.9), willekeurig vaak differentieerbaar is op $]0, \infty[$. De gammafunctie is daarmee een gladde uitbreiding tot de positieve reële as van de faculteitsfunctie $(n-1)!$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. $\oslash$

2.5 Verwisseling van de Integratievolgorde

Ter afronding van het hoofdstuk ‘Verwisselingsstellingen’ geven we nog het volgende resultaat.

Stelling 2.16 Zij $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ en $c, d \in \mathbb{R}$, $c < d$. Neem aan dat de functie $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continu is. Dan geldt:

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(t, s) dt \right) ds = \int_a^b \left(\int_c^d f(t, s) ds \right) dt. \quad (2.14)$$

Bewijs Definieer, voor iedere $x \in [a, b]$ en $s \in [c, d]$,

$$\phi(x, s) := \int_a^x f(t, s) dt.$$

Merk op dat $\phi(a, s) = 0$.

Uit de analyse van functies van één variabele weten we dat voor iedere $s \in [c, d]$ de functie $x \mapsto \phi(x, s)$ differentieerbaar is, met afgeleide gelijk aan

$$\frac{\partial \phi(x, s)}{\partial x} = f(x, s),$$

hetgeen een continue functie is van $(x, s) \in [a, b] \times [c, d]$. Definieer

$$\Phi(x) := \int_c^d \phi(x, s) ds.$$

Merk op dat $\Phi(a) = 0$, omdat voor iedere $s \in [c, d]$ geldt dat $\phi(a, s) = 0$.

Stelling 2.11 geeft dat de functie Φ differentieerbaar is op $[a, b]$, met afgeleide gelijk aan

$$\Phi'(x) := \int_c^d \frac{\partial \phi(x, s)}{\partial x} ds = \int_c^d f(x, s) ds.$$

Integratie hiervan over $x \in [a, b]$ geeft nu

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, s) ds \right) dx = \int_a^b \Phi'(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(b) = \int_c^d \left(\int_a^b f(t, s) dt \right) ds.$$

Hieruit volgt (2.14) als we in het linkerlid de integratievariabele x vervangen door t . $\square$

In een later college zult u kennis maken met een theorie van meerdimensionale integratie. Daarin wordt de verwisselbaarheid van de integratievolgorde afgeleid zonder gebruik te maken van Stelling 2.11. Deze verwisselingsstelling geldt bovendien voor een klasse van functies van meer variabelen die veel ruimer is dan de klasse van continue functies.

Met het oog hierop is het interessant dat omgekeerd Stelling 2.11 ook afgeleid kan worden uit Stelling 2.16.

Bewijs Neem aan dat f een functie is als in Stelling 2.11. Zij $c \in I$. Voor iedere $x \in I$ met $x > c$ geldt dat

$$\int_a^b f(x, t) dt = \int_a^b \left(f(c, t) + \int_c^x \frac{\partial f(s, t)}{\partial s} ds \right) dt = \int_a^b f(c, t) dt + \int_c^x \left(\int_a^b \frac{\partial f(s, t)}{\partial s} dt \right) ds.$$

Hierin is in de tweede identiteit Stelling 2.16 gebruikt, met f vervangen door de continue $D_1 f$ (en met s en t verwisseld). Omdat in het rechterlid de variabele x als bovengrens van het integratie-interval voorkomt, is de conclusie dat het linkerlid differentieerbaar is naar x , met afgeleide gelijk aan

$$\int_a^b \frac{\partial f(s, t)}{\partial s} dt \Big|_{s=x} = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dt.$$

Dit is precies de conclusie van Stelling 2.11. Omdat er bij iedere $x \in I$ een $c \in I$ is met $x > c$, geldt de conclusie voor iedere $x \in I$. $\square$

2.6 Vraagstukken bij Hoofdstuk 2

Vraagstuk 2.1 De functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is gedefinieerd door

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{2xy}{x^2 + y^2} \quad \text{als } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) &= 0. \end{aligned}$$

- Bewijs dat f continu is op $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- Bewijs dat voor iedere $x \in \mathbb{R}$ de functie $y \mapsto f(x, y)$ continu is en dat voor iedere $y \in \mathbb{R}$ de functie $x \mapsto f(x, y)$ continu is.
- Schets de niveauverzamelingen van f voor de functiewaarden $-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$. Hint: substitueer poolcoördinaten $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$. Welke waarden kan f aannemen?
- Bewijs dat f niet continu is in $(0, 0)$.
- Bewijs dat desondanks

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = f(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y).$$

⊗

Vraagstuk 2.2 Zij V, K en $f : V \times K \rightarrow \mathbb{R}$ als in Lemma 2.6.

- Bewijs dat er voor iedere $x \in V$ een $\eta(x) \in K$ is met de eigenschap dat voor iedere $y \in K$ geldt dat $f(x, \eta(x)) \leq f(x, y)$. Anders gezegd, de functie $y \mapsto f(x, y)$ op K neemt zijn minimum aan in een punt $\eta(x)$ van K .
- Definieer, voor iedere $x \in V$,

$$m(x) = \min_{y \in K} f(x, y) = f(x, \eta(x)),$$

de minimale waarde van de functie $y \mapsto f(x, y)$ op K . Bewijs dat dit een continue functie $m : V \rightarrow \mathbb{R}$ definieert. Bewijs dat dit de volgende verwisselingsstelling impliceert:

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \min_{y \in K} f(x, y) = \min_{y \in K} \lim_{x \rightarrow \xi} f(x, y).$$

- Beschouw het voorbeeld $V =]-4/3, 4/3[$, $K = [-2, 2]$ en $f(x, y) = y^4 + x y^3 - 2y^2 - 3x y$.
Bewijs dat $\partial f(x, y)/\partial y = 0$ dan en slechts dan als $y = -1$, $y = 1$, of $y = -3x/4$. Neem in het vervolg aan dat $-4/3 < x < 4/3$. Bewijs dat $\partial^2 f(x, y)/\partial y^2 > 0$ als $y = \pm 1$ en $\partial^2 f(x, y)/\partial y^2 < 0$ als $y = -3x/4$. Bewijs dat noodzakelijkerwijze $\eta(x) = -1$ als $x < 0$ en $\eta(x) = 1$ als $x > 0$, terwijl we voor $\eta(0)$ de keuze hebben tussen -1 en 1 . Dit voorbeeld laat zien dat het punt waar het minimum aangenomen wordt niet altijd op een continu van x afhankelijke manier gekozen kan worden. Bewijs dat $m(x) = -1 - 2|x|$, waarmee bevestigd wordt dat de functie m desondanks wel continu is.

⊗

Vraagstuk 2.3 Gegeven is een C^2 functie $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ en een twee keer differentieerbare functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Toon aan dat

$$\frac{\partial^2 f(g(x, y))}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(g(x, y))}{\partial y \partial x}.$$

Waarschuwing: we hebben niet verondersteld dat de tweede orde afgeleide f'' van f continu is. ⊗

Vraagstuk 2.4 Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{R}^3$. Als $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ een differentieerbare reëelwaardige functie is op U , dan is de gradiënt $\text{grad } f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ van f een vectorveld in U . Als $v : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ een differentieerbaar vectorveld is, dan is de *divergentie* $\text{div } v : U \rightarrow \mathbb{R}$ van v gedefinieerd als

$$(\text{div } v)(x) := \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}.$$

Verder definieert

$$(\text{rot } v)_1 = D_2 v_3 - D_3 v_2, \quad (\text{rot } v)_2 = D_3 v_1 - D_1 v_3, \quad (\text{rot } v)_3 = D_1 v_2 - D_2 v_1$$

een vectorveld $\text{rot } v : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ op U , dat de *rotatie* van v genoemd wordt.

- Laat zien dat voor elke C^2 functie f op U geldt: $\text{rot}(\text{grad } f) = 0$.
- Laat zien dat voor elk C^2 -vectorveld v op U geldt: $\text{div}(\text{rot } v) = 0$.

⊗

Vraagstuk 2.5 Zij $f(x, y) = e^{-x} y$. Bewijs dat f continu is op $\mathbb{R}^2$, dat voor iedere $y \geq 0$ de oneigenlijke integraal

$$I(y) := \int_0^\infty e^{-x} y \, dx$$

bestaat, maar dat de functie $I : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ niet continu is in het punt 0.

Stelling 2.5 is dus niet zonder meer goed voor oneigenlijke integralen. ⊗

Vraagstuk 2.6

- Bereken $\int_0^A (x^2 + t)^{-2} \, dx$ voor $t > 0$ door differentiatie naar t van $\int_0^A (x^2 + t)^{-1} \, dx$.
- Bereken de oneigenlijke integraal $\int_0^\infty (x^2 + t)^{-2} \, dx$ en verifieer dat deze gelijk is aan de afgeleide naar t van de oneigenlijke integraal $\int_0^\infty (x^2 + t)^{-1} \, dx$.
- Bereken $\int_0^\infty (x^2 + 1)^{-2} \, dx$ en $\int_0^\infty (x^2 + 1)^{-3} \, dx$.

⊗

Vraagstuk 2.7 Definieer $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ door:

$$f(a) = \int_0^1 \frac{e^{-a^2(1+t^2)/2}}{1+t^2} \, dt.$$

- a) Bewijs dat $f(0) = \pi/4$. Bewijs door differentiatie naar a , gevolgd door een substitutie van variabelen, dat geldt:

$$f'(a) = -e^{-a^2/2} \int_0^a e^{-x^2/2} dx, \quad a > 0.$$

Definieer $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ door:

$$g(a) = f(a) + \left(\int_0^a e^{-x^2/2} dx \right)^2 / 2.$$

- b) Bewijs dat $g' = 0$ op $\mathbb{R}$. Concludeer dat $g(a) = g(0) = \pi/4$, voor alle $a \in \mathbb{R}$.
 c) Bewijs dat voor iedere $a \in \mathbb{R}$ geldt dat $0 \leq f(a) \leq e^{-a^2/2}$. Bewijs dat $f(a) \rightarrow 0$ als $a \rightarrow \infty$.
 Bewijs hiermee tenslotte dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}.$$

Dit is een bekende formule van Gauss. ⊗

Vraagstuk 2.8 Zij

$$I(x) := \int_0^{\pi/2} \log(1 + x \cos^2 \theta) d\theta, \quad x > -1.$$

Bewijs door middel van differentiatie naar x en de substitutie $t = \sin \theta / \cos \theta$ dat

$$I'(x) = \frac{1}{x} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{t^2 + 1} - \frac{1}{t^2 + 1 + x} \right) dt = \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x \sqrt{1+x}}.$$

Bereken $I(x)$.

Hint: schrijf $J(u) = I(u^2 - 1)$ en onderzoek $J'(u)$. Wat is $I(0)$? ⊗

Vraagstuk 2.9 Zij $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continu. Veronderstel dat f differentieerbaar is naar de eerste variabele en dat $D_1 f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continu is. Definieer

$$F(x) = \int_a^x f(x, y) dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- a) Bewijs dat F continu differentieerbaar is en dat

$$F'(x) = f(x, x) + \int_a^x \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- b) Bewijs dat

$$\int_a^c f(c, y) dy = \int_a^c f(x, x) dx + \int_a^c \int_a^x \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dy dx.$$

⊗

Vraagstuk 2.10 In de situatie van Gevolg 2.13, bewijs dat voor iedere $1 \leq l \leq k$ geldt dat

$$\frac{\partial^l q(x, \xi)}{\partial x^l} \Big|_{x=\xi} = \frac{f^{(l+1)}(\xi)}{l+1}.$$

In de notatie van Voorbeeld 2.14, bereken $\sigma'(0)$ en $\sigma''(0)$.

⊗

Vraagstuk 2.11 Bewijs achtereenvolgens

$$\frac{\partial}{\partial x} (e^{-x \sin t} \cos(x \cos t)) = \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial t} (e^{-x \sin t} \sin(x \cos t)), \quad x \neq 0,$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin t} \cos(x \cos t) dt = -\frac{\sin x}{x}, \quad x \neq 0,$$

$$\int_0^y \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} e^{-y \sin t} \cos(y \cos t) dt, \quad y > 0,$$

$$\left| \int_0^{\pi/2} e^{-y \sin t} \cos(y \cos t) dt \right| \leq \int_0^\epsilon e^{-y \sin t} dt + \int_\epsilon^{\pi/2} e^{-y \sin t} dt \leq \epsilon + \frac{\pi}{2} e^{-y \sin \epsilon}, \quad 0 < \epsilon < \pi/2,$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Commentaar: in het bewijs van Lemma 6.20 wordt de limiet op een heel andere manier uitgerekend. ⊗

Vraagstuk 2.12

- Toon aan dat de functie $(x, y) \mapsto y/(x^2 + y^2)$ continu is op $[0, 1] \times [1, 2]$.
- Controleer d.m.v. een directe berekening dat

$$\int_1^2 \int_0^1 \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^1 \int_1^2 \frac{y}{x^2 + y^2} dy dx.$$

⊗

Vraagstuk 2.13 Gegeven zijn $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ met $0 \leq a < b$ en $0 < c < d$.

- Toon aan dat de functie $f : (x, y) \mapsto 1/(x + y)$ continu is op $[a, b] \times [c, d]$.
- Controleer d.m.v. een rechtstreekse berekening dat

$$\int_a^b \int_c^d \frac{1}{x + y} dy dx = \int_c^d \int_a^b \frac{1}{x + y} dx dy.$$

⊗

3 Lijnintegralen

3.1 Lijnintegralen van Differentiaalvormen

Definitie 3.1 Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ en $f_j : U \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$ een n -tal van continue reëelwaardige functies op U . Zij γ een C^1 kromme in U , dat wil zeggen $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ en voor iedere $t \in [a, b]$ geldt dat $\gamma(t) \in U$. Dan heet

$$\int_{\gamma} \sum_{j=1}^n f_j(x) dx_j := \int_a^b \left(\sum_{j=1}^n f_j(\gamma(t)) \frac{d\gamma_j(t)}{dt} \right) dt \quad (3.1)$$

de lijnintegraal over de kromme γ van de differentiaalvorm

$$\sum_{j=1}^n f_j(x) dx_j. \quad (3.2)$$

Merk op dat de aannamen impliceren dat de integrand in het rechterlid van (3.1) een continue functie van $t \in [a, b]$ is, dus de integraal is goed gedefinieerd. $\oslash$

Opmerking 3.2 De terminologie is klassiek en gebaseerd op begrippen die tegenwoordig niet meer gebruikt worden. Dit vereist enige toelichting.

Als ϕ een differentieerbare functie is van een reële variabele t , dan is de afgeleide $\phi'(t)$ gedefinieerd als de limiet voor $t' \rightarrow t$, met $t' \neq t$, van het differentiequotient

$$\frac{\phi(t') - \phi(t)}{t' - t}.$$

In de begintijd van de differentiaal- en integraalrekening nam men in gedachten de limiet van zowel teller als noemer en noemde die desbetreffende ‘oneindig kleine grootheden’ de *differentialen* $d\phi(t)$, resp. dt . Vervolgens werd de afgeleide gezien als het quotiënt van deze differentialen. Vandaar de naam *differentiaalquotiënt* en de notatie

$$\frac{d\phi(t)}{dt}$$

voor de afgeleide $\phi'(t)$.

Op soortgelijke manier werd de *integraal* van de functie ϕ over een interval $[a, b]$ behandeld. Riemann’s definitie is dat de integraal de limiet is van de sommen

$$\sum_{i=1}^N f(\tau_i) (t_i - t_{i-1})$$

waarbij $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ opeenvolgende punten in het interval $[a, b]$ zijn en $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Daarbij wordt de limiet genomen voor verdelingen waarvoor het maximum van de lengten $t_i - t_{i-1}$ van de deelintervallen naar nul gaat. Dit impliceert dat daarbij $N \rightarrow \infty$. In de klassieke terminologie worden in de limiet de grootheden $t_i - t_{i-1}$ vervangen door de oneindig kleine grootheden dt , de bijbehorende differentialen. (Oneindig klein = *infinitesimaal*, deze term leeft nog voort in de naam van het college Infinitesimaalrekening.) Deze dt worden dan vermenigvuldigd met de factor $f(t)$ en

vervolgens gesommeerd over de oneindig vele t 's. Het resultaat, de integraal van f over $[a, b]$, wordt genoteerd met

$$\int_a^b f(t) dt,$$

waarin het integraalteken $\int$ een gestyleerde S is die aan de sommatieprocedure herinnert.

De benaderende Riemann-sommen voor de integraal in het rechterlid van (3.1) zijn de grootheden

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n f_j(\gamma(\tau_i)) \frac{d\gamma_j(t)}{dt} \Big|_{t=\tau_i} (t_i - t_{i-1}).$$

Als we hierin $d\gamma_j(t)/dt$ in $t = \tau_i$ vervangen door zijn benaderende differentiequotiënt

$$\frac{\gamma_j(t_i) - \gamma_j(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$$

en we schrijven $x_{j,i} = \gamma_j(t_i)$ en $\xi_i = \gamma(\tau_i) \in \mathbb{R}^n$, dan wordt de integraal in het rechterlid van (3.1) ook benaderd door de sommen

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n f_j(\xi_i) (x_{j,i} - x_{j,i-1}).$$

In de klassieke terminologie wordt in de limiet de toename $x_{j,i} - x_{j,i-1}$ van de j -de coördinaat vervangen door de differentiaal dx_j en wordt de som vervangen door de integraal in het linkerlid van (3.1), waarbij integratie over γ betekent dat $x = \gamma(t)$ dient te worden gesubstitueerd. De lineaire uitdrukking (3.2) in de differentiaal dx_j , $1 \leq j \leq n$ werd een ‘differentiaalvorm’ genoemd, omdat een lineaire functie van een aantal variabelen ook wel een *lineaire vorm* in die variabelen werd genoemd.

Al in de begintijd van de differentiaal- en integraalrekening, in het engels *calculus* genoemd, kwam er scherpe kritiek op het baseren van de theorie op de verder ongedefinieerde oneindig kleine grootheden dt , resp. dx_j . Merk op dat het hierbij zeker niet de bedoeling is dat deze grootheden geïdentificeerd worden met het getal 0, omdat dan de oneindige som van de $f(t) dt$ steeds nul zou opleveren. Zo leverde bisschop Berkeley (naar wie de universiteitsplaats Berkeley in Californië is genoemd) in 1734 scherpe kritiek op de vaagheid van dit begrip. Hij suggereerde zelfs dat de correctheid van de daaruit opgebouwde differentiaal- en integraalrekening wel eens het resultaat zou kunnen zijn van het op elkaar stapelen van foute argumenten, waarbij de fouten elkaar op een gelukkige wijze compenseren. Pas in de tweede helft van de 19de eeuw, na de algemene acceptatie van de ϵ - δ -definitie van convergentie, realiseerde men zich dat de gehele analyse opgebouwd kon worden *zonder* van oneindig kleine grootheden gebruik te maken. Zie het boek I. Grattan-Guinness, ed.: *From the Calculus to Set Theory 1630–1910*. Princeton University Press, Princeton and Oxford, 1980, voor meer details over de historische ontwikkelingen.

In het onderwijs woedt deze strijd nog steeds voort. Omdat de ϵ - δ -definitie van limieten te moeilijk gevonden wordt, propageren sommige onderwijsdeskundigen om afgeleiden en integralen van functies op de hierboven geschetste wijze in termen van differentiaalvormen in te voeren. Ik zie echter niet in waarom wij de leerlingen zouden moeten belasten met een begrip dat de wiskunde op goede gronden al meer dan een eeuw geleden heeft verlaten. Het lijkt mij voldoende en ook haalbaar om voorbeelden te laten zien waarbij de differentiequotienten convergeren en waarbij de limietwaarde met behulp van de gebruikelijke rekenregels kan worden berekend. En vervolgens mee te delen dat

dit goed gaat voor alle functies die men in het VWO tegenkomt, al zal men misschien uit moeten kijken bij een voorbeeld als $(\sqrt{x} - \sqrt{0}) / (x - 0)$.

In de moderne theorie van de differentiaalmeetkunde wordt een differentiaalvorm op U gedefinieerd als een afbeelding f die aan iedere $x \in U$ een lineaire afbeelding $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ toevoegt, dus $f(x) \in \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ voor iedere $x \in U$. De integraal van f over de kromme γ wordt dan gedefinieerd als

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f(x) dx := \int_a^b f(\gamma(t)) \frac{d\gamma(t)}{dt} dt,$$

waarbij we zoals gebruikelijk bij lineaire afbeeldingen L het beeld $L(v)$ van de vector v met L v noteren. Wij herkennen hierin (3.1) als we voor $f(x)$ de lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}$ nemen die is gedefinieerd door

$$f(x) v := \sum_{j=1}^n f_j(x) v_j, \quad v \in \mathbb{R}^n.$$

Anders gezegd, $f(x)$ is de lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}$ waarvoor

$$\text{matrix van } f(x) = (f_1(x) \cdots f_n(x)).$$

Een, op een subtiële manier, ietwat ander begrip is dat van een *vectorveld*. Dat is een afbeelding die aan iedere $x \in U$ een element van $\mathbb{R}^n$ toevoegt. Is $\vec{f}$ het vectorveld waarvoor

$$\vec{f}(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)), \quad x \in U,$$

dan is de integrand in het rechterlid van (3.1) gelijk aan het inproduct $\langle u, v \rangle$ van de vector $u = \vec{f}(\gamma(t))$ met de snelheidsvector $v = \gamma'(t)$. In deze terminologie heet (3.1) de *lijnintegraal van het vectorveld $\vec{f}$ over de kromme γ* en wordt genoteerd met

$$\int_{\gamma} \langle \vec{f}(x), dx \rangle := \int_a^b \langle \vec{f}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt. \quad (3.3)$$

Welke terminologie men ook gebruikt, het enige dat men hoeft te onthouden is dat de lijnintegraal van een differentiaalvorm, resp. vectorveld is gedefinieerd door middel van de expliciete formule in het rechterlid van (3.1). $\odot$

Na al dit gepraat over terminologie is het tijd voor een voorbeeld. Dit voorbeeld levert ook een nadere toelichting op het hoekbegrip in het vlak.

Voorbeeld 3.3 Zij γ een continu differentieerbare kromme in het vlak die niet door de oorsprong gaat. Dat wil zeggen, $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^2)$ en voor iedere $t \in [a, b]$ geldt dat $\gamma(t) \neq (0, 0)$. We onderzoeken de lijnintegraal over γ van de differentiaalvorm

$$\omega := \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy, \quad (3.4)$$

die gedefinieerd en continu is op het complement $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ van de oorsprong in het vlak.

We berekenen deze lijnintegraal onder de aanname dat er continu differentieerbare functies $r, \theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zijn, met de eigenschap dat voor iedere $t \in [a, b]$ geldt dat $r(t) > 0$ en

$$\gamma(t) = r(t) (\cos \theta(t), \sin \theta(t)). \quad (3.5)$$

Hiermee wordt de integrand in het rechterlid van (3.1) gelijk aan

$$\begin{aligned} & \frac{-r \sin \theta}{r^2} (r \cos \theta)' + \frac{r \cos \theta}{r^2} (r \sin \theta)' \\ &= \frac{-\sin \theta}{r} (r' \cos \theta - r (\sin \theta) \theta') + \frac{\cos \theta}{r} (r' \sin \theta + r (\cos \theta) \theta') = \theta'. \end{aligned}$$

De lijnintegraal van ω over γ is daarom gelijk aan

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \theta'(t) dt = \theta(b) - \theta(a), \quad (3.6)$$

ofwel de *toename van de hoek θ langs de kromme γ* . $\oslash$

Op grond van het nu volgende lemma is de formule (3.6) algemeen toepasbaar.

Lemma 3.4 *Iedere continu differentieerbare kromme in het complement van de oorsprong in het vlak kan geschreven worden als (3.5), met continu differentieerbare functies r en θ .*

Bewijs Het is duidelijk dat we voor $r(t)$ moeten nemen

$$r(t) := (\gamma_1(t)^2 + \gamma_2(t)^2)^{1/2}, \quad (3.7)$$

hetgeen inderdaad een strikt positieve en continu differentieerbare functie van t definieert. Dan definieert $\delta(t) := r(t)^{-1} \gamma(t)$ een C^1 kromme δ , waarvoor

$$\delta_1(t)^2 + \delta_2(t)^2 = 1, \quad t \in [a, b], \quad (3.8)$$

ofwel $\delta(t)$ loopt op de cirkel $\mathbf{T}$ in het vlak met middelpunt in de oorsprong en straal gelijk aan 1. Het is bekend dat dit impliceert dat er een $\theta \in \mathbb{R}$ is met $\delta_1(t) = \cos \theta$ en $\delta_2(t) = \sin \theta$ en we zouden klaar zijn als we $\theta = \theta(t)$ zo kunnen kiezen dat $\theta(t)$ op een continu differentieerbare manier van t afhangt. Het probleem is echter dat de oplossing θ van deze vergelijkingen niet eenduidig bepaald is. Immers, als θ een oplossing is, dan geldt voor ieder geheel getal k dat $\theta + k 2\pi$ ook een oplossing is.

Het idee is nu om de toename van de hoek θ langs de kromme γ , die gelijk is aan de toename van de hoek θ langs de kromme δ , te *definieren* als de lijnintegraal van ω over δ . Preciezer, we kiezen een $\theta(a)$ waarvoor $\delta_1(a) = \cos \theta(a)$, $\delta_2(a) = \sin \theta(a)$ en vervolgens definiëren we voor iedere $t \in [a, b]$

$$\theta(t) := \theta(a) + \int_{\delta|_{[a,t]}} \omega, \quad (3.9)$$

waarin $\delta|_{[a,t]}$ de beperking voorstelt van de kromme δ tot het interval $[a, t]$.

Bij uitschrijven van het rechterlid van (3.1), met γ vervangen door $\delta|_{[a,t]}$, is het verstandig om voor de integratievariabele een andere letter dan t te gebruiken, omdat t het eindpunt van het integratie-interval is. Het feit dat t het eindpunt van het integratie-interval is impliceert dat de integraal differentieerbaar is naar t , met als afgeleide de integrand in het punt t . Met andere woorden, $t \mapsto \theta(t)$ is differentieerbaar en

$$\theta'(t) = -\delta_2(t) \delta_1'(t) + \delta_1(t) \delta_2'(t), \quad t \in [a, b]. \quad (3.10)$$

Omdat het rechterlid continu van t afhangt, concluderen we dat de functie $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continu differentieerbaar is.

Differentiatie van de relatie (3.8) naar t , gevolgd door delen door 2, leidt tot de vergelijking

$$\delta_1(t) \delta_1'(t) + \delta_2(t) \delta_2'(t) = 0, \quad t \in [a, b]. \quad (3.11)$$

Combinatie van (3.10) met (3.11) en (3.8) geeft vervolgens dat

$$\begin{aligned} \delta_1 \theta' &= -\delta_2 \delta_1 \delta_1' + \delta_1^2 \delta_2' = \delta_2^2 \delta_2' + \delta_1^2 \delta_2' = \delta_2' \quad \text{en} \\ \delta_2 \theta' &= -\delta_2^2 \delta_1' + \delta_1 \delta_2 \delta_2' = -\delta_2^2 \delta_1' - \delta_1^2 \delta_1' = -\delta_1'. \end{aligned}$$

Als we anderzijds schrijven $c(t) := \cos \theta(t)$ en $s(t) := \sin \theta(t)$, dan volgt uit de kettingregel dat $s' = c \theta'$ en $c' = -s \theta'$. Anders gezegd, de vectorwaardige functies (δ_1, δ_2) en (c, s) op het interval $[a, b]$ voldoen aan dezelfde differentiaalvergelijkingen en hebben dezelfde waarden in het punt a .

Om aan te tonen dat hieruit volgt dat (δ_1, δ_2) en (c, s) op het hele interval $[a, b]$ aan elkaar gelijk zijn, merken we op dat

$$(c \delta_1 + s \delta_2)' = c' \delta_1 + c \delta_1' + s' \delta_2 + s \delta_2' = -s \theta' \delta_1 - c \delta_2 \theta' + c \theta' \delta_2 + s \delta_1 \theta' = 0.$$

Dit impliceert dat de functie $c \delta_1 + s \delta_2$ constant is op het interval $[a, b]$. In $t = a$ heeft deze functie de waarde $(\cos \theta(a))^2 + (\sin \theta(a))^2 = 1$, dus voor iedere $t \in [a, b]$ geldt dat

$$c(t) \delta_1(t) + s(t) \delta_2(t) = 1. \quad (3.12)$$

Op soortgelijke wijze krijgen we dat

$$(-s \delta_1 + c \delta_2)' = -s' \delta_1 - s \delta_1' + c' \delta_2 + c \delta_2' = -c \theta' \delta_1 + s \delta_2 \theta' - s \theta' \delta_2 + c \delta_1 \theta' = 0,$$

dus ook de functie $-s \delta_1 + c \delta_2$ is constant op het interval $[a, b]$. De waarde in $t = a$ is gelijk aan $-\sin \theta(a) \cos \theta(a) + \cos \theta(a) \sin \theta(a) = 0$, dus voor iedere $t \in [a, b]$ geldt dat

$$-s(t) \delta_1(t) + c(t) \delta_2(t) = 0. \quad (3.13)$$

Door (3.12), resp. (3.13) te vermenigvuldigen met $c(t)$, resp. $-s(t)$, de resulterende vergelijkingen bij elkaar op te tellen en daarbij gebruik te maken van $c(t)^2 + s(t)^2 = 1$, krijgen we dat $\delta_1(t) = c(t) = \cos \theta(t)$. Door (3.12), resp. (3.13) te vermenigvuldigen met $s(t)$, resp. $c(t)$, de resulterende vergelijkingen bij elkaar op te tellen en gebruik te maken van $c(t)^2 + s(t)^2 = 1$, krijgen we anderzijds dat $\delta_2(t) = s(t) = \sin \theta(t)$. Hiermee is (3.5) bewezen, als gevolg van de definities (3.7), resp. (3.9) voor $r(t)$, resp. $\theta(t)$. $\square$

Definitie 3.5 Combinatie van Lemma 3.4 met Voorbeeld 3.3 geeft dat voor iedere continu differentieerbare kromme γ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ de integraal van de differentiaalvorm ω in (3.4) over γ gelijk is aan de toename van de hoek $\theta(t)$ langs γ . Hierbij geldt (3.5) met de definities (3.7) en (3.9).

Als γ een *gesloten kromme* is in de zin dat $\gamma(b) = \gamma(a)$, dan volgt uit (3.5) dat er een geheel getal k is waarvoor $\theta(b) = \theta(a) + k 2\pi$. Het gehele getal k heet het *windingsgetal* $W_{(0,0)}(\gamma)$ van γ om de oorsprong $(0, 0)$ in het vlak, het aantal malen dat γ om de oorsprong heen is gelopen.

Iets algemener, als $p \in \mathbb{R}^2$ en γ is een gesloten C^1 kromme die niet door het punt p gaat, dan heet

$$W_p(\gamma) := \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma-p} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right) \quad (3.14)$$

het *windingsgetal van γ om het punt p* . Hierin is $\gamma - p$ een notatie voor de kromme $t \mapsto \gamma(t) - p$, die niet door de oorsprong gaat. Het is hierbij opmerkelijk dat, voor iedere gesloten C^1 kromme γ

in het vlak die niet door p gaat, het rechterlid van (3.14) altijd een geheel getal is. Het voorbeeld $\gamma(t) = p + (\cos(kt), \sin(kt))$ met $t \in [0, 2\pi]$ laat zien dat ook ieder geheel getal k als waarde van het rechterlid van (3.14) op kan treden.

De klassieke notatie voor de differentiaalvorm ω in (3.4) is $\omega = d\theta$, de *infinitesimale toename van de hoek* θ . Daarbij wordt opgemerkt dat, hoewel de hoek θ alleen maar modulo gehele veelvoud van 2π is bepaald, zijn infinitesimale toename $d\theta$ wel eenduidig is vastgelegd. Zoals al eerder is aangegeven, zullen wij infinitesimale grootheden hier verder niet gebruiken, omdat ze niet nodig zijn. De toename van de hoek langs de kromme γ is voor ons gedefinieerd als de integraal over $[a, b]$ van de functie $(-\gamma_2 \gamma_1' + \gamma_1 \gamma_2') / (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)$. $\oslash$

Het volgende lemma zegt dat de lijnintegraal niet afhangt van de manier waarop de kromme doorlopen wordt, met dien verstande dat de lijnintegraal in zijn tegengestelde overgaat als de kromme in de omgekeerde richting doorlopen wordt. Vanwege dit laatste noemt men (3.1) dan ook een *georiënteerde lijnintegraal*.

Lemma 3.6 *Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ en $f_j : U \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq n$ continu. Noteer $\omega := \sum_{j=1}^n f_j(x) dx_j$. Zij $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ en zij $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ een C^1 kromme in U .*

Zij $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ en $\psi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ continu differentieerbaar. We noteren met $\gamma \circ \psi : \tau \mapsto \gamma(\psi(\tau))$ de door middel van de substitutie van variabelen $t = \psi(\tau)$ opnieuw geparametriseerde kromme γ .

Als $\psi(\alpha) = a$ en $\psi(\beta) = b$, dan is

$$\int_{\gamma \circ \psi} \omega = \int_{\gamma} \omega. \quad (3.15)$$

Is daarentegen $\psi(\alpha) = b$ en $\psi(\beta) = a$, dan is

$$\int_{\gamma \circ \psi} \omega = - \int_{\gamma} \omega. \quad (3.16)$$

Bewijs Schrijf

$$s(t) = \sum_{j=1}^n f_j(\gamma(t)) \gamma_j'(t)$$

voor de integrand in het rechterlid van (3.1). De functie s is continu; uit Inleiding Analyse weten we dat s een primitieve heeft, een differentieerbare functie S waarvoor $S'(t) = s(t)$. Hiervoor geldt dat

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b s(t) dt = \int_a^b S'(t) dt = S(b) - S(a).$$

Vanwege de kettingregel is

$$\frac{d\gamma_j(\psi(\tau))}{d\tau} = \gamma_j'(\psi(\tau)) \psi'(\tau).$$

Hieruit volgt dat bij het vervangen van γ door $\gamma \circ \psi$ de integrand $s(t)$ in het rechterlid van (3.1) vervangen dient te worden door

$$s(\psi(\tau)) \psi'(\tau) = S'(\psi(\tau)) \psi'(\tau) = \frac{dS(\psi(\tau))}{d\tau}. \quad (3.17)$$

Hierbij is in de tweede identiteit opnieuw de kettingregel gebruikt. Dit leidt tot de conclusie dat $\int_{\gamma \circ \psi} \omega$, de integraal van (3.17) over $[\alpha, \beta]$, gelijk is aan $S(\psi(\beta)) - S(\psi(\alpha))$.

In het eerste in het lemma genoemde geval is dit gelijk aan $S(b) - S(a) = \int_{\gamma} \omega$, hetgeen (3.15) impliceert. In het tweede geval krijgen we

$$\int_{\gamma \circ \psi} \omega = S(a) - S(b) = -(S(b) - S(a)) = - \int_{\gamma} \omega,$$

ofwel (3.16). □

Het bewijs van Lemma 3.6 berust op de formules voor substitutie van variabelen in een integraal, waarvan we zelfs het bewijs opnieuw hebben gegeven.

Opmerking 3.7 De *ongeorienteerde lijnintegraal* van een scalairwaardige continue functie f over een C^1 kromme γ is gedefinieerd als

$$\int_{\gamma} f(x) \|dx\| := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt.$$

Hierin is $\|\gamma'(t)\|$ de Euclidische norm van de snelheidsvector $\gamma'(t)$. Deze integraal verandert niet van teken als de kromme in de tegengestelde richting wordt doorlopen, vandaar de naam ‘ongeorienteerde lijnintegraal’. De *lengte* $l(\gamma)$ van de kromme γ wordt gedefinieerd als

$$l(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt,$$

dit is dus gelijk aan de ongeorienteerde lijnintegraal van de functie 1 over γ . De ongeorienteerde lijnintegraal en de lengte van de kromme treden op in de schattingen

$$\left| \int_{\gamma} \langle \vec{f}(x), dx \rangle \right| \leq \int_{\gamma} \|\vec{f}(x)\| \|dx\| \leq \max_{x \in \gamma([a, b])} \|\vec{f}(x)\| l(\gamma) \quad (3.18)$$

voor de georienteerde lijnintegraal van het vectorveld $\vec{f}$ over γ . Deze schattingen volgen uit

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \langle \vec{f}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \right| &\leq \int_a^b \left| \langle \vec{f}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \right| dt \\ &\leq \int_a^b \|\vec{f}(\gamma(t))\| \|\gamma'(t)\| dt \leq \max_{x \in \gamma([a, b])} \|\vec{f}(x)\| \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt, \end{aligned}$$

waarbij in de tweede ongelijkheid de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz is gebruikt. ⊗

Opmerking 3.8 In toepassingen komt men vaak de situatie tegen dat men een *keten* van continu differentieerbare krommen $\gamma_i : [a_i, b_i]$, $1 \leq i \leq N$ achter elkaar doorloopt, waarbij het aan elkaar gekoppeld zijn van de krommen betekent dat voor iedere $1 \leq i \leq N-1$ geldt dat $\gamma_{i+1}(a_{i+1}) = \gamma_i(b_i)$. Dat wil zeggen, γ_{i+1} start in het eindpunt van γ_i . De keten heet *gesloten*, als bovendien geldt dat $\gamma_N(b_N) = \gamma_1(a_1)$.

Men definieert

$$\sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \omega$$

als de *lijnintegraal van ω over de keten van krommen γ_i , $1 \leq i \leq N$.*

We gaan nu de krommen γ_i herparametriseren als één continu differentieerbare kromme, gedefinieerd op één enkel interval in $\mathbb{R}$. Omdat de snelheidsvectoren $\gamma'_{i+1}(a_{i+1})$ en $\gamma'_i(b_i)$ niet aan elkaar gelijk hoeven te zijn, zullen we moeten ‘afremmen bij de hoekpunten’ om een continu differentieerbare kromme te krijgen.

De functie $\sigma(\tau) := 3\tau^2 - 2\tau^3$ heeft de eigenschap dat $\sigma'(\tau) = 6\tau(1 - \tau) > 0$ als $0 < \tau < 1$, terwijl $\sigma'(0) = \sigma'(1) = 0$. Verder is $\sigma(0) = 0$ en $\sigma(1) = 1$, dus definieert σ een bijectieve veeltermafbeelding van $[0, 1]$ naar $[0, 1]$. Een *affiene transformatie* van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ is een afbeelding van de vorm $\tau \mapsto p\tau + q$, waarin p en q constanten zijn. Voor ieder paar van begrensde en gesloten intervallen $[\alpha, \beta]$ en $[a, b]$ in $\mathbb{R}$ is er een oriëntatiebehoudende affine transformatie die $[\alpha, \beta]$ op $[a, b]$ afbeeldt. Door samenstelling van een oriëntatiebehoudende affine transformatie van $[\alpha, \beta]$ naar $[0, 1]$, gevolgd door de afbeelding σ van $[0, 1]$ naar $[0, 1]$ en daarna een oriëntatiebehoudende affine transformatie van $[0, 1]$ naar $[a, b]$, krijgen we een oriëntatiebehoudende bijectieve veeltermafbeelding ψ van $[\alpha, \beta]$ naar $[a, b]$, met $\psi'(\alpha) = \psi'(\beta) = 0$.

Zij nu $[\alpha, \beta]$ een gegeven gesloten interval in $\mathbb{R}$, met tussenpunten $\alpha = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = \beta$. Vanwege het voorgaande kunnen we oriëntatiebehoudende bijectieve veeltermafbeeldingen ψ_i van

$$I_i := [\tau_{i-1}, \tau_i]$$

naar $[a_i, b_i]$ vinden, met de eigenschap dat voor iedere $1 \leq i \leq N$ geldt dat $\psi'_i(\tau_{i-1}) = \psi'_i(\tau_i) = 0$. Definieer nu de kromme $\delta : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ door middel van $\delta(\tau) = \gamma_i(\psi_i(\tau))$ als $\tau \in I_i$. Voor iedere $1 \leq i \leq N - 1$ ligt τ_i zowel in I_i als in I_{i+1} , maar dan geeft

$$\gamma_i(\psi_i(\tau_i)) = \gamma_i(b_i) = \gamma_{i+1}(a_{i+1}) = \gamma_{i+1}(\psi_{i+1}(\tau_i))$$

dat $\delta(\tau_i)$ toch eenduidig is gedefinieerd.

Voor iedere $1 \leq i \leq N$ is de beperking van δ tot I_i gelijk aan $\gamma_i \circ \psi_i$, dus is de beperking van δ tot I_i continu differentieerbaar. Er zou echter nog het probleem kunnen optreden dat in een tussenpunt τ_i met $1 \leq i \leq N - 1$ de linkerafgeleide van δ niet gelijk is aan de rechterafgeleide. Echter, de linkerafgeleide van δ in het punt τ_i is vanwege de kettingregel gelijk aan

$$(\gamma_i \circ \psi_i)'(\tau_i) = \psi'_i(\tau_i) \gamma'_i(\psi_i(\tau_i)) = 0$$

omdat $\psi'_i(\tau_i) = 0$. Anderzijds is de rechterafgeleide van δ in het punt τ_i gelijk aan

$$(\gamma_{i+1} \circ \psi_{i+1})'(\tau_i) = \psi'_{i+1}(\tau_i) \gamma'_{i+1}(\psi_{i+1}(\tau_i)) = 0$$

omdat $\psi'_{i+1}(\tau_i) = 0$. Omdat de linker- en rechterafgeleide beiden gelijk aan 0 zijn, zijn ze aan elkaar gelijk en de conclusie is dat de kromme $\delta : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continu differentieerbaar is.

Verder geldt dat

$$\int_{\delta} \omega = \sum_{i=1}^N \int_{\delta|_{I_i}} \omega = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i \circ \psi_i} \omega = \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} \omega, \quad (3.19)$$

waarbij in de laatste identiteit Lemma 3.6 is gebruikt. Dit betekent dat de lijnintegraal van ω over de keten van krommen γ_i gelijk is aan de lijnintegraal van ω over de continu differentieerbare kromme δ .

Men kan dit gebruiken om van iedere stelling in dit hoofdstuk betreffende lijnintegralen over continu differentieerbare krommen, te bewijzen dat die ook geldig is voor lijnintegralen over ketens van continu differentieerbare krommen. Men zou het bewijs zonder al te veel moeite ook direct kunnen geven voor de integralen over ketens, maar dit zou de notaties veel zwaarder maken. $\oslash$

3.2 Exacte Differentiaalvormen

Zij $g_i(x)$, $1 \leq i \leq n$, een n -tal continue functies van n variabelen $x = (x_1, \dots, x_n)$. In deze en de volgende paragraaf onderzoeken we de vraag wanneer er een differentieerbare functie $f(x)$ is waarvoor $\partial f(x)/\partial x_i = g_i(x)$ voor iedere $1 \leq i \leq n$ en zo ja, hoe we de functie f uit de functies g_i kunnen bepalen.

Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$. Zij $p, q \in U$. Men zegt dat de C^1 kromme $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ in U van p naar q loopt, als

i) Voor iedere $t \in [a, b]$ geldt dat $\gamma(t) \in U$ en

ii) $\gamma(a) = p$ en $\gamma(b) = q$.

Lemma 3.9 *Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ en zij, voor iedere $1 \leq i \leq n$, $g_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ een continue functie. Zij $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ een differentieerbare functie met de eigenschap dat voor iedere $1 \leq i \leq n$ en iedere $x \in U$ geldt dat $\partial f(x)/\partial x_i = g_i(x)$. Zij tenslotte γ een C^1 kromme die in U van p naar q loopt. Dan is*

$$\int_{\gamma} \sum_{i=1}^n g_i(x) dx_i = f(q) - f(p). \quad (3.20)$$

Bewijs Dit volgt uit

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \sum_{i=1}^n g_i(x) dx_i &= \int_{\gamma} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i = \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \Big|_{x=\gamma(t)} \gamma'_i(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{df(\gamma(t))}{dt} dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(q) - f(p). \end{aligned}$$

Hierin volgt de eerste identiteit uit $g_i(x) = \partial f(x)/\partial x_i$ en de tweede uit (3.1). De derde identiteit volgt uit (1.29), de vierde uit de zogenaamde hoofdstelling van de analyse voor functies van één variabele en de laatste uit het gegeven dat γ van p naar q loopt. $\square$

Definitie 3.10 Een open deelverzameling U van $\mathbb{R}^n$ heet *samenhangend* als zij niet te schrijven is als vereniging van twee disjuncte open en niet-lege deelverzamelingen. $\oslash$

Stelling 3.11 *Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$. Dan is U samenhangend, dan en slechts dan als er voor iedere $p, q \in U$ een C^1 kromme in U van p naar q loopt.*

Dit betekent dat we de in Stelling 3.11 genoemde verbindingseigenschap ook als definitie van samenhangende open deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ mogen gebruiken. Voor onze doeleinden is deze definitie voorlopig handiger, ‘constructiever’, dan het niet kunnen splitsen in open deelverzamelingen. Voor een bewijs van Stelling 3.11, zie Vraagstuk 3.6.

Stelling 3.12 *Zij U een samenhangende open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ en zij, voor iedere $1 \leq i \leq n$, $g_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ een gegeven continue functie. Noteer $\omega := \sum_{i=1}^n g_i(x) dx_i$. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

- i) Er is een differentieerbare functie $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ met de eigenschap dat voor iedere $1 \leq i \leq n$ en iedere $x \in U$ geldt dat $\partial f(x)/\partial x_i = g_i(x)$.
- ii) Voor iedere $p, q \in U$ geldt dat als γ en δ allebei C^1 krommen zijn die in U van p naar q lopen, dan is $\int_\gamma \omega = \int_\delta \omega$.
- iii) Voor iedere gesloten C^1 kromme γ in U geldt dat $\int_\gamma \omega = 0$.

Tenslotte, kies een startpunt $p \in U$. Dan is er voor iedere functie f in i) een constante $c \in \mathbb{R}$ met de eigenschap dat f wordt gegeven door de formule

$$f(q) = c + \int_\gamma \omega, \quad q \in U, \quad (3.21)$$

waarin γ een willekeurige C^1 kromme in U is die van p naar q loopt. Er geldt dat $c = f(p)$.

Bewijs Uit i) volgt (3.20), dus (3.21) met $c = f(p)$. Hieruit volgt op zijn beurt ii).

Onderstel nu dat ii) geldt. Dit betekent dat de integraal over C^1 krommen γ in U van p naar q alleen maar afhangt van het beginpunt p en het eindpunt q , niet van de keuze van de tussenliggende kromme. Anders gezegd, er is een functie $F : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ is met de eigenschap dat voor iedere C^1 kromme γ die in U van p naar q loopt geldt dat

$$\int_\gamma \omega = F(p, q).$$

Is δ een C^1 kromme die in U van q naar r loopt, dan is volgens Opmerking 3.8 de keten die bestaat uit γ gevolgd door δ te parametriseren als een C^1 kromme in U die van p naar r loopt. Vanwege (3.19) krijgen we dat de integraal over de kromme van p naar r gelijk is aan de som van de integraal over de kromme van p naar q en de integraal over de kromme van q naar r , ofwel

$$F(p, r) = F(p, q) + F(q, r). \quad (3.22)$$

Neem nu $p, q \in U$ vast. Omdat U open is en $q \in U$, is er een $\epsilon > 0$ met de eigenschap dat als $r \in \mathbb{R}^n$ en $\|r - q\| < \epsilon$, dan is $r \in U$. Zij $1 \leq j \leq n$ en $h \in \mathbb{R}$ met $|h| < \epsilon$ en definieer $\delta(t) = q + t h e_j$, $t \in [0, 1]$. Hierin is e_j de j -de standaard basisvector in $\mathbb{R}^n$. Dan is δ een C^1 kromme die in U van q naar $q + h e_j$ loopt en we krijgen uit (3.22) met $r = q + h e_j$ dat

$$F(p, q + h e_j) - F(p, q) = F(q, q + h e_j) = \int_\delta \sum_{i=1}^n g_i(x) dx_i = \int_0^1 g_j(q + t h e_j) h dt,$$

hetgeen impliceert dat

$$\frac{F(p, q + h e_j) - F(p, q)}{h} = \int_0^1 g_j(q + t h e_j) dt.$$

Met het oog op Stelling 2.5 zien we dat het rechterlid voor $h \rightarrow 0$ convergeert naar

$$\int_0^1 g_j(q + t 0 e_j) dt = \int_0^1 g_j(q) dt = g_j(q).$$

Hieruit volgt dat de functie $x \mapsto F(p, x)$ partieel differentieerbaar is naar de j -de variabele en dat $\partial F(p, x)/\partial x_j = g_j(x)$. Hiermee is i) aangetoond als gevolg van ii).

Door $q = r$ te nemen in (3.22) zien we dat $F(q, q) = 0$, hetgeen iii) impliceert als gevolg van ii). Stel tenslotte dat iii) geldt en dat γ en δ allebei C^1 krommen zijn die in U van p naar q lopen. Kies een C^1 kromme ϵ die in U van q naar p loopt. Dan zijn de ketens ‘eerst γ en dan ϵ ’ en ‘eerst δ en dan ϵ ’ te parametriseren als gesloten C^1 krommen in U , waarover de lijnintegralen van $\omega := \sum g_i(x) dx_i$ gelijk aan nul zijn. Dit geeft dat

$$\int_{\gamma} \omega + \int_{\epsilon} \omega = 0 = \int_{\delta} \omega + \int_{\epsilon} \omega,$$

hetgeen impliceert dat $\int_{\gamma} \omega = \int_{\delta} \omega$. Dit bewijst ii) als gevolg van iii). $\square$

Definitie 3.13 Men zegt dat de differentiaalvorm $\omega := \sum_{i=1}^n g_i(x) dx_i$ *exact* is als aan één van de equivalente voorwaarden i), ii) of iii) in Stelling 3.12 is voldaan. $\odot$

Opmerking 3.14 Als $g(x)$ de lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}$ voorstelt met

$$\text{matrix van } g(x) = (g_1(x) \dots g_n(x)),$$

dan betekent i) dat $Df(x) = g(x)$, zie (1.21). Anders gezegd, de differentiaalvorm ω is exact, dan en slechts dan als g gelijk is aan de totale afgeleide van een reëelwaardige functie op U .

Als we $\vec{g} : x \mapsto (g_1(x) \dots g_n(x)) \in \mathbb{R}^n$ interpreteren als een vectorveld op U , dan betekent i) dat $\text{grad } f = \vec{g}$, zie (1.6). In deze terminologie is de differentiaalvorm ω exact, dan en slechts dan als $\vec{g}$ gelijk is aan de gradiënt van een reëelwaardige functie op U .

In de klassieke mechanica treden vectorvelden $\vec{g}$ op in de gedaante van krachtvelden. Men zegt dat het krachtveld $\vec{g}$ *conservatief* is, wanneer er een differentieerbare functie V is, waarvoor $\vec{g} = -\text{grad } V$. De functie V heet de *potentiële energie* van het krachtveld. Als we bij de potentiële energie de zogenaamde *kinetische energie* van de beweging optellen, dan krijgen we een grootheid die de *totale energie* van de beweging genoemd wordt en die constant is gedurende de beweging. De term ‘conservatief krachtveld’ herinnert aan deze wet van behoud van energie. Door $f = -V$ te schrijven, zien we dat het krachtveld $\vec{g}$ conservatief is, dan en slechts dan als de differentiaalvorm ω exact is. Het minteken in $\vec{g} = -\text{grad } V$ correspondeert met het feit dat de potentiële energie toeneemt als men zich bij de integratie van ω , ofwel bij de integratie van het krachtveld $\vec{g}$, tegen het krachtveld in beweegt. Bijvoorbeeld: de gravitationele potentiële energie, evenredig met de hoogte, neemt toe als men zich tegen de zwaartekracht in beweegt. $\odot$

3.3 Gesloten Differentiaalvormen

Als $n = 1$, dan is iedere continue differentiaalvorm $g(x) dx$ op een open interval in $\mathbb{R}$ exact. Immers, de *hoofdstelling van de analyse* zegt dat de functie $q \mapsto \int_p^q g(x) dx$ differentieerbaar is met afgeleide gelijk aan $g(q)$. Als daarentegen $n > 1$, dan laat het volgende lemma zien dat het vrij uitzonderlijk is dat een gegeven differentiaalvorm exact is.

Lemma 3.15 Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ en zij, voor iedere $1 \leq i \leq n$, de functie $g_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ continu differentieerbaar. Neem aan dat de differentiaalvorm $\omega := \sum_{i=1}^n g_i(x) dx_i$ exact is. Dan geldt voor iedere $1 \leq i \leq n$ en iedere $1 \leq j \leq n$ dat

$$\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i}, \quad x \in U. \quad (3.23)$$

Bewijs Het exact zijn van ω betekent dat er een differentieerbare functie $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ is, waarvoor $g_i(x) = \partial f(x)/\partial x_i$. Het gegeven, dat de functies g_i differentieerbaar zijn en continue afgeleide hebben, impliceert dat de functie f twee keer continu differentieerbaar is. Vanwege Stelling 2.4 volgt hieruit dat

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Dit impliceert (3.23), na substitutie van $\partial f(x)/\partial x_i = g_i(x)$ in het linkerlid en $\partial f(x)/\partial x_j = g_j(x)$ in het rechterlid. $\square$

Definitie 3.16 Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ en zij, voor iedere $1 \leq i \leq n$, $g_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ een continu differentieerbare functie. Men zegt dat de differentiaalvorm $\omega := \sum_{i=1}^n g_i(x) dx_i$ gesloten is als voor iedere $1 \leq i, j \leq n$ aan de vergelijking (3.23) is voldaan. $\oslash$

Het is duidelijk dat (3.23) automatisch geldt als $i = j$ en ook dat als (3.23) geldt, dan geldt (3.23) met i en j verwisseld. Dit betekent dat het voldoende is om (3.23) te eisen voor alle i en j met $i < j$. De voorwaarde dat de differentiaalvorm ω gesloten is correspondeert daarom met een stelsel van $n(n-1)/2$ vergelijkingen voor de eerste orde partiële afgeleiden van de functies g_i . Voor $n = 2$ is dit de ene enkele vergelijking $\partial g_1(x)/\partial x_2 = \partial g_2(x)/\partial x_1$. Voor $n = 3$, resp. $n = 4$ krijgen we al 3, resp. 6 vergelijkingen. Het aantal $n(n-1)/2$ van de vergelijkingen neemt vrij snel toe bij toenemende dimensie n .

Lemma 3.15 zegt dat voor een continu differentieerbare differentiaalvorm geldt dat als deze exact is, dan is zij gesloten. We gaan nu onderzoeken in hoeverre de omkering geldt. Daarbij zullen we gebruik maken van krommen $\gamma = \gamma_s$, die op een differentieerbare manier van een extra reële parameter s afhangen. Het volgende lemma geeft een verband tussen de afgeleide naar s van de integraal over de kromme γ_s van de differentiaalvorm ω en de uitdrukkingen $\partial g_i(x)/\partial x_j - \partial g_j(x)/\partial x_i$.

Lemma 3.17 Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ en zij, voor iedere $1 \leq i \leq n$, $g_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ een continu differentieerbare functie op U .

Zij I een interval in $\mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ en zij $\gamma : I \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ een afbeelding met de volgende eigenschappen.

- i) Voor iedere $s \in I$ en $t \in [a, b]$ geldt dat $\gamma(s, t) \in U$.
- ii) γ is continu differentieerbaar, de afbeelding $(s, t) \mapsto \partial \gamma(s, t)/\partial t$ is partieel differentieerbaar naar s en de afbeelding $(s, t) \mapsto \partial^2 \gamma(s, t)/\partial s \partial t$ is continu op $I \times [a, b]$.

Voor iedere $s \in I$ noteren we de C^1 kromme $t \mapsto \gamma(s, t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ met γ_s .

Dan is de integraal over γ_s van de differentiaalvorm $\omega := \sum_{i=1}^n g_i(x) dx_i$ een differentieerbare functie van s en er geldt dat

$$\frac{d}{ds} \int_{\gamma_s} \omega = \int_a^b \sum_{i,j=1}^n (D_j g_i - D_i g_j)(\gamma(s, t)) \frac{\partial \gamma_j(s, t)}{\partial s} \frac{\partial \gamma_i(s, t)}{\partial t} dt \quad (3.24)$$

$$+ \sum_{i=1}^n \left[g_i(\gamma(s, b)) \frac{\partial \gamma_i(s, b)}{\partial s} - g_i(\gamma(s, a)) \frac{\partial \gamma_i(s, a)}{\partial s} \right]. \quad (3.25)$$

Bewijs (3.1) met $\gamma(t)$, resp. $f_i(x)$ vervangen door $\gamma_s(t) = \gamma(s, t)$, resp. $g_i(x)$, geeft dat

$$\int_{\gamma_s} \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^n g_i(\gamma(s, t)) \frac{\partial \gamma_i(s, t)}{\partial t} dt.$$

De gegevens impliceren dat in het rechterlid de integrand een continue functie is van (s, t) , die differentieerbaar is naar s , met een partiële afgeleide naar s die een continue functie is van (s, t) . Op grond van Stelling 2.11 mogen we daarom concluderen dat de integraal hiervan over $t \in [a, b]$ een differentieerbare functie van s definieert, waarbij de afgeleide naar s van de integraal gelijk is aan de integraal over $t \in [a, b]$ van de partiële afgeleide van de integrand naar de variabele s . De partiële afgeleide naar s van de integrand is gelijk aan de som over i van

$$\frac{\partial g_i(\gamma(s, t))}{\partial s} \frac{\partial \gamma_i(s, t)}{\partial t} + g_i(\gamma(s, t)) \frac{\partial^2 \gamma_i(s, t)}{\partial s \partial t}.$$

De gegevens impliceren dat aan de voorwaarden van Stelling 2.4 is voldaan, met f vervangen door γ_i . Dit geeft dat $\partial \gamma_i(s, t)/\partial s$ partieel differentieerbaar is naar t en dat $\partial^2 \gamma_i(s, t)/\partial s \partial t = \partial^2 \gamma_i(s, t)/\partial t \partial s$. Een partiële integratie geeft vervolgens dat

$$\begin{aligned} \int_a^b g_i(\gamma(s, t)) \frac{\partial^2 \gamma_i(s, t)}{\partial t \partial s} dt &= - \int_a^b \frac{\partial g_i(\gamma(s, t))}{\partial t} \frac{\partial \gamma_i(s, t)}{\partial s} dt \\ &+ g_i(\gamma(s, b)) \frac{\partial \gamma_i(s, b)}{\partial s} - g_i(\gamma(s, a)) \frac{\partial \gamma_i(s, a)}{\partial s}. \end{aligned}$$

Het bewijs is volledig als we nog kunnen aantonen dat de uitdrukking

$$A := \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g_i(\gamma(s, t))}{\partial s} \frac{\partial \gamma_i(s, t)}{\partial t} - \frac{\partial g_i(\gamma(s, t))}{\partial t} \frac{\partial \gamma_i(s, t)}{\partial s} \right)$$

gelijk is aan de integrand in het rechterlid van (3.24). Daartoe merken we op dat, op grond van (1.29),

$$\frac{\partial g_i(\gamma(s, t))}{\partial s} = \sum_{j=1}^n D_j g_i(\gamma(s, t)) \frac{\partial \gamma_j(s, t)}{\partial s} \quad \text{en} \quad \frac{\partial g_i(\gamma(s, t))}{\partial t} = \sum_{j=1}^n D_j g_i(\gamma(s, t)) \frac{\partial \gamma_j(s, t)}{\partial t}.$$

Verder leidt een verwisseling van de sommatievolgorde tot

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_j g_i(\gamma(s, t)) \frac{\partial \gamma_j(s, t)}{\partial t} \frac{\partial \gamma_i(s, t)}{\partial s} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_i g_j(\gamma(s, t)) \frac{\partial \gamma_j(s, t)}{\partial s} \frac{\partial \gamma_i(s, t)}{\partial t}.$$

Dit completeert de identificatie van A met de integrand van (3.24). $\square$

Definitie 3.18 Een afbeelding γ als in Lemma 3.17 heet een C^1 familie $s \mapsto \gamma_s$ van C^1 krommen γ_s in U . Men spreekt over een C^1 homotopie in U van gesloten C^1 krommen als bovendien voor iedere $s \in I$ de kromme $\gamma_s : [a, b] \rightarrow U$ gesloten is, dat wil zeggen voldoet aan $\gamma_s(a) = \gamma_s(b)$. Twee gesloten C^1 krommen α en β in U heten *homotoop in U* als $\alpha = \gamma_{s_0}$ en $\beta = \gamma_{s_1}$, waarin $\gamma_s, s \in I$ een C^1 homotopie in U van gesloten C^1 krommen is en $s_0, s_1 \in I$.

Men kan opmerken dat in dit geval

$$\widetilde{\gamma}_r := \gamma_{s_0 + r(s_1 - s_0)}, \quad r \in [0, 1]$$

een C^1 homotopie van gesloten C^1 krommen in U definieert met $\alpha = \tilde{\gamma}_0$ en $\beta = \tilde{\gamma}_1$. Het is daarom geen inperking van de algemeenheid, als we ons in het vervolg beperken tot het geval dat $s_0 = 0$ en $s_1 = 1$. $\oslash$

Gevolg 3.19 Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ en zij $\omega := \sum_{i=1}^n g_i(x) dx_i$ een gesloten continu differentieerbare differentiaalvorm op U . Onderstel dat α en β gesloten C^1 krommen zijn, die homotoop in U zijn. Dan geldt dat $\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega$.

Bewijs Volgens de aanname is er een C^1 homotopie van gesloten C^1 krommen γ_s , $s \in [0, 1]$ in U met $\alpha = \gamma_0$ en $\beta = \gamma_1$. Met de notatie $\gamma(s, t) = \gamma_s(t)$ betekent het gesloten zijn van de krommen $\gamma_s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, dat voor iedere $s \in [0, 1]$ geldt dat $\gamma(s, b) = \gamma(s, a)$. Differentiatie hiervan naar s levert dat voor iedere $s \in [0, 1]$ ook geldt dat $\partial\gamma(s, b)/\partial s = \partial\gamma(s, a)/\partial s$, hetgeen in combinatie met $\gamma(s, b) = \gamma(s, a)$ leidt tot de conclusie dat de randterm in (3.25) gelijk is aan nul.

Het gesloten zijn van ω , (3.23) voor iedere i en j , impliceert dat de integrand in het rechterlid van (3.24) ook gelijk is aan nul, dus we concluderen dat

$$\frac{d}{ds} \int_{\gamma_s} \omega = 0, \quad s \in [0, 1].$$

Hieruit volgt dat $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_0} \omega$. $\square$

Definitie 3.20 Een kromme $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heet *constant* als er een $p \in U$ is met $\gamma(t) = p$ voor iedere $t \in [a, b]$. Deze eigenschap is equivalent met: γ is differentieerbaar en $\gamma'(t) = 0$ voor iedere $t \in [a, b]$. Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$. Men zegt dat een gesloten C^1 kromme γ in U *samentrekbaar is in U* als γ in U homotoop is met een constante kromme. Een open deelverzameling U van $\mathbb{R}^n$ heet *enkelvoudig samenhangend* als zij samenhangend is en iedere gesloten C^1 kromme in U samentrekbaar is in U . $\oslash$

Voorbeeld 3.21 Als $p, q \in \mathbb{R}^n$ dan is het *lijnstuk* $l(p, q)$ tussen p en q gedefinieerd als de verzameling van alle $p + s(q - p)$ met $s \in [0, 1]$. Een verzameling $U \subset \mathbb{R}^n$ heet *stervormig* als er een $p \in U$ te vinden is met de eigenschap dat voor iedere $x \in U$ geldt dat $l(p, x) \subset U$. Zo'n punt p heet een *centrum* van de stervormige verzameling U .

Iedere stervormige open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ is enkelvoudig samenhangend.

Bewijs Zij $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ een gesloten C^1 kromme in U . Dan geldt voor iedere $s \in [0, 1]$ en $t \in [a, b]$ dat $\gamma(t) \in U$, dus $\gamma_s(t) := p + s(\gamma(t) - p) \in U$. Verder vormen de γ_s , $s \in [0, 1]$ een C^1 familie van gesloten C^1 krommen in U , $\gamma_1(t) \equiv \gamma(t)$ en $\gamma_0(t) \equiv p$. Dit betekent dat γ samentrekbaar is in U . $\square$

Zij $a \in \mathbb{R}^n$ en $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Een voorbeeld van een stervormige open verzameling, die dus enkelvoudig samenhangend is, is de *open bol*

$$B(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\} \quad (3.26)$$

in $\mathbb{R}^n$ met middelpunt gelijk aan a en straal gelijk aan r . Iedere $p \in B(a; r)$ kan als centrum van deze stervormige verzameling genomen worden. $\oslash$

Gevolg 3.22 Zij U een enkelvoudig samenhangende open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$. Zij ω een C^1 differentiaalvorm op U . Dan is ω exact dan en slechts dan als ω gesloten is.

Bewijs Lemma 3.15 zegt dat als ω exact is, dan is ω gesloten.

Neem nu aan dat ω gesloten is. Zij γ een gesloten C^1 kromme in U . Omdat U enkelvoudig samenhangend is, is γ homotoop met een constante kromme δ . Omdat ω gesloten is, volgt uit Lemma 3.19 dat $\int_{\gamma} \omega = \int_{\delta} \omega = 0$. Hierin volgt de tweede identiteit uit (3.1) met γ vervangen door δ , gecombineerd met het feit dat $\delta'(t) \equiv 0$. We concluderen dat ω voldoet aan de voorwaarde iii) in Stelling 3.12, dus ω is exact. $\square$

Voorbeeld 3.23 Zij $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. De willekeurig vaak differentieerbare differentiaalvorm ω op U die in (3.4) is gedefinieerd is gesloten, omdat

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{-y}{x^2 + y^2} = (x^2 + y^2)^{-2} [x^2 + y^2 - x \cdot 2x + x^2 + y^2 - y \cdot 2y] = 0.$$

Anderzijds is de integraal van ω over de cirkel $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ gelijk aan 2π , dus niet gelijk aan nul. Dus ω is niet exact op U .

Vanwege Gevolg 3.22 concluderen we hiermee dat het complement U in $\mathbb{R}^2$ van de oorsprong *niet enkelvoudig samenhangend* is. Sterker nog, voor iedere gesloten kromme γ in U met windingsgetal om de oorsprong ongelijk aan nul leidt Gevolg 3.19 tot de conclusie dat γ niet samentrekbaar is in U . Omgekeerd hebben we :

Lemma 3.24 Zij $p \in \mathbb{R}^2$, γ een gesloten C^1 kromme in $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ met $W_p(\gamma) = k$. Dan is γ homotoop met de eenheidscirkel $\delta(t) := p + (\cos(k t), \sin(k t))$, $t \in [0, 2\pi]$ om het punt p die k keer doorlopen wordt. In het bijzonder is γ samentrekbaar in $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$, dan en slechts dan als $W_p(\gamma) = 0$.

Bewijs Door over te gaan op $\gamma(t) - p$, resp. $\delta(t) - p$ mogen we aannemen dat $p = 0$. Ook kunnen we door middel van een herparametrisering van de krommen arrangeren dat $a = 0$ en $b = 2\pi$. Op grond van Lemma 3.4 geldt (3.5), waarin $r(t)$ en $\theta(t)$ continu differentieerbaar van t afhangen. Omdat $\gamma(2\pi) = \gamma(0)$, geldt dat $r(2\pi) = r(0)$, terwijl het gegeven dat het windingsgetal van γ gelijk is aan k betekent dat $\theta(2\pi) = \theta(0) + 2\pi k$. Definieer nu

$$\gamma_s(t) := r_s(t) (\cos \theta_s(t), \sin \theta_s(t)),$$

waarin $r_s(t) := r(t) + s(1 - r(t))$ en $\theta_s(t) := \theta(t) + s(k t - \theta(t))$. Dan is $r_s(2\pi) = r_s(0)$ en

$$\theta_s(2\pi) - \theta_s(0) = (1 - s)(\theta(2\pi) - \theta(0)) + s 2\pi k = (1 - s) 2\pi k + s 2\pi k = 2\pi k,$$

dus $\gamma_s(2\pi) = \gamma_s(0)$. Verder geldt voor iedere $s \in [0, 1]$ dat $r_s(t)$ tussen $r(t) > 0$ en 1 ligt, dus $r_s(t) > 0$. Daarmee vormen de γ_s , $s \in [0, 1]$ een C^1 homotopie van gesloten krommen in het complement van de oorsprong. Verder is $\gamma_0(t) \equiv \gamma(t)$ en $\gamma_1(t) \equiv \delta(t)$. $\square$

Zij nu V een enkelvoudig samenhangende open deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ met $(0, 0) \notin V$. (Vanwege het voorgaande is dit equivalent met de voorwaarde dat er geen gesloten kromme in V is met windingsgetal om de oorsprong ongelijk aan nul.) Kies $p \in V$, daarbij is er een $r > 0$ en een $\theta \in \mathbb{R}$, waarvoor $p = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Vanwege Gevolg 3.22 en Stelling 3.12 is er een eenduidig bepaalde differentieerbare functie $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, waarvoor $f(p) = \theta$ en

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in V.$$

Merk op dat deze formules impliceren dat f willekeurig vaak differentieerbaar is.

Combinatie van (3.20) en (3.6) geeft dat als

$$\gamma(t) = r(t) (\cos \theta(t), \sin \theta(t)), \quad t \in [a, b]$$

een C^1 kromme in V is met $\gamma(a) = p$ en $\theta(a) = \theta$, dan is $f(\gamma(b)) = \theta(b)$. Dit laat zien dat f een welgedefinieerde *hoekfunctie* is op V . Anders gezegd, hoewel er geen goede continue hoekfunctie is op U , omdat bij eenmaal rondlopen de hoek met 2π toeneemt, is er wel een goedgedefinieerde willekeurig vaak differentieerbare hoekfunctie op iedere enkelvoudig samenhangende open deelverzameling V van U . Zo'n hoekfunctie wordt gewoonlijk genoteerd als $f(x, y) = \arg(x, y)$, het *argument* van $(x, y) \in V$.

Een voorbeeld van een enkelvoudig samenhangende open deelverzameling V van $\mathbb{R}^2$ die de oorsprong niet bevat is het complement

$$V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$$

van de negatieve x -as in het vlak. Deze verzameling is stervormig met centrum $(1, 0)$ en daarom enkelvoudig samenhangend. De argumentfunctie op V met $\arg(1, 0) = 0$ neemt zijn waarden aan tussen $-\pi$ en π , dit is de *standaardkeuze voor de hoekfunctie*. Met de definitie $\arg(x, 0) = \pi$ als $x < 0$ kan deze functie uitgebreid worden tot het gehele complement van de oorsprong. Echter, omdat $\arg(x, y) \rightarrow -\pi$ als $x < 0$ en $y \uparrow 0$, verspringt deze hoekfunctie in ieder punt van de negatieve x -as discontinu.

Tenslotte kan opgemerkt worden dat

$$\arg(x, y) = \arctan(y/x) = \arcsin(y/\sqrt{x^2 + y^2}) \text{ als } x > 0,$$

$$\arg(x, y) = \arccos(x/\sqrt{x^2 + y^2}) \text{ als } y > 0,$$

$$\arg(x, y) = -\arccos(x/\sqrt{x^2 + y^2}) \text{ als } y < 0.$$

Ook hier zien we de discontinuïteit optreden als we in de tweede en de derde formule $x < 0$ vast nemen en daarna de limiet nemen voor $y \downarrow 0$, resp. $y \uparrow 0$. $\oslash$

3.4 De Stelling van Stokes

Zij γ als in Lemma 3.17 met $I = [s_0, s_1]$. Om de notatie uniform te maken, schrijven we $a = t_0$ en $b = t_1$. Integratie van de variatieformule over $s \in [s_0, s_1]$ leidt tot de formule

$$\int_{\gamma(s_1, \cdot)} \omega - \int_{\gamma(s_0, \cdot)} \omega - \int_{\gamma(\cdot, t_1)} \omega + \int_{\gamma(\cdot, t_0)} \omega \quad (3.27)$$

$$= \int_{s_0}^{s_1} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i,j=1}^n (D_j g_i - D_i g_j) (\gamma(s, t)) \frac{\partial \gamma_j(s, t)}{\partial s} \frac{\partial \gamma_i(s, t)}{\partial t} dt ds. \quad (3.28)$$

Hierin is $\gamma(s, \cdot)$, resp. $\gamma(\cdot, t)$ een notatie voor de kromme $t \mapsto \gamma(s, t)$, resp. $s \mapsto \gamma(s, t)$.

Zij δ de keten van de krommen in het vlak $\mathbb{R}^2$, bestaande uit:

- i) (s, t_0) waarbij s van s_0 naar s_1 loopt, gevolgd door
- ii) (s_1, t) waarbij t van t_0 naar t_1 loopt, gevolgd door

iii) (s, t_1) , waarbij s van s_1 naar s_0 loopt, gevolgd door

iv) (s_0, t) , waarbij t van t_1 naar t_0 loopt.

Dit is een gesloten keten, die linksom de rand van de rechthoek

$$R := [s_0, s_1] \times [t_0, t_1]$$

in het vlak doorloopt. Maak een schets! Met deze notatie herkennen we in (3.27) de integraal van ω over de kromme $\gamma \circ \delta$. Het rechterlid in (3.28) kan gezien worden als een tweedimensionale integraal over R .

In de som in de integrand van (3.28) zijn de termen met $i = j$ gelijk aan nul, terwijl de factor $D_j g_i - D_i g_j$ in zijn tegengestelde overgaat als we i en j verwisselen. Dit betekent dat we de integrand van (3.28) kunnen schrijven als

$$\sum_{i < j} (D_j g_i - D_i g_j) (\gamma(s, t)) \left(\frac{\partial \gamma_j(s, t)}{\partial s} \frac{\partial \gamma_i(s, t)}{\partial t} - \frac{\partial \gamma_i(s, t)}{\partial s} \frac{\partial \gamma_j(s, t)}{\partial t} \right).$$

Merk op dat hierin iedere term onveranderd blijft als we i en j zouden verwisselen, omdat in dat geval beide factoren in hun tegengestelde overgaan.

Als $n = 3$, dan is de *rotatie* $\text{rot } g$ van het vectorveld $g : x \mapsto (g_1(x), g_2(x), g_3(x))$ het vectorveld dat gedefinieerd wordt door de formules

$$(\text{rot } g)_1 = D_2 g_3 - D_3 g_2, \quad (\text{rot } g)_2 = D_3 g_1 - D_1 g_3, \quad (\text{rot } g)_3 = D_1 g_2 - D_2 g_1. \quad (3.29)$$

(In de engelstalige literatuur schrijft men ook wel $\text{curl } g$ in plaats van $\text{rot } g$.) Merk op dat hierbij steeds de volgende formule ontstaat door iedere index met 1 op te hogen, waarbij 4 overgaat in 1. Dit noemt men een *cyclische verwisseling* van de rangnummers 1, 2, 3. Het is evident dat $\text{rot } v = 0$ dan en slechts dan als de differentiaalvorm $\sum_j v_j(x) dx_j$ gesloten is.

Zijn $a, b \in \mathbb{R}^3$, dan definieert men het *uitwendige product* of het *vectorproduct* $a \times b \in \mathbb{R}^3$ door middel van de formules

$$(a \times b)_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2, \quad (a \times b)_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3, \quad (a \times b)_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1. \quad (3.30)$$

Ook hier ontstaat iedere volgende formule door een cyclische permutatie van de indices.

Met deze notaties krijgt de identiteit tussen (3.27) en (3.28) de gedaante

$$\int_{\gamma \circ \delta} \sum_{i=1}^n g_i(x) dx_i = \int_{s_0}^{s_1} \int_{t_0}^{t_1} \langle \text{rot } g(\gamma(s, t)), \frac{\partial \gamma(s, t)}{\partial s} \times \frac{\partial \gamma(s, t)}{\partial t} \rangle dt ds. \quad (3.31)$$

Hierbij is δ de kromme die linksom de rand van de rechthoek $R = [s_0, s_1] \times [t_0, t_1]$ in het vlak doorloopt. In het rechterlid is het inproduct genomen van de rotatie van het vectorveld g met het vectorproduct van de vectoren $\partial \gamma(s, t)/\partial s$ en $\partial \gamma(s, t)/\partial t$. De formule (3.31) is een versie van de bekende *stelling van Stokes* uit Vector Calculus.

De herhaalde integraal in het rechterlid van (3.31) wordt ook wel geïnterpreteerd als de *integraal van de rotatie van g over het oppervlak $S = \gamma(R)$ in $\mathbb{R}^3$* . Het linkerlid wordt daarbij gezien als de integraal van het vectorveld g over de rand van S . Omdat wij integralen van vectorvelden over oppervlakken in $\mathbb{R}^3$ hier niet gedefinieerd hebben, gaan we hier niet verder op in, maar volstaan met de opmerking dat het rechterlid van (3.31) een efficiënte formule is om de integraal van $\text{rot } g$ over S mee uit te rekenen.

3.5 Vraagstukken bij Hoofdstuk 3

Vraagstuk 3.1 Zij $I = [a, b]$ met $a < b$. We beschouwen de kromme $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeven door $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

- Maak een schets van het beeld $\gamma(I)$ van γ .
- Bepaal de lengte van γ .
- Zij $c \in \mathbb{R}$ en $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$. Bepaal de ongeoriënteerde integraal van de functie $f(x) = c + \langle v, x \rangle$ langs γ .

⊗

Vraagstuk 3.2 Beschouw de functie $f(x) = [e^x + e^{-x}]/2$. Schets de grafiek van f . Bepaal, voor elke $a \in \mathbb{R}$, de lengte van het deel van de grafiek van f dat gelegen is tussen de lijnen $x = 0$ en $x = a$ in $\mathbb{R}^2$,

⊗

Vraagstuk 3.3 Zij $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ een orthogonale lineaire afbeelding en zij $p \in \mathbb{R}^n$. Zij $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ een C^1 kromme. We beschouwen de kromme δ , die is gedefinieerd door $\delta(t) = L(\gamma(t)) + p$, $t \in [a, b]$. Toon aan dat δ een C^1 kromme is en dat $l(\delta) = l(\gamma)$.

⊗

Vraagstuk 3.4 In het vervolg is $I = [0, 1]$.

- Toon aan dat voor iedere continue functie $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ met $g \geq 0$ op I geldt: als voor iedere $t \in I$ geldt dat $g(t) \geq 0$ en

$$\int_0^1 g(t) dt = 0,$$

dan geldt voor iedere $t \in I$ dat $g(t) = 0$.

Hint: stel dat $t_0 \in I$ en $g(t_0) \neq 0$, dus $g(t_0) > 0$. Toon eerst aan dat er een $\delta > 0$ bestaat zo dat $g(t) > g(t_0)/2$ voor alle $t \in I$ met $|t - t_0| < \delta$. Laat zien dat dit impliceert dat de integraal van g over I groter of gelijk aan $\delta g(t_0)/2$ is. Leid dit tot een tegenspraak.

- Toon aan dat voor iedere C^1 -functie $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ geldt:

$$\int_0^1 |h'(t)| dt \geq h(1) - h(0).$$

Bewijs dat de bovenstaande formule geldt met $=$ i.p.v. $\geq$ dan en slechts dan als $h' \geq 0$ op I .

In het vervolg beschouwen we een C^1 -kromme $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

- Zij $d > 0$. Toon aan: als $\gamma(0) = 0$ en $\gamma(1) = (d, 0, \dots, 0)$, dan is de lengte $l(\gamma)$ van γ minstens d . Toon verder aan: als $l(\gamma) = d$ dan is er een monotoon stijgende C^1 -functie $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ zo dat $\gamma(t) = (k(t), 0, \dots, 0)$ voor alle $t \in I$.

Hint: vergelijk $\|\gamma'(t)\|$ met $|\gamma'_1(t)|$ en gebruik de voorgaande onderdelen.

- Toon aan dat voor elke C^1 -kromme $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ geldt dat

$$l(\gamma) \geq \|\gamma(1) - \gamma(0)\|.$$

Hint: gebruik Vraagstuk 3.3.

- e) Schrijf $p = \gamma(0)$, $q = \gamma(1)$. Toon aan dat dat gelijkheid geldt in d) geldt, dan en slechts dan als er een monotoon stijgende C^1 -functie $\varphi : I \rightarrow I$ bestaat, zó dat $\gamma(t) = p + \varphi(t)(q - p)$ voor alle $t \in I$. (Als $p = q$ dan kan de functie φ willekeurig gekozen worden, als $p \neq q$ dan is de functie φ eenduidig bepaald.) Toon aan dat in dat geval $\gamma(I)$ het lijnstuk is dat p en q verbindt.

⊗

Vraagstuk 3.5 Zij U een samenhangende open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$. Voor iedere $p, q \in U$ definiëren we de ‘ U -afstand $d_U(p, q)$ tussen p en q ’ als het infimum van de $l(\gamma)$, waarin γ een C^1 kromme is die in U van p naar q loopt.

Zij $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ continu differentieerbaar, $M \geq 0$ en neem aan dat voor iedere $x \in U$ geldt dat $\|\text{grad } f(x)\| \leq M$. Gebruik (3.18) om aan te tonen dat voor iedere $p, q \in U$ geldt dat $|f(p) - f(q)| \leq M d_U(p, q)$.

⊗

Vraagstuk 3.6 We gaan een bewijs geven van Stelling 3.11. Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$.

- a) Zij $p \in U$ en zij A_p de verzameling van alle $q \in U$ waarvoor er een keten van rechte lijnstukken is die in U van p naar q loopt. We gebruiken de notatie van (3.26). Bewijs:

a1) Voor iedere $x \in U$ is er een $\delta > 0$ waarvoor $B(x; \delta) \subset U$.

a2) Zij $B(x; \delta) \subset U$. Als $x \in A_p$ dan is $B(x; \delta) \subset A_p$. Als $x \notin A_p$ dan is $B(x; \delta) \subset U \setminus A_p$.

a3) A_p en $U \setminus A_p$ zijn open deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$.

- b) Zij nu A en B open deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$, $A \cup B = U$ en $A \cap B = \emptyset$. Zij $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ continu, $\gamma(a) \in A$ en $\gamma(b) \in B$. We gaan bewijzen dat dit tot een tegenspraak leidt. Definieer $T := \{t \in [a, b] \mid \gamma(t) \in A\}$. Bewijs:

b1) T is niet leeg en naar boven begrensd. Er bestaat een kleinste bovengrens $s = \sup T$ van T in $\mathbb{R}$. Er geldt dat $s \in [a, b]$.

b2) Als $s \in T$, dan is $s < b$ en er is een $\delta > 0$ met de eigenschap dat $[s, s + \delta[\subset T$. (Gebruik dat A open is en γ continu.) Dit is in tegenspraak met de definitie van s .

b3) Als $s \notin T$, dan is $s > a$ en er is een $\delta > 0$ met de eigenschap dat $]s - \delta, s] \subset [a, b] \setminus T$. (Gebruik dat B open is en γ continu.) Dit is in tegenspraak met de definitie van s .

- c) Bewijs dat de volgende uitspraken c1) – c3) equivalent zijn.

c1) U is samenhangend volgens Definitie 3.10.

c2) Bij iedere $p, q \in U$ is er een keten van rechte lijnstukken die in U van p naar q loopt.

c3) Bij iedere $p, q \in U$ is er een continue kromme die in U van p naar q loopt.

Hint: bewijs $c1) \Rightarrow c2) \Rightarrow c3) \Rightarrow c1)$. Ga na dat hieruit Stelling 3.11 volgt.

⊗

Vraagstuk 3.7 Bepaal een C^1 -kromme $\gamma : I = [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ met beginpunt $(1, 1)$ en eindpunt $(0, 0)$, waarvoor $\gamma(I)$ bevat is in de parabool

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}.$$

Bereken de lijnintegraal van het vectorveld $v(x, y) = (x, y)$ over γ , op twee manieren:

- a) Door directe berekening van de integraal.
 b) Door een functie f te vinden met $\text{grad } f = v$.

⊗

Vraagstuk 3.8 Beschouw de kromme $\gamma : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ gedefinieerd door

$$\gamma(t) = (2^{-1/2} \cos t, 2^{-1/2} \cos t, \sin t).$$

Toon aan dat γ een C^1 -kromme is en dat deze verloopt op het boloppervlak met middelpunt in de oorsprong en straal gelijk aan 1. Schets het beeld van γ . Bepaal de integraal van de differentiaalvorm $\omega = -x_2 dx_1 + x_1 dx_2 + x_3 dx_3$ over γ .

⊗

Vraagstuk 3.9 Zij $p \in \mathbb{R}^2$ en zij γ en $\tilde{\gamma}$ beiden C^1 krommen: $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$. Bewijs dat γ en $\tilde{\gamma}$ C^1 homotoop in $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ zijn, dan en slechts dan als zij hetzelfde windingsgetal om het punt p hebben.

⊗

Vraagstuk 3.10 Zij $\mu :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continu. Bewijs dat de differentiaalvorm

$$\omega := \sum_{i=1}^n \mu(\|x\|) x_i dx_i$$

exact is op $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Hint: probeer een functie van de vorm $f(x) = \varphi(\|x\|)$ met $\varphi :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar.

Bewijs, zonder te rekenen, dat ω gesloten is als μ continu differentieerbaar is.

⊗

Vraagstuk 3.11 Zij $0 < r < R$ en definieer de krommen $\gamma_s : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ door $\gamma_s(t) = s(\cos t, \sin t)$. Zij $U = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid r < \|x\| < R\}$.

- a) Schets U en de beelden van γ_{s_0} en γ_{s_1} voor een keuze van $0 < r < s_0 < s_1 < R$.
 b) Toon aan dat voor ieder C^1 vectorveld $v : U \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$D_2 v_1 = D_1 v_2 \implies \int_{\gamma_{s_0}} \langle v(x), dx \rangle = \int_{\gamma_{s_1}} \langle v(x), dx \rangle.$$

⊗

Vraagstuk 3.12 Gegeven is een C^1 -vectorveld v op $\mathbb{R}^2$. Voor $s \in \mathbb{R}$ definiëren we de kromme $\gamma_s : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ door $\gamma_s(t) = s(\cos t, \sin t)$. Voor $s \in \mathbb{R}$ definiëren we $I(s) \in \mathbb{R}$ door:

$$I(s) = \int_{\gamma_s} \langle v(x), dx \rangle.$$

- a) Toon aan dat $I(s) = s I_1(s) + s I_2(s)$, met

$$\begin{aligned} I_1(s) &= - \int_0^{2\pi} v_1(s \cos t, s \sin t) \sin t dt, \\ I_2(s) &= \int_0^{2\pi} v_2(s \cos t, s \sin t) \cos t dt. \end{aligned}$$

- b) Toon aan dat $I_1(0) = 0$ en $I_2(0) = 0$.
- c) Toon aan dat I_1 een C^1 -functie is, en dat $I_1'(0) = -\pi D_2 v_1(0, 0)$.
- d) Toon aan dat I_2 een C^1 -functie is, en bepaal $I_2'(0)$.
- e) Toon aan dat

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{I(s)}{s^2} = \pi [D_1 v_2(0, 0) - D_2 v_1(0, 0)].$$

⊗

Vraagstuk 3.13 Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{R}^3$, $g : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ een C^1 vectorveld op U . Zij I een interval in $\mathbb{R}$ en $\gamma_s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $s \in I$ een C^1 homotopie van gesloten C^1 krommen in U . Bewijs dat

$$\frac{d}{ds} \int_{\gamma_s} \langle g(x), dx \rangle = \int_a^b \langle (\text{rot } g)(\gamma_s(t)), \frac{\partial \gamma_s(t)}{\partial s} \times \frac{\partial \gamma_s(t)}{\partial t} \rangle dt \quad s \in I.$$

Bewijs dat als $\text{rot } g = 0$, dan is

$$\int_{\gamma_{s_0}} \langle g(x), dx \rangle = \int_{\gamma_{s_1}} \langle g(x), dx \rangle, \quad s_0, s_1 \in I.$$

Bewijs dat als U enkelvoudig samenhangend is en $\text{rot } g = 0$, dan is er een C^2 functie $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ waarvoor $\text{grad } f = g$. ⊗

Vraagstuk 3.14 Beschouw het vectorveld $g : (x, y, z) \mapsto (y^2, z^2, x^2)$ en de afbeelding $\gamma : [0, 1] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ die is gedefinieerd door

$$\gamma(s, t) = (s \cos t, s \sin t, s^2).$$

- a) Bewijs dat $\gamma([0, 1] \times [0, \pi])$ gelijk is aan het stuk van de parabolide $z = x^2 + y^2$, $y \geq 0$, $z \leq 1$.
- b) Verifieer de stelling van Stokes in dit geval, door het linker-en rechterlid van (3.31) uit te rekenen.

⊗

Vraagstuk 3.15

- a) Dezelfde opdracht als in Vraagstuk 3.14, b), maar nu voor $\gamma : [0, 2] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, resp. g gedefinieerd door

$$\Phi(s, t) = ((2 - s) \cos t, (2 - s) \sin t, z),$$

$$\text{resp. } g(x, y, z) = (-y, x, z).$$

- b) Schets het beeld $\gamma([0, 2] \times [0, 2\pi])$ van γ in $\mathbb{R}^3$.
- c) Idem als a), maar nu met $g(x, y, z) = (-y^3, x^3, 0)$.

- d) Idem als a), b) maar nu met $\gamma(s, t) = 2(\cos s \cos t, \sin s \cos t, \sin t)$, $(s, t) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi/2]$. Merk op dat de afbeelding $s \mapsto \gamma(s, \pi/2)$ constant is.

⊗

Vraagstuk 3.16 Zij $J = [c, d]$ en $\delta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$ een gesloten C^1 kromme in $\mathbb{R}^3$. Dan is $\delta(J)$ een begrensde en gesloten deelverzameling van $\mathbb{R}^3$, dus $\mathbb{R}^3 \setminus \delta(J)$ is een niet-lege open deelverzameling van $\mathbb{R}^3$. Definieer, voor iedere $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \delta(J)$,

$$v_t(x) := \|x - \delta(t)\|^{-3} \delta'(t) \times (x - \delta(t)), \quad t \in J.$$

Definieer het vectorveld v door integratie van v_t over $t \in [c, d]$:

$$v(x) := \int_c^d v_t(x) dt.$$

Als $I = [a, b]$ en $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ is een gesloten C^1 kromme in $\mathbb{R}^3$ waarvoor $\gamma(I) \cap \delta(J) = \emptyset$, dan definiëren we

$$I(\gamma, \delta) := \int_\gamma \langle v(x), dx \rangle.$$

- a) Bewijs dat

$$(\operatorname{rot} v_t)(x) = \frac{d}{dt} [\|x - \delta(t)\|^{-3} (x - \delta(t))].$$

Hint: bewijs dat voor constante vectoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ geldt dat

$$\operatorname{rot} (\|x - a\|^{-3} b) = -3\|x - a\|^{-5} (x - a) \times b, \quad \text{en} \quad \operatorname{rot} ((x - a) \times c) = -2c.$$

U mag verder gebruiken dat $p \times (q \times r) = \langle p, r \rangle q - \langle p, q \rangle r$.

- b) Bewijs dat het vectorveld $v : \mathbb{R}^3 \setminus \delta(J) \rightarrow \mathbb{R}^3$ willekeurig vaak differentieerbaar is. Bewijs dat $\operatorname{rot} v = 0$.
- c) Zij γ_1 en γ_2 twee gesloten C^1 krommen in $\mathbb{R}^3 \setminus \delta(J)$ die C^1 homotoop zijn in $\mathbb{R}^3 \setminus \delta(J)$. Bewijs dat $I(\gamma_1, \delta) = I(\gamma_2, \delta)$.
- d) Bewijs dat

$$I(\gamma, \delta) = \int_a^b \int_c^d \|\gamma(s) - \delta(t)\|^{-3} \langle \gamma(s) - \delta(t), \gamma'(s) \times \delta'(t) \rangle dt ds = I(\delta, \gamma).$$

Bewijs dat als δ_1 en δ_2 twee gesloten C^1 krommen in $\mathbb{R}^3 \setminus \gamma(I)$ zijn die C^1 homotoop zijn in $\mathbb{R}^3 \setminus \gamma(I)$, dan is $I(\gamma, \delta_1) = I(\gamma, \delta_2)$.

- e) Zij nu $\delta(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Zelfs in dit eenvoudige geval is er geen expliciete formule voor de integralen die het vectorveld v definiëren. Voor $r > 1$, zij γ_r de gesloten keten bestaande uit $\alpha_r(s) = (0, 0, s)$, $s \in [-r, r]$, gevolgd door $\beta_r(\theta) = (r \cos \theta, 0, -r \sin \theta)$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Maak een schets van γ_r en δ . Bewijs dat γ_r het beeld van δ niet treft en dat $I(\gamma_r, \delta)$ onafhankelijk is van $r > 1$. Bewijs dat de integraal met γ_r vervangen door β_r naar nul gaat als $r \rightarrow \infty$. (Hint: bewijs dat de absolute waarde van de integrand kleiner of gelijk is aan $(r - 1)^{-3} r^2$.) Bewijs dat

$$I(\gamma_r, \delta) = I(\alpha_\infty, \delta) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} (s^2 + 1)^{-3/2} ds = 4\pi,$$

waarbij de laatste integraal uitgerekend kan worden met behulp van de substitutie van variabelen $s = \tan \phi$. Bewijs dat $\sum_j v_j(x) dx_j$ niet exact is op $\mathbb{R}^3 \setminus \delta(J)$ en dat $\mathbb{R}^3 \setminus \delta(J)$ niet enkelvoudig samenhangend is.

Opmerking: men kan bewijzen dat, voor ieder paar van gesloten C^1 krommen γ en δ in $\mathbb{R}^3$ die elkaar niet treffen, het getal $I(\gamma, \delta)/4\pi$ een geheel getal is. Dit gehele getal heet het *schakelgetal* (engels: linking number) van de krommen γ en δ . Men zegt dat γ en δ niet geschakeld zijn als γ in het complement van het beeld van δ samentrekbaar is. Uit c) volgt dat dit impliceert dat het schakelgetal van γ en δ gelijk is aan nul. $\circlearrowright$

4 Complexe Functies

4.1 Complexe Getallen

Omdat voor ieder reëel getal $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $x^2 \geq 0$, is er geen $x \in \mathbb{R}$ met $x^2 = -1$. Al in de 16de eeuw introduceerde men bij het onderzoek van kwadratische en hogere graads veeltermvergelijkingen een *imaginaire* $\sqrt{-1}$, een erbij bedacht getal i waarvoor $i^2 = -1$. Men ontdekte dat de combinaties $z = x + i y$, met $x, y \in \mathbb{R}$, de *complexe getallen* genoemd, een consistent systeem van getallen vormden, in volgende zin. Als men de gebruikelijke rekenregels toepast op $z = a + i b$ en $w = c + i d$, dan is de som

$$z + w = (a + i b) + (c + i d) = (a + c) + i(b + d)$$

weer een getal van die vorm, evenals het product

$$z w = (a + i b)(c + i d) = (a c + i^2 b d) + i(a d + b c) = (a c - b d) + i(b c + a d)$$

en zelfs ook de tegengestelde

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + i b} = \frac{a - i b}{(a + i b)(a - i b)} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Alle twijfel over het bestaan van de complexe getallen en hoe ermee te werken werd daarna weggenomen door middel van de volgende definitie.

Definitie 4.1 Het systeem $\mathbb{C}$ van de complexe getallen is de verzameling $\mathbb{R}^2$ van alle paren (x, y) van reële getallen x en y , waartussen een optelling en een vermenigvuldiging zijn gedefinieerd door middel van de formules

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{en} \quad (4.1)$$

$$(a, b)(c, d) = (a c - b d, b c + a d). \quad (4.2)$$

Men identificeert $(x, 0) \in \mathbb{C}$ met het reële getal x en men schrijft $i := (0, 1)$, hetgeen met het oog op (4.1) en (4.2) leidt tot de identificatie $(x, y) = x + i y$. $\oslash$

We herkennen (4.1) als de gebruikelijke optelling van vectoren in $\mathbb{R}^2$, hetgeen de volgende rekenregels voor de optelling in $\mathbb{C}$ impliceert.

- a) Voor iedere $p, q \in \mathbb{C}$ geldt dat $p + q = q + p$.
- b) Voor iedere $p, q, r \in \mathbb{C}$ geldt dat $(p + q) + r = p + (q + r)$.
- c) Er is een (eenduidig bepaald) element $0 \in \mathbb{C}$ met de eigenschap dat voor iedere $z \in \mathbb{C}$ geldt dat $z + 0 = 0 + z = z$.
- d) Bij iedere $z \in \mathbb{C}$ is er een (eenduidig bepaald) element $-z \in \mathbb{C}$, waarvoor $z + (-z) = (-z) + z = 0$.

De eigenschappen a) resp. b) heten de *commutativiteit*, resp. de *associativiteit* van de optelling. De eigenschappen a) tot en met d) samen zeggen dat $\mathbb{C}$ ten aanzien van de optelling een *commutatieve groep* vormt.

Voor de vermenigvuldiging hebben we de eigenschappen

- e) Voor iedere $p, q \in \mathbb{C}$ geldt dat $p q = q p$.
- f) Voor iedere $p, q, r \in \mathbb{C}$ geldt dat $(p q) r = p (q r)$.
- g) Er is een (eenduidig bepaald) element $1 \in \mathbb{C}$ met de eigenschap dat voor iedere $z \in \mathbb{C}$ geldt dat $z 1 = 1 z = z$.
- h) Bij iedere $z \in \mathbb{C}$ met $z \neq 0$ is er een (eenduidig bepaald) element $z^{-1} = 1/z \in \mathbb{C}$, waarvoor $z z^{-1} = z^{-1} z = 1$.

Anders gezegd, ook de vermenigvuldiging is commutatief en associatief, terwijl de eigenschappen e) tot en met h) impliceren dat $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ten aanzien van de vermenigvuldiging een commutatieve groep vormt.

Het bewijs van de commutativiteit is eenvoudig. Voor de associativiteit van de vermenigvuldiging is het inzichtelijk om de afbeelding

$$V_p : z \mapsto p z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad (4.3)$$

in te voeren, die de *vermenigvuldiging met het element* $p \in \mathbb{C}$ beschrijft. Dan is de associativiteit f) van de complexe vermenigvuldiging equivalent met de uitspraak dat

$$V_{p q} = V_p \circ V_q \quad \text{voor iedere } p, q \in \mathbb{C}. \quad (4.4)$$

Nu volgt uit (4.2) dat als $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, dan is V_p een reëel lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^2$, met matrix gelijk aan

$$\text{matrix van } V_p = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Als $q = (c, d)$, dan laat de matrixvermenigvuldiging

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a c - b d & -a d - b c \\ b c + a d & -b d + a c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a c - b d & -(b c + a d) \\ b c + a d & a c - b d \end{pmatrix}$$

zien dat $V_p \circ V_q = V_{p q}$. Voor g) neemt men $1 = (1, 0)$ en voor h) nemen we

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \quad \text{als } z = (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Tenslotte geldt betreffende de wisselwerking tussen de vermenigvuldiging en de optelling de *distributieve wet*

- i) Voor iedere $p, q, r \in \mathbb{C}$ geldt dat $p (q + r) = p q + p r$ en $(q + r) p = q p + r p$.

De eerste identiteit hierin volgt uit de lineariteit van de afbeelding $V_p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. De tweede identiteit volgt uit de eerste, door gebruik te maken van de commutativiteit e) van de complexe vermenigvuldiging.

De eigenschappen a) tot en met i) samen maken $\mathbb{C}$ tot een zogenaamd *lichaam*, een systeem van getallen waarvoor alle gebruikelijke algebraïsche rekenregels met betrekking tot de optelling en de vermenigvuldiging geldig zijn.

De formules

$$(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0) \quad \text{en} \quad (a, 0) (c, 0) = (a c, 0)$$

laten zien dat als $p, q \in \mathbb{R}$, dan zijn de complexe som, resp. het complexe product van p en q weer elementen van $\mathbb{R}$ en wel gelijk aan de reële som, resp. het reële product van p en q . Men zegt in deze situatie dat $\mathbb{R}$ een *deellichaam* is van $\mathbb{C}$ en dat $\mathbb{C}$ een *lichaamsuitbreiding* is van $\mathbb{R}$. (Een vroeger voorbeeld hiervan geeft het systeem $\mathbb{Q}$ van de rationale getallen. $\mathbb{Q}$ is een deellichaam is van $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ is een lichaamsuitbreiding van $\mathbb{Q}$.) Het is duidelijk dat $\mathbb{C}$ de kleinst mogelijke lichaamsuitbreiding is van $\mathbb{R}$ dat een element i bevat waarvoor $i^2 = -1$. Men zegt daarom dat $\mathbb{C}$ de lichaamsuitbreiding is van $\mathbb{R}$ die verkregen is door toevoeging van een oplossing van de vergelijking $z^2 + 1 = 0$.

Voorbeeld 4.2 Een interessant voorbeeld van een afbeelding (4.3) is de afbeelding V_i , de vermenigvuldiging met het getal i . Volgens (4.5) is dit de reëel lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^2$ met matrix gelijk aan $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. We herkennen hierin de *draaiing linksom over een kwart slag*.

Uit (4.4) en $i^2 = -1$ volgt dat $V_i \circ V_i = V_{-1}$, hetgeen het bekende feit weergeeft dat tweemaal een kwart slag draaien gelijk is aan de reflectie $z \mapsto -z$ om de oorsprong. $\oslash$

Definitie 4.3 Zij $z \in \mathbb{C}$. Dan zijn er eenduidig bepaalde reële getallen x en y waarvoor $z = x + i y$. Men noemt

$\operatorname{Re} z := x$ het *reële deel* van z ,

$\operatorname{Im} z := y$ het *imaginaire deel* van z ,

$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ de *absolute waarde* van z en

$\bar{z} := x - i y$ de *complex geconjugeerde* van z .

$\oslash$

De deelverzameling $\mathbb{R}$ van $\mathbb{C}$ heet ook wel de *reële as* in het *complexe vlak* $\mathbb{C}$. De reële as is gelijk aan de verzameling van alle $z \in \mathbb{C}$ met $\operatorname{Im} z = 0$, welke voorwaarde equivalent is met $\bar{z} = z$.

Merk op dat, ondanks de naam, het imaginaire deel van z een reëel getal is. De verzameling der $i y$ met $y \in \mathbb{R}$ heet dan wel weer de *imaginaire as* in het complexe vlak. Dit is de verzameling van alle $z \in \mathbb{C}$ met $\operatorname{Re} z = 0$, welke voorwaarde equivalent is met $\bar{z} = -z$. In termen van de coördinaten (x, y) is de reële as de x -as en de imaginaire as de y -as.

De absolute waarde $|z|$ van $z \in \mathbb{C}$ is gelijk aan de norm $\|(x, y)\|$ van de vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Hieronder verzamelen we nog een aantal veelgebruikte eigenschappen, waarvan het bewijs niet moeilijk is. Zij gelden voor willekeurige $z, w \in \mathbb{C}$ en $t \in \mathbb{R}$.

Lemma 4.4 (Eigenschappen)

a) $\operatorname{Re}(z + w) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w$ en $\operatorname{Re}(t z) = t \operatorname{Re} z$.

b) $\operatorname{Im}(z + w) = \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} w$ en $\operatorname{Im}(t z) = t \operatorname{Im} z$.

c) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2} (z + \bar{z})$ en $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i} (z - \bar{z})$.

d) $\bar{\bar{z}} = z$.

e) $|z| = \sqrt{z \bar{z}} = |\bar{z}|$.

f) Als $z \neq 0$, dan is $1/z = \bar{z}/|z|^2$.

g) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ en $\overline{zw} = \bar{z} \bar{w}$.

h) $|zw| = |z| |w|$. Als $w \neq 0$ dan is $|z/w| = |z|/|w|$.

i) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ en $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$.

j) $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$.

k) De driehoeksongelijkheid $|z + w| \leq |z| + |w|$.

l) De omgekeerde driehoeksongelijkheden $|z - w| \geq |z| - |w|$ en $|z - w| \geq |w| - |z|$.

Voor afbeeldingen $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ met $U \subset \mathbb{C}$ of $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ met $U \subset \mathbb{R}^n$ of $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ met $U \subset \mathbb{C}$ worden alle begrippen van convergentie, continuïteit en differentieerbaarheid ingevoerd door $\mathbb{C}$ met $\mathbb{R}^2$ te identificeren. Als de complexwaardige functies $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ en $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ continu, resp. differentieerbaar zijn, dan volgt de continuïteit, resp. differentieerbaarheid van de productfunctie

$$fg : x \mapsto f(x)g(x)$$

uit de algebraïsche manier waarop het reële en imaginaire deel van $f(x)g(x)$, de coördinaten van $f(x)g(x) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, verkegen worden uit de coördinaten van $f(x)$ en $g(x)$. Eenzelfde opmerking geldt voor continuïteit, resp. differentieerbaarheid van de quotiëntfunctie f/g in de punten $x \in U$ waarvoor $g(x) \neq 0$.

Als I een interval in $\mathbb{R}$ is en $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$, dan noemt men γ ook wel een *kromme in het complexe vlak*. Met betrekking tot het complexe product heeft men de volgende rekenregel.

Lemma 4.5 *Zij I een reëel interval en onderstel dat de krommen $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ en $\delta : I \rightarrow \mathbb{C}$ differentieerbaar zijn. Dan geldt*

$$\frac{d}{dt} (\gamma(t) \delta(t)) = \gamma'(t) \delta(t) + \gamma(t) \delta'(t), \quad t \in I \quad (4.6)$$

en

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{\gamma(t)} = \frac{-\gamma'(t)}{\gamma(t)^2} \quad \text{als} \quad t \in I \quad \text{en} \quad \gamma(t) \neq 0. \quad (4.7)$$

Hierin zijn de snelheidsvectoren $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ en $\delta'(t) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ opgevat als complexe getallen.

Bewijs Uit de distributieve wet i) voor de complexe vermenigvuldiging lezen we af dat als p en q complexe getallen zijn, dan is $d(p\delta(t))/dt = p\delta'(t)$ en $d(\gamma(t)q)/dt = \gamma'(t)q$. De formule (4.6) volgt nu door toepassing van de somregel voor differentiatie, Gevolg 1.21.

De formule (4.7) volgt uit (4.6) met $\delta(t)$ vervangen door $1/\gamma(t)$, in welk geval het linkerlid van (4.6) gelijk aan nul wordt. $\square$

4.2 Complexe Veeltermen

Voor iedere $z \in \mathbb{C}$ definieert men de machten z^n voor $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ met inductie door $z^0 = 1$ en $z^{n+1} = z z^n$. Als $z \neq 0$ dan schrijft men verder $z^{-n} = 1/z^n$, hiermee is z^n voor iedere $n \in \mathbb{Z}$ gedefinieerd. Men verifieert gemakkelijk dat voor iedere $m, n \in \mathbb{Z}$ geldt dat $z^{m+n} = z^m z^n$.

Zijn $c_j \in \mathbb{C}$, $0 \leq j \leq n$ en is $c_n \neq 0$, dan definieert

$$p(z) = \sum_{j=0}^n c_j z^j \quad (4.8)$$

een afbeelding $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die een *complexe veeltermfunctie* van de *graad* n en met de *coëfficiënten* c_j , $0 \leq j \leq n$ genoemd wordt. Men noemt c_n ook wel de *hoogstegraadscoëfficiënt* van p .

Voor veeltermfuncties geldt een delingslemma dat veel sterker is dan Lemma 2.10. Omdat het bewijs zuiver algebraïsch is, geldt het voor veeltermfuncties over een willekeurig lichaam k . Men noemt a een *nulpunt* van de functie p als $p(a) = 0$.

Lemma 4.6 Voor iedere $j \in \mathbb{Z}_{>0}$ geldt

$$z^j - w^j = (z - w) \sum_{k=0}^{j-1} w^{j-1-k} z^k. \quad (4.9)$$

Zij p een veeltermfunctie van de graad n als in (4.8). Definieer, voor willekeurige z en w ,

$$q(z, w) := \sum_{k=0}^{n-1} b_k(w) z^k, \quad \text{waarin} \quad b_k(w) := \sum_{j=k+1}^n c_j w^{j-1-k}.$$

Dan geldt voor iedere z dat $p(z) - p(w) = (z - w) q(z, w)$. Hierin is $z \mapsto q(z, w)$ een veeltermfunctie van de graad $n - 1$, met hoogstegraadscoëfficiënt $b_{n-1}(w) = c_n$.

Als p nulpunten heeft, dan is er een positief geheel getal m met $m \leq n$ en zijn er a_l , $1 \leq l \leq m$ waarvoor

$$p(z) = r(z) \prod_{l=1}^m (z - a_l),$$

waarin $r(z)$ een veeltermfunctie van de graad $n - m$ is zonder nulpunten en met hoogstegraadscoëfficiënt gelijk aan c_n . De a_l zijn de nulpunten van p , waarvan er ten hoogste n verschillende zijn.

Bewijs De formule (4.9) volgt uit

$$(z-w) \sum_{k=0}^{j-1} w^{j-1-k} z^k = \sum_{k=0}^{j-1} w^{j-1-k} z^{k+1} - \sum_{k=0}^{j-1} w^{j-k} z^k = \sum_{k=1}^j w^{j-k} z^k - \sum_{k=0}^{j-1} w^{j-k} z^k = z^j - w^j.$$

Door het linker- en rechterlid van (4.9) met c_j te vermenigvuldigen, te sommeren over j en vervolgens in het rechterlid de sommatievolgorde te verwisselen, krijgen we $p(z) - p(w) = (z - w) q(z, w)$.

De laatste uitspraken volgen nu met inductie over de graad n . Immers, als $p(a) = 0$, dan krijgen vanwege het voorgaande met $w = a$ een veelterm q van de graad $n - 1$ met hoogstegraadscoëfficiënt

gelijk aan c_n , waarvoor $p(z) = (z - a)q(z)$. Pas nu de inductieveronderstelling toe met n vervangen door $n - 1$ en p vervangen door q . $\square$

Het volgende resultaat staat bekend als de *hoofdstelling van de algebra*, voor het eerst bewezen door d'Alembert in 1746. Wij zullen na Gevolg 4.34 een heel ander bewijs geven dan d'Alembert.

Stelling 4.7 *Zij p een complexe veelterm van positieve graad. Dan is er een $a \in \mathbb{C}$ met $p(a) = 0$.*

Dit is een nogal verrassend resultaat: $\mathbb{C}$ is het lichaam dat is verkregen door aan $\mathbb{R}$ een oplossing van de speciale veeltermvergelijking $z^2 + 1 = 0$ toe te voegen en als gevolg daarvan heeft nu opeens iedere veeltermvergelijking een oplossing in $\mathbb{C}$.

Gevolg 4.8 *Zij p een complexe veelterm van de graad n , met $n > 0$ en hoogstegraadcoëfficiënt $c_n \neq 0$. Dan zijn er $a_l \in \mathbb{C}$, $1 \leq l \leq n$, waarvoor*

$$p(z) = c_n \prod_{l=1}^n (z - a_l), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Bewijs Omdat de functie r in Lemma 4.6 geen nulpunten heeft, is de graad van r vanwege Stelling 4.7 gelijk aan 0, dus $k = n$ en $r(z) \equiv c_n$. $\square$

Opmerking 4.9 Het is in Gevolg 4.8 toegelaten dat er onder de a_l gelijken voorkomen. Dat wil zeggen, het kan gebeuren dat er l en l' zijn met $l \neq l'$ en $a_l = a_{l'}$. Dit correspondeert met het geval dat het aantal verschillende nulpunten van p strikt kleiner is dan n .

Schrijf

$$N = \{a \in \mathbb{C} \mid p(a) = 0\}$$

voor de verzameling van alle nulpunten van p , dit is een verzameling met ten hoogste n elementen. Voor iedere $a \in N$ noemt men het aantal der l waarvoor $a_l = a$ de *multipliciteit* $m(a)$ van het nulpunt a van p . We hebben dan de formules

$$\sum_{a \in N} m(a) = n \quad \text{en} \quad p(z) = c_n \prod_{a \in N} (z - a)^{m(a)}.$$

De eerste identiteit zegt dat het aantal nulpunten van een veelterm in $\mathbb{C}$, *geteld met multipliciteit*, altijd gelijk is aan de graad van de veelterm. $\odot$

Een *complexe rationale functie* is een functie r van de vorm $r(z) = p(z)/q(z)$, waarin p en q complexe veeltermfuncties zijn. Deze functie is goed gedefinieerd op het complement van de verzameling der nulpunten van q , waarvan het aantal ten hoogste gelijk is aan de graad van q .

Het is duidelijk dat complexe rationale functies willekeurig vaak differentieerbaar zijn in het complement van de nulpunten van de noemer. De partiële afgeleiden (naar het reële en imaginaire deel van z) kunnen in principe met behulp van de gebruikelijke rekenregels uitgerekend worden, al kunnen de formules al snel aardig ingewikkeld worden.

4.3 De Complexe Exponentiële Functie

De verzameling

$$\mathbf{T} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \quad (4.10)$$

heet de *eenheidscirkel in het complexe vlak*. In termen van de coördinaten (x, y) is dit de eenheidscirkel in het (x, y) -vlak die bepaald wordt door de vergelijking $x^2 + y^2 = 1$. Zoals bekend, wordt deze met constante snelheid gelijk aan 1 linksom doorlopen door middel van de kromme $\gamma(t)$, die is gedefinieerd door $x = \cos t$, $y = \sin t$, ofwel $\gamma(t) = \cos t + i \sin t$. De afgeleide naar t hiervan is gelijk aan

$$\gamma'(t) = -\sin t + i \cos t = i(\cos t + i \sin t) = i \gamma(t).$$

Merk op dat $i \gamma(t)$ verkregen wordt door de vector $\gamma(t)$ in het vlak een kwart slag linksom te draaien, zie Opmerking 4.2.

De differentiaalvergelijking $d\gamma(t)/dt = i \gamma(t)$, gecombineerd met de beginwaarde $\gamma(0) = 1$, leidde Euler er in 1743 toe om te schrijven

$$e^{it} := \cos t + i \sin t, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.11)$$

Lemma 4.10 Voor iedere $a, b \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$e^{ia} e^{ib} = e^{i(a+b)} = e^{ia+ib} \quad (4.12)$$

en

$$\overline{e^{ia}} = 1/e^{ia} = e^{-ia} = e^{i\overline{a}} \quad (4.13)$$

Bewijs We geven een bewijs, uitgaande van de ‘definiërende differentiaalvergelijking’ $\gamma'(t) = i \gamma(t)$ met de beginwaarde $\gamma(0) = 1$.

Zij $s \in \mathbb{R}$. Vanwege (4.6) met $\delta(t) = \gamma(s - t)$ geldt voor iedere $t \in \mathbb{R}$ dat

$$\frac{d}{dt}(\gamma(t) \gamma(s - t)) = \gamma'(t) \gamma(s - t) - \gamma(t) \gamma'(s - t) = i \gamma(t) \gamma(s - t) - \gamma(t) i \gamma(s - t) = 0.$$

Hieruit volgt dat de functie $t \mapsto \gamma(t) \gamma(s - t)$ constant is, dus gelijk aan zijn waarde $\gamma(0) \gamma(s) = \gamma(s)$ voor $t = 0$. Hiermee is bewezen dat $\gamma(t) \gamma(s - t) = \gamma(s)$ voor alle $s, t \in \mathbb{R}$. Substitutie van $s = a + b$, $t = a$ geeft nu dat $\gamma(a) \gamma(b) = \gamma(a + b)$, hetgeen de eerste identiteit in (4.12) is. De tweede is een herschrijving van de exponent.

Substitutie van $b = -a$ in $\gamma(a) \gamma(b) = \gamma(a + b)$ geeft $\gamma(a) \gamma(-a) = \gamma(0) = 1$, hetgeen de tweede identiteit in (4.13) is. De derde identiteit in (4.13) is een herschrijving van de exponent.

De eerste identiteit in (4.13) betekent dat $\gamma(a) \overline{\gamma(a)} = 1$, ofwel $\gamma(a) \in \mathbf{T}$. Om ook dit uit de definiërende differentiaalvergelijking en beginwaarde te bewijzen, schrijven we

$$\frac{d}{dt}(\gamma(t) \overline{\gamma(t)}) = \gamma'(t) \overline{\gamma(t)} + \gamma(t) \overline{\gamma'(t)} = i \gamma(t) \overline{\gamma(t)} + \gamma(t) i \overline{\gamma(t)} = 0.$$

waarbij we opnieuw (4.6) hebben gebruikt en de rekenregels $(\overline{\gamma})' = \overline{\gamma'}$ en $i \overline{\gamma} = \overline{i \gamma} = -i \gamma$. We concluderen dat de functie $\gamma \overline{\gamma}$ constant is, dus gelijk aan zijn waarde in $t = 0$ en die is gelijk aan 1. De conclusie is dat $\gamma(t) \overline{\gamma(t)} \equiv 1$. $\square$

Substitutie van (4.11) en uitschrijven van de complexe producten leidt tot de conclusie dat de eerste identiteit in (4.12) en de eerste identiteit in (4.13) equivalent zijn met de bekende trigonometrische identiteiten

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad (4.14)$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad (4.15)$$

$$(\cos a)^2 + (\sin a)^2 = 1, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (4.16)$$

De formules voor $\cos(a + b)$ en $\sin(a + b)$ zijn wat lastiger te onthouden dan (4.12) en (4.11), dus het is prettig dat men deze altijd kan reconstrueren uit (4.12) en (4.11). Het bewijs van Lemma 4.10, uit de definiërende differentiaalvergelijking $\gamma' = i\gamma$ en beginwaarde $\gamma(0) = 1$, kan daarbij gezien worden als een alternatief bewijs voor de identiteiten (4.14), (4.15) en (4.16).

Met inductie over n volgt uit (4.12) dat

$$(e^{ia})^n = e^{ina}, \quad n \in \mathbb{Z}_{>0},$$

hetgeen vanwege Euler's formule (4.11) equivalent is met de *formule van de Moivre*

$$(\cos a + i \sin a)^n = \cos(na) + i \sin(na), \quad n \in \mathbb{Z}_{>0}. \quad (4.17)$$

Door uitwerken van het product in het linkerlid en het verzamelen van de reële en zuiver imaginaire delen, leidt dit tot algebraïsche formules voor $\cos(na)$ en $\sin(na)$ in termen van $\cos a$ en $\sin a$. Bijvoorbeeld,

$$\cos(3a) = (\cos a)^3 - 3 \cos a (\sin a)^2 \quad \text{en} \quad \sin(3a) = -(\sin a)^3 + 3(\cos a)^2 \sin a.$$

Omgekeerd kunnen we de trigonometrische functies uitdrukken in termen van de complexe e-machten door middel van de formules

$$\cos t = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it}) \quad \text{en} \quad \sin t = \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it}), \quad (4.18)$$

die equivalent zijn met Euler's definitie (4.11). Hiermee kunnen de n -de machten van $\cos t$ en $\sin t$ uitgedrukt worden in termen van uitdrukkingen van de vorm $(e^{it})^k = e^{ikt}$, dus in termen van $\cos(kt)$ en $\sin(kt)$, voor geschikte gehele getallen k . Bijvoorbeeld,

$$(\cos t)^3 = \frac{1}{8} (e^{i3t} + 3e^{it} + 3e^{-it} + e^{-i3t}) = \frac{1}{4} \cos(3t) + \frac{3}{4} \cos t. \quad (4.19)$$

Daarmee vormen Euler's formules (4.11) en (4.18) een zeer efficiënt hulpmiddel in allerlei berekeningen met trigonometrische functies.

Voorbeeld 4.11 Zij n een positief geheel getal. Als een toepassing van de formule van de Moivre onderzoeken we welke *complexe n -de machts wortels* z er van een gegeven complex getal c zijn, dat wil zeggen wat de oplossingen zijn van de n -de graads veeltermvergelijking $z^n - c = 0$.

Om te beginnen merken we op dat $z^n = c$ met het oog op h) in Lemma 4.4 impliceert dat $|z|^n = |c|$, dus $|z| = |c|^{1/n}$, de positieve n -de machts wortel van $|c|$. We zien hieruit ook dat $c = 0$ dan en slechts dan als $z = 0$, we nemen daarom in het vervolg aan dat $c \neq 0$, hetgeen impliceert dat $z \neq 0$.

Als we schrijven $u = |c|^{-1/n} z = |z|^{-1} z$, dan is $|u| = 1$ en $v := u^n = |c|^{-1} z^n = |c|^{-1} c$. Dus $u = e^{is}$ en $v = e^{it}$ voor $s, t \in \mathbb{R}$, waarin $s = \arg u = \arg z$ en $t = \arg v = \arg c$. Nu is

$$e^{it} = v = u^n = (e^{is})^n = e^{ins},$$

waarbij in de laatste identiteit (4.17) is gebruikt. Dit is equivalent met de voorwaarde dat er een geheel getal k is, waarvoor $t = ns + k2\pi$. Anders gezegd, voor $s = \arg z$ hebben we de mogelijkheden

$$s = \frac{t}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dit leidt tot de volgende oplossingen:

$$z^n = c \iff z = |c|^{1/n} e^{i \frac{\arg c}{n}} w^k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad w := e^{2\pi i/n}.$$

Hierin zijn de w^k , $k \in \mathbb{Z}$ de oplossingen van de vergelijking $z^n = 1$, deze getallen worden daarom de *n-de machts eenheidswortels* genoemd. Er zijn precies n verschillende *n-de machts eenheidswortels*, omdat $w^k = w^l$ dan en slechts dan als $k - l$ een geheel veelvoud is van n . De *n-de machts eenheidswortels* zijn daarmee:

$$e^{\frac{2\pi i k}{n}} \quad \text{met } 0 \leq k \leq n-1.$$

Dit zijn de hoekpunten, liggend op de eenheidscirkel $\mathbf{T}$, van een *regelmatige n-hoek*, waarbij het complexe getal 1 één van de hoekpunten vormt.

De oplossingen van de vergelijking $z^n = c$ zijn de hoekpunten van een regelmatige *n-hoek* op de cirkel met middelpunt in de oorsprong en straal gelijk aan $|c|^{1/n}$, waarbij het complexe getal

$$|c|^{1/n} e^{i \frac{\arg c}{n}}$$

één van de hoekpunten vormt. Alle oplossingen zijn

$$z = z_k = |c|^{1/n} e^{i(\arg c + 2\pi k)/n},$$

waarbij k geheel en $0 \leq k \leq n-1$. Merk op dat $z_k = z_l$ dan en slechts dan als $k - l$ een geheel veelvoud is van n , dus de gehele k met $0 \leq k \leq n-1$ kunnen ook gezien worden als de *n* representanten van het systeem $\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$ van de *gehele getallen modulo n*.

De *n* oplossingen z_n zijn de *n* nulpunten van de veeltermfunctie $z \mapsto z^n - c$ van de graad *n*. Dit voorbeeld vormde historisch een belangrijke aanwijzing dat in het algemeen een *n-de graads* veeltermvergelijking wel eens *n* complexe oplossingen zou kunnen hebben. $\oslash$

Definitie 4.12 Voor willekeurige $z \in \mathbb{C}$ met $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, definieert men

$$e^z = e^{x+iy} := e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (4.20)$$

De functie $z \mapsto e^z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heet de *complexe exponentiële functie*. Het is duidelijk dat de beperking hiervan tot de reële as gelijk is aan de reële exponentiële functie, omdat $\cos y + i \sin y = 1$ als $y = 0$. Anderzijds wordt de complexe exponentiële functie op de imaginaire as gegeven in termen van de trigonometrische functies door middel van Euler's formule (4.11). $\oslash$

Lemma 4.13 Voor iedere $z, z' \in \mathbb{C}$ geldt dat $e^z e^{z'} = e^{z+z'}$.

Bewijs Dit volgt uit de corresponderende eigenschap voor de reële exponentiële functie en (4.12). Immers als $z = x + i y$, $z' = x' + i y'$ met $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$, dan is $e^z e^{z'}$ gelijk aan

$$e^{x+iy} e^{x'+iy'} = e^x e^{iy} e^{x'} e^{iy'} = e^x e^{x'} e^{iy} e^{iy'} = e^{x+x'} e^{i(y+y')} = e^{x+x'+i(y+y')},$$

hetgeen we herkennen als $e^{z+z'}$. □

Het rechterlid van (4.20) laat zien dat de complexe exponentiële functie nauw verwant is met de *substitutie van poolcoördinaten* $u = r \cos \theta$, $v = r \sin \theta$ in het reële vlak. Beschouwen we $w = u + i v$ als een element van het complexe vlak en substitueren we $r = e^x$ en $\theta = y$, dan krijgen $w = e^z$, als $z = x + i y$. Merk ook op dat

$$|w| = |e^z| = e^x > 0,$$

dus $w \neq 0$ en $x = \log |w|$.

Uit dit verband met poolcoördinaten zien we ook dat er voor iedere $w \in \mathbb{C}$ met $w \neq 0$ een $z \in \mathbb{C}$ is, waarvoor $e^z = w$. Anders gezegd, de complexe exponentiële functie is surjectief van $\mathbb{C}$ naar het complement $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ van de oorsprong in $\mathbb{C}$. Immers, $p := |w|^{-1} w$ is een punt op de eenheidscirkel, dus $p = \cos y + i \sin y$ voor een geschikte $y \in \mathbb{R}$. Nemen we verder $x = \log |w|$, dan is

$$w = |w| p = e^x e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$$

als $z = x + i y$.

De complexe exponentiële functie is echter verre van injectief, zoals blijkt uit het volgende lemma, waarvan het bewijs direct uit de definitie (4.20) volgt.

Lemma 4.14 *Voor een complex getal z geldt dat $e^z = 1$, dan en slechts dan als er een geheel getal k is, waarvoor $z = k 2\pi i$. Algemener, $e^z = e^{z'}$, dan en slechts dan als er een geheel getal k is, waarvoor $z' = z + k 2\pi i$.*

Deze meerwaardigheid van de inverse van de complexe exponentiële functie, die we de complexe logaritme zouden willen noemen, is direct gerelateerd aan de meerwaardigheid van de hoekfunctie op het complement van de oorsprong in het vlak $\mathbb{R}^2$. De voorgaande observaties leiden tot de volgende formule voor de *complexe logaritme*:

$$\log w = \log |w| + i \arg w, \quad w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad (4.21)$$

beschouwd als een identiteit tussen meerwaardige functies.

Om een goed gedefinieerde éénwaardige complexe logaritme te krijgen, dient men zich te beperken tot een deelverzameling V van $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ waarop een éénwaardige hoekfunctie $\arg$ is gedefinieerd, waarna men (4.21) als de definitie van de corresponderende éénwaardige complexe logaritme op V kan nemen. Bijvoorbeeld, als V een enkelvoudig samenhangende open deelverzameling is van $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, dan is er een willekeurig vaak differentieerbare éénwaardige hoekfunctie op V , zoals is besproken in Voorbeeld 3.23. Nemen we voor V het complement in $\mathbb{C}$ van de negatieve reële as en $\arg w = 0$ als $w \in \mathbb{R}$ en $w > 0$, dan krijgt men zo de *standaardkeuze van de complexe logaritme*.

Uit (4.21) volgt dat de rekenregel $\log(pq) = \log p + \log q$ geldig is als $p \in V$, $q \in V$, $pq \in V$ en $\arg(pq) = \arg p + \arg q$.

Voor de standaardkeuze van de complexe logaritme zien we dat dit bijvoorbeeld *niet* meer waar is als $p = q = e^{i3\pi/4}$. In dit geval is $p \in V$, $q \in V$ en

$$pq = e^{i3\pi/2} = e^{-i\pi/2} \in V,$$

terwijl $\log p = \log q = i3\pi/4$ en $\log(pq) = -i\pi/2 \neq \log p + \log q$.

4.4 Complex Differentieerbare Functies

Aangezien deling mogelijk is in $\mathbb{C}$, kan men de definitie van differentieerbaarheid en van de afgeleide voor reëelwaardige functies van een reële variabele direct generaliseren naar complexwaardige functies van een complexe variabele.

Definitie 4.15 Zij $U \subset \mathbb{C}$ en zij a een inwendig punt van U . Een functie $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ heet *complex differentieerbaar in het punt a* als het differentiequotient $(f(z) - f(a))/(z - a)$, gedefinieerd voor alle $z \in U$ met $z \neq a$, convergeert als $z \rightarrow a$. De limiet heet de (*complexe*) *afgeleide van f in het punt a* en wordt met $f'(a)$ genoteerd.

Als U een open deelverzameling is van $\mathbb{C}$, dan heet $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ *complex differentieerbaar* als voor iedere $z \in U$ geldt dat f complex differentieerbaar is in het punt z . Men noteert in dit geval ook wel $f'(z) = df(z)/dz$. De functie $f' : z \mapsto f'(z) : U \rightarrow \mathbb{C}$ heet de *complexe afgeleide* van de functie f . $\oslash$

Anderzijds kan men over differentieerbaarheid van een complexwaardige functie van een complexe variabele spreken, waarbij deze opgevat wordt als een $\mathbb{R}^2$ -waardige functie van twee reële variabelen. Het verband tussen deze twee begrippen wordt in de volgende stelling besproken.

Stelling 4.16 Zij $U \subset \mathbb{C}$, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ en zij a een inwendig punt van U . Dan zijn de volgende uitspraken a) — c) equivalent.

- a) f is complex differentieerbaar in het punt a .
- b) f , beschouwd als $\mathbb{R}^2$ -waardige functie van twee reële variabelen, is totaal differentieerbaar in het punt a en er is een complex getal p waarvoor $Df(a) = V_p$.
- c) f , beschouwd als $\mathbb{R}^2$ -waardige functie van twee reële variabelen, is totaal differentieerbaar in het punt a en er gelden de vergelijkingen

$$D_2 f_1(a) = -D_1 f_2(a) \quad \text{en} \quad D_2 f_2(a) = D_1 f_1(a) \quad (4.22)$$

tussen de partiële afgeleiden.

De vergelijkingen (4.22) zijn equivalent met

$$D_2 f(a) = i D_1 f(a), \quad (4.23)$$

als we f als een complexwaardige functie van twee reële variabelen opvatten. Als a), b) en c) gelden, dan is $p = f'(a) = D_1 f(a) = -i D_2 f(a)$.

Bewijs Definiëren we $q(z) = (f(z) - f(a))/(z - a)$ als $z \neq a$ en $q(a)$ voorlopig willekeurig, dan is

$$f(z) = f(a) + q(z)(z - a) = f(a) + V_{q(z)}(z - a), \quad z \in U.$$

Als f complex differentieerbaar is in het punt a dan is er een complex getal p waarvoor $q(z) \rightarrow p$ als $z \rightarrow a$, $z \neq a$. Kiezen we $q(a) = p$, dan impliceert dit (1.18) met x , ξ en $L(x)$ vervangen door z , resp. a , resp. $V_{q(z)}$, hetgeen met het oog op Definitie 1.12 betekent dat b) geldt.

Omgekeerd impliceert b) dat (1.19) geldt met x en ξ vervangen door z , resp. a en met $A = V_p$. Dit impliceert dat

$$\left| \frac{f(z) - f(a)}{z - a} - p \right| = \left| \frac{f(z) - f(a) - p(z - a)}{z - a} \right| = |f(z) - f(a) - A(z - a)|/|z - a| \rightarrow 0$$

als $z \rightarrow a$, $z \neq a$, ofwel f is complex differentieerbaar in het punt a met complexe afgeleide gelijk aan p . Dit completeert het bewijs van de equivalentie van a) en b).

Uit (4.5) volgt dat $Df(a) = V_p$ voor een complex getal p , dan en slechts dan als de antidiagonaalelementen van de matrix van $Df(a)$ elkaars tegengestelde zijn en de diagonaalelementen van de matrix van $Df(a)$ aan elkaar gelijk zijn. Dit bewijst de equivalentie van b) en c).

Tenslotte leiden de vergelijkingen

$$D_1 f(a) = D_1 f_1(a) + i D_1 f_2(a) \quad \text{en} \quad D_2 f(a) = D_2 f_1(a) + i D_2 f_2(a)$$

tot de equivalentie van (4.22) en (4.23). □

De vergelijkingen (4.22), resp. (4.23) heten de *Cauchy-Riemann-vergelijkingen*.

Opmerking 4.17 Uit

$$e^{it} z = e^{it} |z| e^{i \arg z} = |z| e^{i(t + \arg z)}$$

lezen we af dat de vermenigvuldiging met e^{it} gelijk is aan de *draaiing over de hoek t* in het complexe vlak.

Schrijven we een willekeurig complex getal p als $|p| e^{it}$ met $t = \arg p$, dan geeft (4.4) dat V_p gelijk is aan de samenstelling van de draaiing over de hoek $\arg p$ en de vermenigvuldiging met de positieve factor $|p|$. Een samenstelling van een draaiing met een vermenigvuldiging met een positieve factor heet een *oriëntatiebehoudende conforme lineaire transformatie* in het vlak. De afbeeldingen V_p , $p \in \mathbb{C}$ zijn precies de oriëntatiebehoudende conforme lineaire transformaties in het vlak. De equivalentie tussen a) en b) in Stelling 4.16 kan dus ook zo geformuleerd worden dat de functie f complex differentieerbaar is in het punt a , dan en slechts dan als f totaal differentieerbaar is in het punt a en $Df(a)$ een oriëntatiebehoudende conforme lineaire transformatie is. Om deze reden heten complex differentieerbare functies ook wel *oriëntatiebehoudende conforme afbeeldingen*. ⊗

Voorbeeld 4.18 De functie f , gedefinieerd door $f(z) = z$, $z \in \mathbb{C}$, is complex differentieerbaar op $\mathbb{C}$, met afgeleide $f'(z) = 1$. Hieruit volgt dat f willekeurig vaak complex differentieerbaar is en voor iedere $k \geq 2$ geldt dat $f^{(k)} = 0$.

Daarentegen is de functie $f : z \mapsto \bar{z}$ in geen enkel punt complex differentieerbaar, omdat de matrix van $Df(z)$ gelijk is aan $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, waarvan de diagonaalelementen niet aan elkaar gelijk zijn. Het is ook instructief om na te gaan dat het differentiequotient $(\overline{z+h} - \bar{z})/(z+h-z) = \bar{h}/h$ niet convergeert als $h \neq 0$, $h \rightarrow 0$. ⊗

De volgende stellingen zijn geheel analoog aan de corresponderende stellingen voor reëelwaardige functies van één reële variabele. De bewijzen gaan in essentie onveranderd door met overal $\mathbb{R}$ vervangen door $\mathbb{C}$.

Stelling 4.19 Zij $U \subset \mathbb{C}$, a een inwendig punt van U en $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Als f complex differentieerbaar is in het punt a , dan is f continu in het punt a .

Stelling 4.20 Zij $U \subset \mathbb{C}$, a een inwendig punt van U , $c \in \mathbb{C}$ en $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ complex differentieerbaar in het punt a . Dan geldt:

- a) $c f$ is complex differentieerbaar in a en $(c f)'(a) = c f'(a)$.
- b) $f + g$ is complex differentieerbaar in a en $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

c) $f \cdot g$ is complex differentieerbaar in a en $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

d) Als bovendien $g(a) \neq 0$, dan is f/g complex differentieerbaar in a en

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Herhaald toepassen van deze rekenregels leidt, uitgaande van de complexe differentieerbaarheid van de functie $z \mapsto z$, tot:

Gevolg 4.21 Iedere complexe veeltermfunctie is complex differentieerbaar en

$$\frac{d}{dz} \sum_{j=0}^n c_j z^j = \sum_{j=1}^n c_j j z^{j-1}.$$

Iedere complexe rationale functie is complex differentieerbaar in het complement van de nulpunten van de noemer.

Uit de formule voor de afgeleide van een complexe veeltermfunctie volgt dat als p een complexe veeltermfunctie is van de graad n , dan is p' een complexe veeltermfunctie van de graad $n-1$. Dit impliceert dat p willekeurig vaak complex differentieerbaar is en $f^{(k)} = 0$ als $k \geq n+1$. Omgekeerd, is f $n+1$ keer complex differentieerbaar en $f^{(n+1)} = 0$, dan is $(f^{(n)})' = f^{(n+1)} = 0$, dus er is een constante c_0 waarvoor $f^{(n)} = c_0$. Hieruit volgt dat $g^{(n)} = 0$ als $g(z) := f(z) - c_0 z^n/n!$. Met inductie over n leidt dit tot de conclusie dat f een complexe veeltermfunctie is van de graad $\leq n$. De conclusie is dat f een complexe veeltermfunctie is van de graad $\leq n$, dan en slechts dan als f $n+1$ keer complex differentieerbaar is en $f^{(n+1)} = 0$.

Het feit dat iedere complexe veeltermfunctie willekeurig vaak complex differentieerbaar is impliceert dat iedere complexe rationale functie willekeurig vaak differentieerbaar is op het complement van de nulpunten van zijn noemer.

We geven nu twee kettingregels voor complex differentieerbare functies, die direct uit de definities kunnen worden bewezen.

Stelling 4.22 Zij $U \subset \mathbb{C}$, a een inwendig punt van U en $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ complex differentieerbaar in het punt a . Is I een interval in $\mathbb{R}$, $t \in I$, $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ differentieerbaar in het punt t en $\gamma(t) = a$, dan is $f \circ \gamma$ differentieerbaar in het punt t en

$$(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t)) \gamma'(t). \quad (4.24)$$

Is $V \subset \mathbb{C}$, $f(a)$ een inwendig punt van V en $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ complex differentieerbaar in het punt $b = f(a)$, dan is $g \circ f$ complex differentieerbaar in het punt a en

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) f'(a). \quad (4.25)$$

De eerste uitspraak kan ook afgeleid worden uit (1.29), in combinatie met $Df(a) = V_{f'(a)}$. De tweede uitspraak kan gezien worden als gevolg van (1.27), in combinatie met

$$Dg(f(a)) \circ Df(a) = V_{g'(f(a))} \circ V_{f'(a)} = V_{g'(f(a)) f'(a)},$$

zie (4.4).

Stelling 4.23 Zij U en V deelverzamelingen van $\mathbb{C}$, f een bijectieve afbeelding van U naar V , met inverse $g : V \rightarrow U$. Zij a , resp. $f(a)$ een inwendig punt van U , resp. V . Zij f complex differentieerbaar in het punt a , $f'(a) \neq 0$, terwijl g continu is in het punt $f(a)$. Dan is g complex differentieerbaar in het punt $f(a)$ en $g'(f(a)) = 1/f'(a)$.

Opmerking 4.24 Eigenschappen van differentieerbare functies die verband houden met de ordening van $\mathbb{R}$, zoals de stelling van Rolle en de middelwaardestelling, hebben geen direct analogon voor complex differentieerbare functies. $\oslash$

Stelling 4.25 De complexe exponentiële functie is complex differentieerbaar en $de^z/dz = e^z$.

Zij V een open deelverzameling $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ waarop een éénwaardige differentieerbare hoekfunctie $\arg$ gedefinieerd is. Definieer de corresponderende complexe logaritme $\log : V \rightarrow \mathbb{C}$ door middel van (4.21). Dan is $\log$ complex differentieerbaar, met afgeleide $d(\log w)/dw = 1/w$.

Bewijs Het is evident dat de complexe exponentiële functie en de complexe logaritme totaal differentieerbaar zijn.

Zij $x, y \in \mathbb{R}$. Uit de definiërende vergelijkingen $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$, $\partial e^x / \partial x = e^x$ en $\partial e^{iy} / \partial y = i e^{iy}$ volgt dat

$$\frac{\partial e^{x+iy}}{\partial x} = e^{x+iy} \quad \text{en} \quad \frac{\partial e^{x+iy}}{\partial y} = i e^{x+iy}.$$

Met het oog op Stelling 4.16 volgt hieruit dat $z \mapsto e^z$ complex differentieerbaar is en dat $de^z/dz = e^z$.

Omdat de complexe logaritme een continue inverse is van de complexe exponentiële functie en de afgeleide e^z van e^z geen nulpunten heeft, volgt uit Stelling 4.23 dat de complexe logaritme complex differentieerbaar is en dat

$$\frac{d}{dw} \log w = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w}$$

als $w = e^z \in V$. $\square$

Met inductie over k volgt dat de complexe exponentiële functie k keer complex differentieerbaar is en dat $d^k e^z / dz^k = e^z$. De complexe logaritme is willekeurig vaak complex differentieerbaar omdat zijn afgeleide een complexe rationale functie is en iedere complexe rationale functie willekeurig vaak complex differentieerbaar is op zijn definitiegebied.

Definitie 4.26 Zij V een open deelverzameling van $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, waarop een éénwaardige differentieerbare hoekfunctie $\arg$ is gedefinieerd en daarmee, volgens formule (4.21), een corresponderende complexe logaritme. Men definieert voor $z \in V$, $w \in \mathbb{C}$ de bijbehorende *complexe macht* z^w door middel van

$$z^w := e^{w \log z}.$$

$\oslash$

De functies $z \mapsto z^w$ en $w \mapsto z^w$ zijn complex differentieerbaar en

$$\frac{d}{dz} z^w = w z^{w-1} \quad \text{en} \quad \frac{d}{dw} z^w = z^w \log z.$$

Verder is het evident dat

$$z^{u+v} = z^u z^v \quad \text{voor iedere} \quad u, v \in \mathbb{C}.$$

De rekenregel $(pq)^w = p^w q^w$ is geldig zolang $p \in V, q \in V, pq \in V$ en $\arg(pq) = \arg p + \arg q$.

Voorbeeld 4.27 De rekenregel $(pq)^w = p^w q^w$ mag echter niet klakkeloos toegepast worden. Bijvoorbeeld, als $p = q = e^{i3\pi/4}$ dan is $\arg p = \arg q = 3\pi/4$ voor de standaardkeuze van de hoek, dus

$$p^w q^w = e^{w i 3\pi/4} e^{w i 3\pi/4} = e^{w i 3\pi/2}.$$

Anderzijds is $pq = e^{i3\pi/2} = e^{-i\pi/2}$, dus $\arg(pq) = -\pi/2$ voor de standaardkeuze van de hoek. Daarmee is $(pq)^w = e^{-w i \pi/2}$ en dit is alleen gelijk aan $p^w q^w$ als w een geheel getal is. $\odot$

4.5 Cauchy's Integraalformule

De vectorwaardige integraal $\int_a^b f(x) dx \in \mathbb{R}^p$ van een vectorwaardige continue functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ wordt gedefinieerd door:

$$\text{De } j\text{-de coördinaat van } \int_a^b f(x) dx := \int_a^b f_j(x) dx, \quad 1 \leq j \leq p.$$

Het is evident dat hiervoor de rekenregels

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad \text{en} \quad \int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

gelden, waarbij f en g continue $\mathbb{R}^p$ -waardige functies op $[a, b]$ zijn en c een reële constante is.

In schattingen maakt men dikwijls gebruik van de ongelijkheden

$$\left\| \int_a^b f(x) dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\| dx \leq \sup_{a \leq x \leq b} \|f(x)\| (b - a).$$

Voor het bewijs van de eerste ongelijkheid benaderen we de integraal met Riemann-sommen, waarvoor de driehoeksongelijkheid leidt tot

$$\left\| \sum_{j=1}^N (t_j - t_{j-1}) f(\tau_j) \right\| \leq \sum_{j=1}^N (t_j - t_{j-1}) \|f(\tau_j)\|.$$

Hierbij convergeert het linkerlid naar de norm van de integraal en het rechterlid naar de integraal van de norm, als we de maaswijdte $\max_{1 \leq j \leq N} (t_j - t_{j-1})$ van de verdeling naar nul laten gaan. Vanwege het behoud van het $\leq$ teken onder het nemen van limieten leidt dit tot de conclusie dat de norm van de integraal kleiner is dan of gelijk aan de integraal van de norm.

Op analoge manier is

$$\int_a^b f(t) dt := \int_a^b \operatorname{Re} f(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} f(t) dt$$

de complexwaardige integraal van een continue complexwaardige functie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. In dit geval krijgt de schatting voor de norm van de integraal de gedaante

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| (b - a). \quad (4.26)$$

Definitie 4.28 Zij $U \subset \mathbb{C}$, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ continu en zij $\gamma : [a, b]$ een C^1 kromme in het complexe vlak met $\gamma([a, b]) \subset U$. Dan definieert men de *complexe lijnintegraal* van f over γ als

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

⊗

Opmerking 4.29 Men zegt dat $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ een *complexe primitieve* is van f als $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ complex differentieerbaar is en $F' = f$. In dit geval geldt dat

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \quad (4.27)$$

Immers,

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b F'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t)) dt,$$

waarbij in de tweede identiteit (4.24) is gebruikt. Dit laat zien dat als f een complexe primitieve F heeft, de toename van F langs een kromme gelijk is aan de complexe lijnintegraal van f over die kromme. In het bijzonder is $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ als de kromme γ gesloten is en f een complexe primitieve in U heeft.

Omgekeerd, zij U samenhangend, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ continu, $p \in U$. Neem verder aan dat $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ een functie is met de eigenschap dat voor iedere $q \in U$ en iedere C^1 kromme γ die in U van p naar q loopt geldt dat

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(q) - F(p).$$

Dan is F een complexe primitieve van f . Het bewijs hiervan is analoog aan dat van Stelling 3.12. ⊗

Voorbeeld 4.30 Zij $p \in \mathbb{C}$ en $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{p\}$ een C^1 kromme. Voor iedere $k \in \mathbb{Z}$ met $k \neq -1$ is

$$\int_{\gamma} (z - p)^k dz = \frac{(\gamma(b) - p)^{k+1}}{k+1} - \frac{(\gamma(a) - p)^{k+1}}{k+1},$$

hetgeen gelijk aan nul is als γ gesloten is.

Een belangrijke uitzondering treedt op als $k = -1$. Vanwege Lemma 3.4 kunnen we schrijven $\gamma(t) - p = r(t) e^{i\theta(t)}$, waarin $r(t) = |\gamma(t) - p|$ en $t \mapsto \theta(t)$ een C^1 hoekfunctie is voor $\gamma(t) - p$. Dit leidt tot

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{1}{z - p} dz &= \int_a^b r(t)^{-1} \frac{1}{e^{i\theta(t)}} \left[r'(t) e^{i\theta(t)} + r(t) e^{i\theta(t)} i \theta'(t) \right] dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{r'(t)}{r(t)} + i \theta'(t) \right] dt = \log r(b) - \log r(a) + i(\theta(b) - \theta(a)). \end{aligned}$$

Anders gezegd, de integraal is gelijk aan de toename van de complexe logaritme van $z - p$ langs de kromme γ , zie (4.21). Omgekeerd kan men de complexe lijnintegraal van de functie $1/(z - p)$ gebruiken om er de toename van $\log(z - p)$ op eenduidige manier mee te definiëren. Hiermee worden alle onduidelijkheden betreffende de meerwaardigheid van de complexe logaritme weggewomen.

Als γ een gesloten C^1 kromme is in het complement van p , dan is de integraal gelijk aan i maal de toename van $\arg(\gamma(t) - p)$, dus gelijk aan $2\pi i$ maal het windingsgetal van γ om het punt p . Zie Definitie 3.5 voor de definitie van het windingsgetal. Dit leidt tot de formule

$$W_p(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - p} dz \quad (4.28)$$

voor het windingsgetal in termen van een complexe lijnintegraal. $\oslash$

Het volgende resultaat is een versie van *Cauchy's integraalstelling*.

Stelling 4.31 *Zij U een open deelverzameling van het complexe vlak en zij $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ complex differentieerbaar met continue afgeleide. Onderstel dat α en β gesloten C^1 krommen zijn, die homotoop in U zijn. Dan geldt dat*

$$\int_{\alpha} f(z) dz = \int_{\beta} f(z) dz.$$

Bewijs Wij geven Cauchy's oorspronkelijke bewijs uit 1825.

Het gegeven zegt dat er een C^1 homotopie $\gamma_s, s \in [0, 1]$ van C^1 krommen in U is met $\alpha = \gamma_0$ en $\beta = \gamma_1$. Schrijf $\gamma_s(t) = \gamma(s, t)$, zodat

$$\int_{\gamma_s} \omega = \int_a^b f(\gamma(s, t)) \frac{\partial \gamma(s, t)}{\partial t} dt.$$

We gaan aantonen dat de afgeleide naar s hiervan gelijk is aan nul, hetgeen de bewering van de stelling impliceert.

Uit de gegevens volgt dat in het rechterlid de integrand een continue functie is van (s, t) , die differentieerbaar is naar s , met een partiële afgeleide naar s die een continue functie is van (s, t) . Op grond van Stelling 2.11 mogen we daarom concluderen dat de integraal hiervan over $t \in [a, b]$ een differentieerbare functie van s definieert en dat de afgeleide naar s van de integraal gelijk is aan de integraal over $t \in [a, b]$ van de partiële afgeleide van de integrand naar de variabele s . De partiële afgeleide naar s van de integrand is gelijk aan

$$\frac{\partial f(\gamma(s, t))}{\partial s} \frac{\partial \gamma(s, t)}{\partial t} + f(\gamma(s, t)) \frac{\partial^2 \gamma(s, t)}{\partial s \partial t}.$$

Vanwege Stelling 2.4, voor de functie γ , is $\partial \gamma(s, t)/\partial s$ partieel differentieerbaar naar t en geldt dat $\partial^2 \gamma(s, t)/\partial s \partial t = \partial^2 \gamma(s, t)/\partial t \partial s$. Een partiële integratie geeft vervolgens dat

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\gamma(s, t)) \frac{\partial^2 \gamma(s, t)}{\partial t \partial s} dt &= - \int_a^b \frac{\partial f(\gamma(s, t))}{\partial t} \frac{\partial \gamma(s, t)}{\partial s} dt \\ &+ f(\gamma(s, b)) \frac{\partial \gamma(s, b)}{\partial s} - f(\gamma(s, a)) \frac{\partial \gamma(s, a)}{\partial s}. \end{aligned}$$

Hierin is de som van de randtermen gelijk aan nul, omdat voor iedere $s \in I$ geldt dat $\gamma(s, b) = \gamma(s, a)$, dus ook $\partial \gamma(s, b)/\partial s = \partial \gamma(s, a)/\partial s$.

Het bewijs wordt nu compleeteerd door de opmerking dat

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f(\gamma(s, t))}{\partial s} \frac{\partial \gamma(s, t)}{\partial t} - \frac{\partial f(\gamma(s, t))}{\partial t} \frac{\partial \gamma(s, t)}{\partial s} \\ &= f'(\gamma(s, t)) \frac{\partial \gamma(s, t)}{\partial s} \frac{\partial \gamma(s, t)}{\partial t} - f'(\gamma(s, t)) \frac{\partial \gamma(s, t)}{\partial t} \frac{\partial \gamma(s, t)}{\partial s} = 0. \end{aligned}$$

Hierbij is in de eerste identiteit tweemaal de formule (4.24) gebruikt. $\square$

Opmerking 4.32 Het bewijs van Stelling 4.31 is geheel analoog aan het bewijs van Lemma 3.17, alleen veel eenvoudiger omdat er geen sommaties hoeven plaats te vinden en de integrand die na de partiële integratie ontstaat automatisch gelijk aan nul is.

Men kan Stelling 4.31 ook uit Gevolg 3.19 afleiden. Hiertoe merken we op dat, voor een willekeurige C^1 kromme $\gamma : [a, b] \rightarrow U$,

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b [f_1(\gamma(t)) \gamma_1'(t) - f_2(\gamma(t)) \gamma_2'(t)] dt = \int_{\gamma} [f_1(z) dz_1 - f_2(z) dz_2]$$

en

$$\operatorname{Im} \int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b [f_2(\gamma(t)) \gamma_1'(t) + f_1(\gamma(t)) \gamma_2'(t)] dt = \int_{\gamma} [f_2(z) dz_1 + f_1(z) dz_2].$$

Hierin hebben we, voor een willekeurig complex getal w , de afkortingen $\operatorname{Re} w = w_1$ en $\operatorname{Im} w = w_2$ gebruikt.

Nu is de differentiaalvorm $f_1(z) dz_1 - f_2(z) dz_2$, resp. $f_2(z) dz_1 + f_1(z) dz_2$ gesloten dan en slechts dan als $D_2 f_1 = -D_1 f_2$, resp. $D_2 f_2 = D_1 f_1$. Dit zijn precies de Cauchy-Riemann-vergelijkingen (4.22) voor de complex differentieerbare functie f . $\odot$

We maken in de komende stellingen gebruik van de volgende notatie. Als $a \in \mathbb{C}$ en $r > 0$, dan is

$$\overline{B}(a; r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\} \quad (4.29)$$

de gesloten schijf in $\mathbb{C}$ met middelpunt gelijk aan a en straal gelijk aan r .

Stelling 4.33 Zij U een open deelverzameling van het complexe vlak en zij $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ complex differentieerbaar met continue afgeleide. Zij $a \in U$; dan is er een $r > 0$ waarvoor $\overline{B}(a; r) \subset U$. Schrijf $\gamma_r(t) = a + r e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Dan geldt voor iedere gesloten C^1 kromme γ in $U \setminus \{a\}$ die in $U \setminus \{a\}$ homotoop is met γ_r dat

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz. \quad (4.30)$$

Bewijs De functie $g : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$, gedefinieerd door $g(z) := f(z)/(z - a)$, is complex differentieerbaar met continue afgeleide. Vanwege Stelling 4.31, met f , resp. U vervangen door g , resp. $U \setminus \{a\}$, is de integraal van g over γ gelijk aan de integraal over γ_r . Het is daarmee voldoende om (4.30) te bewijzen met $\gamma = \gamma_r$.

Schrijf, voor iedere $0 < s \leq r$, $\gamma_s(t) = a + s e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Dan vormen de γ_s een C^1 homotopie in $U \setminus \{a\}$ van gesloten C^1 krommen. Dus, opnieuw vanwege Stelling 4.31, krijgen we voor iedere $0 < s \leq r$ dat

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - a} dz = \int_{\gamma_s} \frac{f(z)}{z - a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(a + s e^{it})}{s e^{it}} s e^{it} i dt = i \int_0^{2\pi} f(a + s e^{it}) dt.$$

Op grond van Stelling 2.5 convergeert het rechterlid naar $i 2\pi f(a)$ als $s \downarrow 0$. Daarmee is aangetoond dat de integraal van g over γ gelijk is aan $i 2\pi f(a)$. $\square$

De formule (4.30) heet *Cauchy's integraalformule* voor complex differentieerbare functies. Zij is zeer opmerkelijk, omdat zij de waarde van de functie f in een gegeven punt a geeft in termen van de waarden van f langs een willekeurige kromme γ die in $U \setminus \{a\}$ homotoop is met een kleine cirkel om het punt a . Deze kromme gaat niet door het punt a en kan zelfs ver van het punt a af liggen.

Gevolg 4.34 Zij $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ complex differentieerbaar met continue afgeleide. Neem aan dat $f(z) \rightarrow 0$ als $|z| \rightarrow \infty$, in de zin dat er bij iedere $\epsilon > 0$ een $R = R(\epsilon) > 0$ is met de eigenschap dat voor iedere $z \in \mathbb{C}$ met $|z| \geq R$ geldt dat $|f(z)| \leq \epsilon$. Dan geldt voor iedere $a \in \mathbb{C}$ dat $f(a) = 0$.

Bewijs Vanwege Cauchy's integraalformule (4.30) met $\gamma = \gamma_r$ geldt voor iedere $r > 0$ dat

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + r e^{it}) dt.$$

Met behulp van l) en h) in Lemma 4.4 zien we dat

$$|a + r e^{it}| \geq |r e^{it}| - |a| = r - |a|,$$

dus als $r \geq R(\epsilon) + |a|$, dan is de absolute waarde van de f -waarden in de integrand kleiner of gelijk aan ϵ . Op grond van (4.26) volgt hieruit dat $|f(a)| \leq \epsilon$. Omdat dit geldt voor iedere $\epsilon > 0$, is de conclusie dat $f(a) = 0$. $\square$

Bewijs van Stelling 4.7

Bewijs We geven een bewijs uit het ongerijmde, dus we nemen aan dat voor iedere $z \in \mathbb{C}$ geldt dat $p(z) \neq 0$ en leiden daaruit een tegenspraak af.

De aanname impliceert dat de functie $f := 1/p$ (willekeurig vaak) complex differentieerbaar is op $\mathbb{C}$. We gaan aantonen dat $f(z) \rightarrow 0$ als $|z| \rightarrow \infty$. Dit impliceert dan op grond van Gevolg 4.34 dat de functie f identiek gelijk aan nul is, hetgeen de gewenste tegenspraak oplevert.

Om te bewijzen dat $f(z) \rightarrow 0$ als $|z| \rightarrow \infty$ schrijven we

$$p(z) = \sum_{i=0}^n c_i z^i, \quad \text{met } n \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ en } c_n \neq 0.$$

Dit impliceert, gebruikmakend van h), k) en l) in Lemma 4.4,

$$|p(z)| \geq |c_n z^n| - \left| \sum_{i=0}^{n-1} c_i z^i \right| \geq |c_n| |z|^n - \sum_{i=0}^{n-1} |c_i| |z|^i = |z|^n \left(|c_n| - \sum_{i=0}^{n-1} |c_i| |z|^{i-n} \right).$$

Merk op dat hierin $i - n < 0$ als $0 \leq i \leq n-1$, dus

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} |c_i| r^{i-n} = 0.$$

Dit impliceert dat er een R_0 te vinden is met de eigenschap dat als $|z| \geq R_0$, dan is

$$\sum_{i=0}^{n-1} |c_i| |z|^{i-n} \leq \frac{|c_n|}{2},$$

en daarmee

$$|p(z)| \geq |z|^n \frac{|c_n|}{2}, \quad \text{dus} \quad |f(z)| \leq \frac{2}{|c_n|} |z|^{-n} \quad \text{als} \quad |z| \geq R_0.$$

Hieruit volgt dat $f(z) \rightarrow 0$ als $|z| \rightarrow \infty$. □

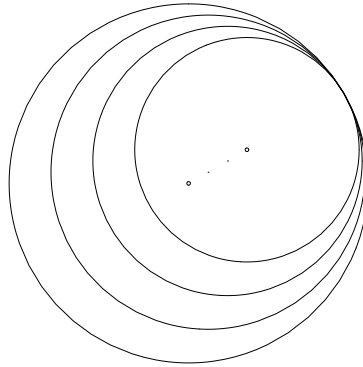
Ter voorbereiding van een regulariteitsstelling beginnen we met een eenvoudig lemma.

Lemma 4.35 *Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{C}$ en $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ complex differentieerbaar met continue afgeleide. Zij $a \in U$ en zij $r > 0$ zodanig dat $\overline{B}(a; r) \subset U$. Schrijf $\gamma_r(t) = a + r e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Dan geldt:*

$$\zeta \in \mathbb{C}, |\zeta - a| < r \implies f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz. \quad (4.31)$$

Bewijs Definieer

$$\gamma_{r,s}(t) := a + s(\zeta - a) + (r - s|\zeta - a|) e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$



$$\gamma_{r,s} \text{ voor } a = 0, r = 1, \zeta = \frac{3}{8} e^{i\pi/6}, s = 0, 1/3, 2/3, 1.$$

De $\gamma_{r,s}$, $s \in [0, 1]$ definiëren een C^1 homotopie van gesloten C^1 krommen in $\mathbb{C}$, $\gamma_{r,0} = \gamma_r$, terwijl $\gamma_{r,1}$ de cirkel is met middelpunt ζ en straal gelijk aan $r - |\zeta - a| > 0$. Verder geldt voor iedere $0 \leq s \leq 1$ dat $r - s|\zeta - a| > 0$, dus

$$|\gamma_{r,s}(t) - a| = |s(\zeta - a) + (r - s|\zeta - a|) e^{it}| \leq s|\zeta - a| + (r - s|\zeta - a|) = r,$$

hetgeen impliceert dat $\gamma_{r,s}(t) \in U$. Anderzijds is, op grond van 1) in Lemma 4.4,

$$|\gamma_{r,s}(t) - \zeta| \geq (r - s|\zeta - a|) - (1 - s)|\zeta - a| = r - |\zeta - a| > 0.$$

Daarmee is $\gamma_{r,s}$, $s \in [0, 1]$ een C^1 homotopie in $U \setminus \{\zeta\}$ en de conclusie van het lemma volgt nu uit Stelling 4.33 met a vervangen door ζ . □

Lemma 4.36 Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{C}$. Zij $a \in U$, $r > 0$ en $\overline{B}(a; r) \subset U$. Zij $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ een continue functie waarvoor (4.31) geldt. Zij $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dan is f k keer complex differentieerbaar in $B(a; r)$ en, met de notaties uit Lemma 4.35,

$$f^{(k)}(\zeta) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z - \zeta)^{k+1}} dz, \quad |\zeta - a| < r. \quad (4.32)$$

Bewijs We geven een bewijs met inductie naar k . Merk op dat (4.32) geldt als $k = 0$.

Neem nu aan dat (4.32) geldt. Uitschrijven van de complexe lijnintegraal geeft

$$f^{(k)}(\zeta) = \frac{k!}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma_r(t))}{(\gamma_r(t) - \zeta)^{k+1}} \gamma_r'(t) dt.$$

De enige afhankelijkheid van ζ in de integrand zit in de factor $1/(\gamma_r(t) - \zeta)$, hetgeen een complex differentieerbare functie is van ζ , met afgeleide gelijk aan

$$\frac{d}{d\zeta} \frac{1}{(\gamma_r(t) - \zeta)^{k+1}} = \frac{k+1}{(\gamma_r(t) - \zeta)^{k+2}}.$$

Toepassing van Stelling 2.11 op de partiële afgeleiden van de integraal naar de variabelen $\operatorname{Re} \zeta$ en $\operatorname{Im} \zeta$ geeft dat de functie $f^{(k)}$ totaal differentieerbaar is, met partiële afgeleiden gelijk aan de integraal van de corresponderende partiële afgeleiden van de integrand. Omdat de partiële afgeleiden van de integrand voldoen aan de Cauchy-Riemann-vergelijkingen (4.23), voldoen de integralen van deze partiële afgeleiden ook aan de Cauchy-Riemann-vergelijkingen. De conclusie is dat $f^{(k)}$ complex differentieerbaar is, met afgeleide gelijk aan (4.32), met k vervangen door $k+1$. $\square$

Combinatie van Lemma 4.35 met Lemma 4.36 leidt tot de volgende *regulariteitsstelling voor complex differentieerbare functies*.

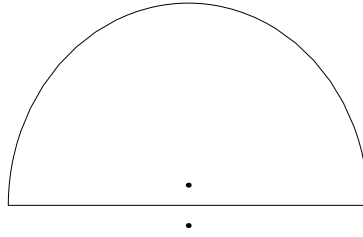
Stelling 4.37 Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{C}$ en zij $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ complex differentieerbaar met continue afgeleide. Dan is f willekeurig vaak complex differentieerbaar en de afgeleiden van f kunnen uitgedrukt worden in termen van f door middel van de formule (4.32).

Opmerking 4.38 De stelling van Goursat zegt dat in Stelling 4.37 de zinsnede ‘met continue afgeleide’ weggelaten kan worden. Zie de vraagstukken 4.48, 4.49, 4.50 voor een bewijs. $\oslash$

Voorbeeld 4.39 Tot nu toe hebben we Cauchy’s integraalformule voornamelijk op theoretische kwesties toegepast, zoals de hoofdstelling van de algebra en de regulariteitsstelling 4.37. Men kan er echter ook allerlei concrete integralen mee uitrekenen, in het bijzonder in gevallen waarbij we geen primitieve van de integrand tot onze beschikking hebben. Als voorbeeld behandelen we de oneigenlijke integraal

$$I(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\xi}}{x^2 + 1} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x\xi)}{x^2 + 1} dx.$$

De tweede identiteit hierin geldt omdat $\sigma(-x) = -\sigma(x)$ als $\sigma(x) = \sin(x\xi)/(x^2 + 1)$, dus de integraal van σ over de reële as is gelijk aan nul. De tweede identiteit laat ook zien dat $I(\xi) = I(|\xi|)$.



De integratieweg.

Omdat $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$, is de integrand van de vorm $f(x) = g(x)/(x - i)$, waarin

$$f(x) := \frac{e^{ix|\xi|}}{x^2 + 1} \quad \text{en} \quad g(x) := \frac{e^{ix|\xi|}}{x + i}.$$

Merk op dat g (willekeurig vaak) complex differentieerbaar is op $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$.

Beschouw, voor $r > 1$, de gesloten keten α_r van C^1 krommen in het complexe vlak die bestaat uit $\beta_r(x) = x$, $x \in [-r, r]$, gevolgd door $\gamma_r(t) = r e^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Zij δ een cirkel met middelpunt i en kleine straal. Door radieel samentrekken naar het punt i zien we dat α_r homotoop in $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ is met δ . Een toepassing van Stelling 4.33, met f vervangen door g en $a = i$, geeft dat

$$\pi e^{-|\xi|} = 2\pi i g(i) = \int_{\alpha_r} \frac{g(z)}{z - i} dz = \int_{-r}^r f(x) dx + \int_{\gamma_r} f(z) dz.$$

Nu betekent $z \in \gamma_r([0, \pi])$ dat $\text{Im } z \geq 0$ en $|z| = r$, dus

$$\begin{aligned} \left| e^{iz|\xi|} \right| &= e^{-\text{Im } z |\xi|} \leq 1 \quad \text{en} \\ |z^2 + 1| &\geq |z^2| - 1 = |z|^2 - 1 = r^2 - 1, \end{aligned}$$

waarbij in de tweede ongelijkheid 1) in Lemma 4.4 is gebruikt. Dit leidt met behulp van (4.26) tot de schatting

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z) dz \right| \leq \frac{\pi r}{r^2 - 1}.$$

Omdat het rechterlid naar nul convergeert als $r \rightarrow \infty$, is de conclusie dat

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \frac{e^{ix\xi}}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-|\xi|}, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (4.33)$$

◊

4.6 Vraagstukken bij Hoofdstuk 4

Vraagstuk 4.1 Schrijf in de vorm $a + bi$ met reële a en b :

$$(2 + i\sqrt{3})^2, \quad \frac{3 + 4i}{5 - i}.$$

⊗

Vraagstuk 4.2 Bereken absolute waarde en argument van

$$(1 - i\sqrt{3})^2, \quad \frac{1}{1 + i}, \quad \frac{1 + i}{1 - i},$$

zonder deze getallen eerst in de vorm $a + bi$ te schrijven.

⊗

Vraagstuk 4.3 Teken een punt z op de eenheidscirkel in het complexe vlak. Geef vervolgens de ligging aan van de punten z^2 , z^3 , z^{-1} , $\bar{z}$, $-z$, iz en $i\bar{z}$. Ga in de figuur na dat $z + \frac{1}{z}$ reëel is en geef van deze bewering ook een rechtstreeks bewijs.

⊗

Vraagstuk 4.4 Bewijs Lemma 4.4.

⊗

Vraagstuk 4.5 Bewijs:

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}),$$

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2.$$

Geef van de laatste eigenschap een meetkundige interpretatie in termen van zijden en diagonalen van een parallellogram.

⊗

Vraagstuk 4.6 Zij $p(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0$ met reële c_i .

Bewijs: $\overline{p(z)} = p(\bar{z})$. Bewijs: Als a een nulpunt is van p , dan is $\bar{a}$ ook een nulpunt van p .

⊗

Vraagstuk 4.7 Bereken alle $z \in \mathbb{C}$ waarvoor

a) $z^4 = i$,

b) $z^8 - 2z^4 = -1$,

c) $z^4 - 2z^2 + 2 = 0$.

⊗

Vraagstuk 4.8 Zij $z \in \mathbb{C}$ met $z \neq -1$. Bewijs:

$$|z| < 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) < 0.$$

Zij $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ de open cirkelschijf met middelpunt in de oorsprong en straal gelijk aan 1. Zij $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0\}$ het complexe linker halfvlak. Bewijs dat de gebroken lineaire transformatie $z \mapsto (z-1)/(z+1)$ een bijectieve afbeelding van D naar H definieert.

⊗

Vraagstuk 4.9 Zij T de complexe eenheidscirkel $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

a) Bepaal $\varphi(\mathbf{T} \setminus \{1\})$ als $\varphi(z) = \frac{1}{z-1}$.

b) Bepaal $\phi(\mathbf{T})$ als $\varphi(z) = \frac{z^2-z+1}{2z}$.

c) Bepaal $\varphi(\mathbb{R})$ als $\varphi(x) = \frac{x-i}{x+i}$.

Bewijs ook dat de gevonden verzamelingen de juiste zijn.

⊗

Vraagstuk 4.10 Geef formules die $\sin 6t$ en $\cos 6t$ uitdrukken in $\sin t$ en $\cos t$.

⊗

Vraagstuk 4.11 Geef formules die $(\sin t)^4$ en $(\cos t)^4$ uitdrukken in $\sin(kt)$ en $\cos(kt)$ voor $1 \leq k \leq 4$.

⊗

Vraagstuk 4.12 Geef een formule voor

$$\frac{i^{4\alpha} - 1}{2i e^{\pi i \alpha}}$$

waaruit blijkt dat dit getal voor reële α reëel is. (Hierbij is $\arg i = \pi/2$.)

⊗

Vraagstuk 4.13

a) Bereken $\sum_{k=1}^n e^{ikx}$, bijvoorbeeld door gebruik te maken van (4.9) met $w = 1$.

b) Bewijs hiermee dat

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin \frac{1}{2}nx \cos \frac{1}{2}(n+1)x}{\sin \frac{1}{2}x}$$

als x geen geheel veelvoud is van 2π .

c) Wat vindt u voor $x = 2N\pi$, $N \in \mathbb{Z}$?

d) Vind zelf een analoge formule voor $\sum_{k=1}^n \sin kx$.

⊗

Vraagstuk 4.14 Schrijf de volgende getallen in de vorm $r e^{i\theta}$, met $r \geq 0$, $\theta \in]-\pi, \pi]$:
 $1-i$, 527 , -527 , $\sqrt{3}-i$, $3i+4$.

⊗

Vraagstuk 4.15 Bepaal reëel en imaginair deel van $e^{\pi i}$, $e^{2\pi i}$, $e^{-\pi i/4}$, $e^{1993\pi i}$, e^i .

⊗

Vraagstuk 4.16

a) Schrijf $1+i$ in poolcoördinaten.

b) Bepaal het reële en het imaginaire deel van $(1+i)^{86}$.

c) Bepaal het reële en het imaginaire deel van $(i-\sqrt{3})^{19}$.

d) Geef alle $z \in \mathbb{C}$ die voldoen aan $z^3 = i$.

e) Geef ook alle $z \in \mathbb{C}$ die voldoen aan $z^7 = 128$.

f) Schets de oplossingsverzamelingen van de vergelijkingen in d) en e).

⊗

Vraagstuk 4.17 Bepaal $\lim_{x \in \mathbb{R}, x \rightarrow 0} e^{-1/x^2}$. Bewijs dat $\lim_{z \in \mathbb{C}, z \rightarrow 0} e^{-1/z^2}$ niet bestaat.

⊗

Vraagstuk 4.18 Zij U een samenhangende open deelverzameling van $\mathbb{C}$ en $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ een reëelwaardige functie op U . Bewijs dat f alleen maar complex differentieerbaar kan zijn als f constant is.

⊗

Vraagstuk 4.19 Zij U een samenhangende open deelverzameling van $\mathbb{C}$ en $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ complex differentieerbaar. Neem aan dat $|f|$ constant is.

a) Bewijs dat

$$D_j f \cdot \overline{f} + f \cdot \overline{D_j f} = D_j f \cdot \overline{f} + f \cdot \overline{D_j f} = 0, \quad j = 1, 2$$

en gebruik de Cauchy-Riemann-vergelijking om hiermee aan te tonen dat $D_j f \cdot \overline{f} = 0$, $j = 1, 2$.

b) Bewijs dat f constant is. Hint: als f een nulpunt heeft, wat is dan $|f|$?

c) Gebruik b) om in te zien dat de functie $z \mapsto \overline{z}/z$ geen complex differentieerbare functie is op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

⊗

Vraagstuk 4.20 We bekijken de functie $q : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeven door $q(z) = \overline{z}/z$. Substitueer $z = r e^{i\theta}$ met $r > 0$ en $\theta \in \mathbb{R}$ en onderzoek het limietgedrag van $q(z)$ als we θ vasthouden en $r \downarrow 0$ laten gaan. Wat voor complexe getallen kunnen als waarde van de limiet optreden? Concludeer dat $z \mapsto \overline{z}$ niet complex differentieerbaar is in het punt 0.

⊗

Vraagstuk 4.21 Zij $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ en definieer $f(z) = (a x + c y) + i(b x + d y)$ als $z = x + i y$, $x, y \in \mathbb{R}$. Definieer, voor $z \neq 0$, $q(z) := f(z)/z$.

Bewijs dat voor iedere $t > 0$ geldt dat $q(t z) = q(z)$. Bewijs dat als $p \in \mathbb{C}$ en $q(z) \rightarrow p$ als $z \rightarrow 0$, dan geldt voor iedere $z \in \mathbb{C}$ dat $q(z) = p$. Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

a) f is complex differentieerbaar in het punt 0.

b) $q(z)$ convergeert als $z \rightarrow 0$.

c) $q(1) = q(i)$.

d) $c = -b$ en $d = a$.

e) Voor iedere $z \in \mathbb{C}$ geldt dat $f(z) = (a + i b) z$.

Hint: bewijs a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d) $\Rightarrow$ e) $\Rightarrow$ a).

⊗

Vraagstuk 4.22

- a) Bewijs dat de afbeeldingen $z \mapsto \operatorname{Re} z$, $z \mapsto \operatorname{Im} z$, $z \mapsto |z|$ in geen enkel punt z complex differentieerbaar zijn.
- b) Onderzoek de totale en de complexe differentieerbaarheid van de functies $z \mapsto |z|^2$ en $z \mapsto (\bar{z})^2$.

⊗

Vraagstuk 4.23

- a) Gegeven is een complex differentieerbare functie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Schrijf $f = f_1 + i f_2$, met f_1, f_2 reëelwaardig. Toon aan dat voor alle $a \in \mathbb{C}$ geldt:

$$\operatorname{grad} f_1(a) \perp \operatorname{grad} f_2(a).$$

Wat vermoedt u op grond van deze vergelijking voor de niveaukrommen van f_1 en f_2 ?

- b) Schets de niveaukrommen van f_1 en f_2 als $f(z) = z^2$. Controleer uw vermoeden voor deze f .

⊗

Vraagstuk 4.24 Voor $z \in \mathbb{C}$ definieert men de *complexe cosinus*, resp. *complexe sinus* als

$$\cos z := \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) \quad \text{en} \quad \sin z := \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}).$$

Analoog de *complexe cosinushyperbolicus*, resp. *complexe sinushyperbolicus* door middel van

$$\cosh z := \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}), \quad \text{resp.} \quad \sinh z := \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}).$$

Bewijs dat deze functies uitbreidingen tot $\mathbb{C}$ zijn van de bekende functies met deze naam op $\mathbb{R}$. Bewijs dat al deze functies complex differentieerbaar zijn en voldoen aan de differentiaalvergelijkingen

$$\sin' z = \cos z \quad \text{en} \quad \cos' z = -\sin z,$$

$$\cosh' z = \sinh z \quad \text{en} \quad \sinh' z = \cosh z.$$

⊗

Vraagstuk 4.25 Voor de complexe sinusfunctie uit Vraagstuk 4.24, bewijs dat voor iedere $z, z' \in \mathbb{C}$ geldt dat $\sin z = \sin z'$, dan en slechts dan als er een geheel getal k is waarvoor $z' = z + k\pi$.

⊗

Vraagstuk 4.26 We gaan de vergelijking $\sin z = 2$ oplossen, waarbij we de complexe sinusfunctie uit Vraagstuk 4.24 gebruiken. Bewijs dat de substitutie $e^{iz} = w$ leidt tot de equivalente vergelijking $w - 1/w = 4i$ en los deze op. Bepaal vervolgens alle $z \in \mathbb{C}$ waarvoor $\sin z = 2$.

⊗

Vraagstuk 4.27 In dit vraagstuk gebruiken we de standaardkeuze voor de hoekfunctie en de bijbehorende complexe logaritme.

- a) Bepaal constanten A en B , zó dat $\frac{1}{x^2+1} = \frac{A}{x+i} + \frac{B}{x-i}$ (breuksplitsen).

- b) Bewijs met behulp van onderdeel a) dat $\frac{1}{2i}(\log(x-i) - \log(x+i))$ een primitieve is van $\frac{1}{x^2+1}$, voor $x \in \mathbb{R}$.
- c) Bewijs dat $\frac{1}{2}(\arg(x-i) - \arg(x+i))$ een primitieve is van $\frac{1}{x^2+1}$, voor $x \in \mathbb{R}$.
- d) Bewijs dat $\arg(x+i) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ en $\arg(x-i) = -\arg(x+i)$ voor $x \in \mathbb{R}$.
- e) Leid uit het voorgaande af dat $\arctan x$ een primitieve is van $\frac{1}{x^2+1}$.

⊗

Vraagstuk 4.28 Bepaal alle complexe z die voldoen aan:

- a) $e^z = 1 + i$,
- b) $\cosh z = i$.

⊗

Vraagstuk 4.29 Bepaal, met de standaardkeuze voor het argument:

$\log i$, $\log(1+i)$, $\log(1-i\sqrt{3})$, $\log e^{-2\pi i/3}$ en $\log e^{-4\pi i/3}$.

⊗

Vraagstuk 4.30 Bepaal, met de standaardkeuze voor het argument, alle complexe z die voldoen aan:

- a) $z^i = i$,
- b) $i^z = i$.

⊗

Vraagstuk 4.31 Bereken, met de standaardkeuze voor het argument, $(e^{5i})^i$.

⊗

Vraagstuk 4.32 Bewijs:

- a) $|z^w| = z^{\operatorname{Re} w}$ als $z \in \mathbb{R}$, $z > 0$.
- b) $|z^w| = |z|^w$ als $w \in \mathbb{R}$.

⊗

Vraagstuk 4.33 Formuleer en bewijs het analogon van Lemma 3.6 voor complexe lijnintegralen. ⊗

Vraagstuk 4.34

- a) Bepaal de integraal

$$\int_{\gamma} (z^2 + 2z - 1) dz,$$

als $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ gegeven wordt door $\gamma(t) = (1-t)e^t + it$.

- b) Zij p een complexe veelterm. Toon aan dat voor iedere gesloten keten γ van C^1 krommen in $\mathbb{C}$ geldt:

$$\int_{\gamma} p(z) dz = 0,$$

zonder gebruik te maken van de integraalstelling van Cauchy.

⊗

Vraagstuk 4.35 Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{C}$ en zij f en g twee complex differentieerbare functies op U met continue afgeleiden. Zij $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ een C^1 kromme in U , met $\gamma(a) = p$ en $\gamma(b) = q$. Bewijs dat

$$\int_{\gamma} f'(z) g(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) g'(z) dz + f(q) g(q) - f(p) g(p).$$

Hint: beschouw de complexe lijnintegraal $\int_{\gamma} (f g)'(z) dz$.

⊗

Vraagstuk 4.36 Bereken de integraal:

$$\int_0^{\pi} e^{it} (t + i)^2 dt.$$

Hint: zie Vraagstuk 4.35.

⊗

Vraagstuk 4.37 Zij $U \subset \mathbb{C}$ open. Gegeven is een functie $\varphi : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ met de eigenschap dat voor iedere $t \in [a, b]$ de functie $z \mapsto \varphi(z, t)$ complex differentieerbaar is op U . De complexe afgeleide van deze functie noteren we met $\frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z}$. We veronderstellen bovendien dat $(z, t) \mapsto \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z}$ continu is op $U \times [a, b]$. Tenslotte nemen we aan dat voor iedere $z \in U$ de functie $t \mapsto \varphi(z, t)$ Riemann-integreerbaar is over $[a, b]$.

Toon aan dat de functie $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ gedefinieerd door

$$g(z) = \int_a^b \varphi(z, t) dt$$

complex differentieerbaar is met als complexe afgeleide:

$$g'(z) = \int_a^b \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial z} dt.$$

Hint: gebruik de Cauchy-Riemann-vergelijkingen.

Bewijs ook dat $g' : U \rightarrow \mathbb{C}$ continu is.

⊗

Vraagstuk 4.38 Zij U een open stervormige deelverzameling van $\mathbb{C}$ met centrum p . Gegeven is een complex differentieerbare C^1 -functie $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ met continue afgeleide. Voor ieder punt $z \in U$ definiëren we de kromme $\gamma_z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ door $\gamma_z(t) = p + t(z - p)$. We definiëren de functie $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ door

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w) dw.$$

a) Toon aan dat de functie F complex differentieerbaar is. Hint: herschrijf de integraal voor F zo dat het vorige vraagstuk toepasbaar wordt.

b) Toon aan dat $F'(z) = f(z)$ voor alle $z \in U$.

Hint: gebruik dat $f'(p + t(z - p))(z - p) = df(p + t(z - p))/dt$.

⊗

Vraagstuk 4.39 Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{C}$ en $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ complex differentieerbaar met continue afgeleide.

- a) Gebruik Stelling 4.30 met $\gamma = \gamma_r$ en (4.26) om aan te tonen dat

$$|f(a)| \leq \max_{|z-a|=r} |f(z)| \quad \text{als} \quad \overline{B}(a; r) \subset U.$$

- b) Neem aan dat $|f|$ een lokaal maximum heeft in het punt a . Bewijs dat $|f|$ constant in een omgeving van a . Gebruik vervolgens Vraagstuk 4.19 om te bewijzen dat f constant in een omgeving van a .

- c) Neem aan dat U samenhangend is en dat $|f|$ zijn maximum aanneemt in het punt $a \in U$. Definieer A als de verzameling van alle $z \in U$ waarvoor $|f(z)| = |f(a)|$. Zij B de verzameling der $z \in U$ waarvoor $|f(z)| < |f(a)|$. Bewijs dat A en B open zijn, $A \cap B = \emptyset$ en $A \cup B = U$. Bewijs dat $B = \emptyset$. Bewijs dat de functie f constant is.

⊗

Vraagstuk 4.40 Zij $\eta \in \mathbb{R}$ en $r > 0$. Beschouw de gesloten keten γ in $\mathbb{C}$ bestaande uit $\gamma_1(t) = t$, $t \in [-r, r]$, gevolgd door $\gamma_2(t) = r + i t \eta$, $t \in [0, 1]$, gevolgd door $\gamma_3(t) = -t + i \eta$, $t \in [-r, r]$, gevolgd door $\gamma_4(t) = -r - i t \eta$, $t \in [-1, 0]$.

- a) Bewijs dat

$$\int_{\gamma} e^{-z^2/2} dz = 0.$$

- b) Bewijs dat de integralen over γ_2 en over γ_4 naar nul convergeren als $r \rightarrow \infty$.

- c) Bewijs dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i\eta)^2/2} dx.$$

Het linkerlid is hierbij gelijk aan $\sqrt{2\pi}$, zie Vraagstuk 2.7 voor een bewijs.

- d) Bewijs dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \cos(x \eta) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-i x \eta} dx = \sqrt{2\pi} e^{-\eta^2/2}.$$

⊗

Vraagstuk 4.41 Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{C}$ en zij $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ complex differentieerbaar met continue afgeleide. Zij $a \in U$, $r > 0$ en $\overline{B}(a; r) \subset U$. Bewijs dat

$$\frac{1}{k!} |f^{(k)}(a)| \leq r^{-k} \sup_{|z-a|=r} |f(z)|.$$

Hint: gebruik (4.32) voor $\zeta = a$ en (4.26).

Stel nu dat $U = \mathbb{C}$ en dat $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Veronderstel verder dat $|f(z)|/|z|^k$ naar 0 convergeert als $|z| \rightarrow \infty$. Dit betekent: bij iedere $\epsilon > 0$ is er een $R > 0$ met de eigenschap dat als $z \in \mathbb{C}$ en $|z| > R$,

dan geldt dat $|f(z)| \leq \epsilon |z|^k$. Bewijs dat voor iedere $z \in \mathbb{C}$ geldt dat $f^{(k)}(z) = 0$. Bewijs dat f een complexe veeltermfunctie is van de graad $\leq k - 1$.

Vergelijk dit resultaat met Gevolg 4.34. $\otimes$

Vraagstuk 4.42 Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{C}$ en zij $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ complex differentieerbaar met continue afgeleide. Stelling 4.37 zegt dat dit impliceert dat f willekeurig vaak complex differentieerbaar is. Zij $a \in U$ en definieer

$$g(z) := \int_0^1 f'(a + t(z - a)) dt, \quad z \in U.$$

a) Bewijs dat $f(z) - f(a) = g(z)(z - a)$ voor iedere $z \in U$. Gebruik Vraagstuk 4.37 om aan te tonen dat $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ complex differentieerbaar is met continue afgeleide.

b) Zij γ een gesloten C^1 kromme in $U \setminus \{a\}$ die samentrekbaar is in U . Bewijs dat

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz = f(a) W_a(\gamma).$$

Hierin is $W_a(\gamma)$ het windingsgetal van γ om het punt a , zie (4.28).

Hint: pas Cauchy's integraalstelling toe op de functie g . $\otimes$

Vraagstuk 4.43 Zij p een complexe veeltermfunctie van de graad n , zij V het complement in $\mathbb{C}$ van de nulpunten van p en zij γ een gesloten C^1 kromme in V .

a) Bewijs, met de notatie van Gevolg 4.8, dat

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{z - a_j}, \quad z \in V.$$

b) Bewijs dat

$$\sum_{j=1}^n W_{a_j}(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{p'(z)}{p(z)} dz.$$

c) Zij U open in $\mathbb{C}$, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ complex differentieerbaar met continue afgeleide en neem aan γ een gesloten C^1 kromme in $V \cap U$ is, die samentrekbaar is in U . Gebruik Vraagstuk 4.42 om aan te tonen dat

$$\sum_{j=1}^n W_{a_j}(\gamma) f(a_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) p'(z)}{p(z)} dz.$$

Merk op dat er onder de a_j gelijken kunnen voorkomen, dus in de sommen in a), b), c) komt ieder nulpunt van p met zijn multipliciteit vaak voor. $\otimes$

Vraagstuk 4.44 Gegeven is een complexe veeltermfunctie p van de graad $n \geq 1$. Schrijf $\gamma_r(t) = r e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

a) Toon aan dat er constanten $C > 0$ en $R > 0$ bestaan waarvoor geldt:

$$r \geq R \implies \left| \int_{\gamma_r} \frac{1}{p(z)} dz \right| \leq C r^{1-n}.$$

b) Onderstel dat $n \geq 2$. Toon aan dat er een constante $R > 0$ bestaat waarvoor geldt:

$$r \geq R \implies \int_{\gamma_r} \frac{1}{p(z)} dz = 0.$$

c) Zij $p(z) = az + b$, met $a \neq 0$. Toon aan dat er een $R > 0$ bestaat waarvoor geldt:

$$r \geq R \implies \int_{\gamma_r} \frac{1}{p(z)} dz = \frac{2\pi i}{a}.$$

⊗

Vraagstuk 4.45 Zij $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Gegeven zijn n onderling verschillende complexe getallen α_j , $1 \leq j \leq n$. We beschouwen de complexe veeltermfunctie

$$p(z) = \prod_{j=1}^n (z - \alpha_j).$$

a) Toon aan dat voor iedere $1 \leq k \leq n$ geldt:

$$p'(\alpha_k) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (\alpha_k - \alpha_j) \neq 0.$$

b) Bewijs dat

$$q(z) := \sum_{k=1}^n \frac{1}{p'(\alpha_k)} \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq k}} (z - \alpha_j) = 1.$$

Hint: $q(z) - 1$ is een veelterm van de graad $< n$ en voor iedere $1 \leq j \leq n$ geldt dat $q(\alpha_j) - 1 = 0$.

Bewijs vervolgens dat

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{p'(\alpha_k)} \frac{1}{z - \alpha_k} = \frac{1}{p(z)}.$$

c) Zij γ een gesloten C^1 kromme in $\mathbb{C}$ die door geen van de nulpunten van p loopt. Bewijs dat

$$\sum_{k=1}^n W_{\alpha_k}(\gamma) \frac{1}{p'(\alpha_k)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{p(z)} dz.$$

Men zou ook kunnen proberen om c) in Vraagstuk 4.43 toe te passen met $f = p'$. Men wordt dan geconfronteerd met de voorwaarde dat γ samentrekbaar moet zijn in het complement van de nulpunten van p' . Dit vraagstuk laat zien dat deze voorwaarde irrelevant is. ⊗

Vraagstuk 4.46 Zij $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Pas Vraagstuk 4.45 toe met $p(z) = z^{2k} + 1$ en γ gelijk aan de gesloten keten bestaande uit $\alpha(t) = t, t \in [-r, r]$, gevolgd door $\beta(t) = r e^{it}, t \in [0, \pi]$, waarbij we aannemen dat $r > 1$. Bewijs, door de limiet te nemen voor $r \rightarrow \infty$, dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^{2k} + 1} dx = \frac{\pi}{k \sin(\frac{\pi}{2k})}.$$

⊗

Vraagstuk 4.47 Zij $a \in \mathbb{C}$. Men zegt dat f een *pool van de orde* $\leq p_a$ in a heeft als er een open omgeving V van a in $\mathbb{C}$ is waarvoor

$$f(z) = \sum_{k=1}^{p_a} c_{a,k} (z-a)^{-k} + g_a(z), \quad z \in V \setminus \{a\}, \quad (4.34)$$

waarin $c_{a,k} \in \mathbb{C}$ en $g_a : V \rightarrow \mathbb{C}$ complex differentieerbaar is met continue afgeleide. De coëfficiënt $c_{a,1}$ van $1/(z-a)$ heet het *residu* $\text{Res}_a(f)$ van f in het punt a .

Neem nu aan; U is een open deelverzameling van $\mathbb{C}$, A is een eindige deelverzameling van U , $f : U \setminus A \rightarrow \mathbb{C}$ is complex differentieerbaar met continue afgeleide en voor iedere $a \in A$ heeft f een pool in het punt a van de orde $\leq p_a$.

a) Bewijs: de functie

$$h(z) := f(z) - \sum_{a \in A} \sum_{k=1}^{p_a} c_{a,k} (z-a)^{-k},$$

gedefinieerd op $U \setminus A$, is uit te breiden tot een complex differentieerbare functie met continue afgeleide op U .

b) Zij γ een gesloten C^1 kromme in $U \setminus A$ die samentrekbaar is in U . Bewijs de *residuformule*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a \in A} W_a(\gamma) \text{Res}_a(f).$$

Vraagstuk 4.43, resp. 4.45 zijn hiervan speciale gevallen. Het meeste werk was het daar om aan te tonen dat p'/p , resp. $1/p$ polen van de orde ≤ 1 heeft in de nulpunten van p en om de residuen te bepalen. Voor een algemene klasse van functies f met polen, zie Vraagstuk 5.15. ⊗

Vraagstuk 4.48 Gegeven is een open deelverzameling U van $\mathbb{C}$ en een punt $a \in U$. Gegeven is voorts een continue functie $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ die complex differentieerbaar is in het punt a . Schrijf $\rho(z) = f(z) - f(a) - f'(a)(z-a)$. Zij γ een gesloten keten van C^1 krommen in U .

a) Bewijs, zonder de integraalstelling van Cauchy te gebruiken, dat

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \rho(z) dz.$$

b) Toon aan dat er voor iedere $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat, zodanig dat voor alle $z \in \mathbb{C}$ met $|z-a| \leq \delta$ geldt: $|\rho(z)| \leq \epsilon|z-a|$.

- c) Laten $\epsilon > 0$ en $\delta > 0$ als boven zijn. Zij γ een gesloten keten van C^1 krommen in $\mathbb{C}$, met de eigenschap dat $|\gamma(t) - a| \leq \delta$ voor iedere t . Bewijs dat

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \epsilon \delta l(\gamma),$$

waarin $l(\gamma)$ de lengte van γ voorstelt. Neem nu aan dat $a \in V \subset U$, waarin V een gesloten vierkant is met zijden ter lengte h . Bewijs dat als γ de rand van V éénmaal linksom doorloopt, dan is

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \epsilon 4\sqrt{2} h^2.$$

◊

Vraagstuk 4.49 Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{C}$ en $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ complex differentieerbaar. We veronderstellen *niet* dat de afgeleide van f continu is.

Zij $\mathcal{V}$ de collectie van alle gesloten vierkanten V in $\mathbb{C}$ met zijden parallel aan de coördinaatassen en met $V \subset U$. Voor iedere $V \in \mathcal{V}$ definiëren we het complexe getal $I(V)$ door

$$I(V) = \int_{\partial V} f(z) dz,$$

waarin ∂V de gesloten keten voorstelt die de rand van V éénmaal linksom doorloopt. Met $l(V)$ geven we de lengte van de zijden van V aan.

- a) Toon aan dat er voor iedere $V \in \mathcal{V}$ een $V' \in \mathcal{V}$ bestaat, waarvoor $V' \subset V$, $l(V') = l(V)/2$ en $|I(V')| \geq |I(V)|/4$.

Hint: verdeel V op een voor de hand liggende manier in vier gelijke stukken. Schrijf de integraal over de rand van V als som van de integralen over de deelvierkanten. Gebruik, om aan te tonen dat dit mag, dat als een zijde van een deelvierkant éénmaal in de ene richting doorlopen wordt en éénmaal in de tegenovergestelde richting, de som van de corresponderende lijnintegralen van f gelijk is aan nul.

- b) In het vervolg nemen we een vaste $V \in \mathcal{V}$. Definieer de V_k , $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ met volledige inductie door middel van $V_0 = V$ en $V_{k+1} = (V_k)'$ als in a) met V vervangen door V_k . Bewijs dat voor iedere k geldt dat

- 1) $V_k \in \mathcal{V}$ en $V_{k+1} \subset V_k$;
- 2) $l(V_k) = l(V)/2^k$;
- 3) $|I(V_k)| \geq |I(V)|/4^k$.

- c) Toon aan dat de doorsnede $\cap_{k=0}^{\infty} V_k$ niet leeg is en uit precies één punt $a \in U$ bestaat.

- d) Toon aan dat er voor elke $\epsilon > 0$ een $k \geq 0$ bestaat waarvoor

$$|I(V_k)| \leq \epsilon 4\sqrt{2} l(V)^2/4^k.$$

Hint: gebruik het laatste onderdeel uit Vraagstuk 4.48.

- e) Toon aan dat $I(V) = 0$.

⊗

Vraagstuk 4.50 Notaties en veronderstellingen zijn precies als in het vorige vraagstuk. We zullen *aantonen* dat de afgeleide van f continu is. Anders gezegd, we gaan een bewijs geven van de stelling van Goursat.

Zij $V \in \mathcal{V}$ en zij a een inwendig punt van V . Zij $d(a, V)$ de afstand van a tot de rand van V . Zij N een geheel getal zodanig dat $2l(V)/N < d$. Verdeel V op ruitjespapiermanier in N^2 aan elkaar sluitende deelvierkantjes, ieder met zijde ter lengte $l(V)/N$. Zij $\mathcal{W}_N$ de collectie van deze deelvierkantjes. Zij R_N de vereniging van alle $W \in \mathcal{W}_N$ waarvoor $a \in W$. R_N is ofwel één der $W \in \mathcal{W}_N$, ofwel een rechthoek, gelijk aan de vereniging van twee tegen elkaar aan liggende $W \in \mathcal{W}_N$, ofwel een vierkant gelijk aan vier van de $W \in \mathcal{W}_N$ met a gelijk aan het middelpunt van R_N . In alle gevallen ligt a in het inwendige van R_N , is de lengte van de rand van R_N kleiner of gelijk aan $8l(V)/N$ en is de maximale afstand van a tot een punt van de rand van R_N kleiner of gelijk aan $\sqrt{2}l(V)/N$. In het vervolg duiden we met ∂V , resp. ∂R_N de gesloten keten aan, die linksom de rand van V , resp R_N doorloopt.

a) Bewijs dat

$$\int_{\partial V} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{\partial R_N} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Hint: beschouw weer een geschikte som van integralen over randen van deelvierkantjes, gebruik makend van het tegen elkaar wegvallen van integralen over zijden die in twee tegengestelde richtingen doorlopen worden.

b) Met $\rho(z)$ als in Vraagstuk 4.48, bewijs dat

$$\int_{\partial R_N} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a) + \int_{\partial R_N} \frac{\rho(z)}{z-a} dz,$$

zonder Stelling 4.30 te gebruiken; Voorbeeld 4.30 is voldoende.

Bewijs ook dat als $\sqrt{2}l(V)/N \leq \delta$, dan is

$$\left| \int_{\partial R_N} \frac{\rho(z)}{z-a} dz \right| \leq \epsilon 8l(V)/N.$$

c) Toon aan, door in b) de limiet te nemen voor $N \rightarrow \infty$, dat

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{f(z)}{z-a} dz, \quad a \in V.$$

d) Gebruik Vraagstuk 4.37 om aan te tonen dat voor iedere $V \in \mathcal{V}$ de beperking van f' tot het inwendige van V continu is. Toon aan dat f' continu is op U .

⊗

5 Reeksen van Functies

5.1 Uniforme Convergentie

Met het oog op de latere toepassingen werken we in het vervolg steeds met *complexwaardige* functies.

Definitie 5.1 Zij V een verzameling, $p \in \mathbb{Z}$ en stel dat voor iedere $k \in \mathbb{Z}_{\geq p}$ een complexwaardige functie $f_k : V \rightarrow \mathbb{C}$ gegeven is. Men zegt dat de rij $(f_k)_{k=p}^{\infty}$ *puntsgewijs naar de functie* $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ *convergeert*, als voor iedere $x \in V$ geldt dat

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = g(x).$$

De eenduidigheid van limieten geeft dat voor iedere $x \in V$ het getal $g(x)$ eenduidig is bepaald, dus als f_k ook puntsgewijs naar de functie h convergeert, dan is $h = g$. $\oslash$

De voorwaarde van puntsgewijze convergentie is niet sterk genoeg om veel conclusies over de functie g , zoals continuïteit van g , te kunnen trekken uit de corresponderende eigenschappen van ieder van de functies f_k . Een heel eenvoudig voorbeeld wordt gegeven door

$$f_k(x) = \arctan(kx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Als $x > 0$, resp. $x = 0$, resp. $x < 0$, dan convergeert $f_k(x)$ naar $\pi/2$, resp. 0 , resp. $-\pi/2$. De rij f_k convergeert daarom puntsgewijs naar de functie $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, waarbij de *tekenfunctie* sgn gedefinieerd is door

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x > 0, \\ 0 & \text{als } x = 0, \\ -1 & \text{als } x < 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Het is duidelijk dat $g(x)$ niet continu is in het punt $x = 0$. Anderzijds geldt voor iedere k dat f_k differentieerbaar is in $\mathbb{R}$ en $f_k'(x) = k/(1 + (kx)^2)$. Hieruit lezen we op zijn beurt af dat, voor iedere k , de functie f_k willekeurig vaak differentieerbaar is in $\mathbb{R}$; alle afgeleiden van f_k zijn rationale functies.

Definitie 5.2 Men zegt dat de rij $(f_k)_{k=p}^{\infty}$ van functies in V *uniform naar de functie* g *in* V *convergeert*, als

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in V} |g(x) - f_k(x)| = 0.$$

Uitgeschreven betekent dit:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall x \in V \quad \forall k \geq N \quad |g(x) - f_k(x)| \leq \epsilon.$$

Anders gezegd, het getal N ‘werkt’ voor alle $x \in V$ tegelijk. $\oslash$

Het is duidelijk dat uniforme convergentie van f_k naar g impliceert dat de rij f_k puntsgewijs naar g convergeert. Uitschrijven van puntsgewijze convergentie geeft:

$$\forall x \in V \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall k \geq N \quad |g(x) - f_k(x)| \leq \epsilon.$$

Het feit dat het hierbij nodig kan zijn om voor diverse $x \in V$ steeds grotere N te kiezen geeft men soms aan door $N = N(x, \epsilon)$ te schrijven, terwijl we bij uniforme convergentie $N = N(\epsilon)$ kunnen schrijven.

Als een eerste toepassing van uniforme convergentie geven we:

Lemma 5.3 *Laten f_k en g Riemann-integreerbare functies op het begrensde interval $[a, b]$ zijn. Als de rij f_k uniform naar g convergeert voor $k \rightarrow \infty$, dan geldt dat*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_k(x) \, dx = \int_a^b g(x) \, dx.$$

Bewijs Met het oog op

$$\left| \int_a^b g(x) \, dx - \int_a^b f_k(x) \, dx \right| = \left| \int_a^b (g(x) - f_k(x)) \, dx \right| \leq \sup_{x \in [a, b]} |g(x) - f_k(x)| \cdot (b - a)$$

volgt dit meteen. □

Voorbeeld 5.4 Een drastisch voorbeeld dat de conclusie van Lemma 5.3 *niet* hoeft te gelden als slechts puntsgewijze convergentie is gegeven, wordt geleverd door de volgende rij van functies ϕ_k . Zij $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continu, en neem aan dat er een $0 < a < 1$ is met de eigenschap dat $\phi(x) = 0$ wanneer $x \leq a$ of $x \geq 1$. Neem verder aan dat $\int \phi(x) \, dx = 1$. Zij $m \in \mathbb{R}$. Definieer, voor iedere $k \in \mathbb{Z}_{>0}$,

$$\phi_k(x) := k^m \phi(kx), \quad x \in [0, 1].$$

Als $x = 0$, dan geldt voor iedere k dat $\phi_k(x) = 0$, dus $\phi_k(x)$ convergeert op triviale wijze naar nul als $k \rightarrow \infty$. Is $x > 0$, dan is echter $\phi_k(x) = 0$ zodra $kx \geq 1$, ofwel $k \geq 1/x$. Dus ook dan convergeert $\phi_k(x)$ naar nul voor $k \rightarrow \infty$, om een reden die maar een beetje minder triviaal is. De conclusie is dat de rij van functies ϕ_k puntsgewijs naar de nulfunctie op $[0, 1]$ convergeert als $k \rightarrow \infty$.

Anderzijds is, voor $k \geq 1$,

$$\int_0^1 \phi_k(x) \, dx = k^{m-1} \int_0^k \phi(y) \, dy = k^{m-1}.$$

Dit convergeert alleen maar naar nul als $m < 1$. Als $m = 1$, dan is de integraal voor alle $k \geq 1$ gelijk aan 1, terwijl de integraal zelfs naar ∞ gaat als $m > 1$.

Merk ook op dat de rij ϕ_k uniform naar nul convergeert voor $k \rightarrow \infty$, dan en slechts dan als $m < 0$. Voor $0 \leq m < 1$ convergeert de rij niet uniform naar nul, terwijl de integraal nog wel naar nul convergeert. ⊗

We behandelen nu een belangrijk principe: is f_k een rij van continue functies die uniform convergeert naar een functie f , dan is de limietfunctie f vanzelf continu.

Stelling 5.5 *Zij V een deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ en zij, voor ieder positief geheel getal k , de functie $f_k : V \rightarrow \mathbb{C}$ continu. Stel $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ en neem aan dat f_k uniform naar g convergeert als $k \rightarrow \infty$. Dan is g continu.*

Bewijs Zij $a \in V$ en zij $\epsilon > 0$. Vanwege het gegeven is er bij iedere $\eta > 0$ een N , met de eigenschap dat als $k \geq N$, dan geldt voor iedere $x \in V$ dat $|g(x) - f_k(x)| \leq \eta$. We schrijven nu

$$g(x) - g(a) = g(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(a) + f_N(a) - g(a),$$

hetgeen impliceert dat

$$|g(x) - g(a)| \leq |g(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - g(a)| \leq |f_N(x) - f_N(a)| + 2\eta. \quad (5.2)$$

De strategie is nu als volgt. Kies een $\eta > 0$ met $2\eta < \epsilon$. Dan is $\zeta := \epsilon - 2\eta > 0$. Neem daarbij een N als boven. Hiervoor is $f_N : V \rightarrow \mathbb{C}$ continu in het punt a , dus er is een $\delta > 0$, met de eigenschap dat als $x \in V$ en $\|x - a\| \leq \delta$, dan is $|f_N(x) - f_N(a)| \leq \zeta$; hetgeen op grond van (5.2) impliceert dat $|g(x) - g(a)| \leq \epsilon$. $\square$

Vaak heeft men aanvankelijk alleen maar de rij van functies f_k gegeven (bijvoorbeeld met behulp van volledige inductie gedefinieerd) en nog niet de kandidaat g voor de limietfunctie. In deze gevallen is het Cauchy-criterium voor convergentie handig te gebruiken.

Definitie 5.6 Zij V een verzameling en, voor ieder geheel getal $k \geq p$, een complexwaardige functie $f_k : V \rightarrow \mathbb{C}$ gegeven. Men zegt dat de rij $(f_k)_{k=p}^{\infty}$ een *uniforme Cauchy-rij* is, als er bij iedere $\epsilon > 0$ een rangnummer $N \geq p$ is, met de eigenschap dat voor alle rangnummers k en l met $k \geq N$ en $l \geq N$ geldt dat

$$\sup_{x \in V} |f_k(x) - f_l(x)| \leq \epsilon.$$

Men noteert dit ook wel korter als $\sup_V |f_k - f_l| \leq \epsilon$. $\oslash$

Stelling 5.7 *Convergeert de rij f_k van functies in V uniform naar een functie g , dan vormen de f_k een uniforme Cauchy-rij. Is omgekeerd f_k een uniforme Cauchy-rij van functies in V , dan is er een eenduidig bepaalde functie $g : V \rightarrow \mathbb{C}$, waarvoor de rij f_k uniform naar g convergeert als $k \rightarrow \infty$. Is $V \subset \mathbb{R}^n$ en zijn de functies f_k continu, dan is de functie g ook continu.*

Bewijs Voor de eerste uitspraak merken we op dat voor iedere $x \in V$ geldt dat

$$|f_k(x) - f_l(x)| \leq |f_k(x) - g(x)| + |g(x) - f_l(x)| \leq \sup_V |f_k - g| + \sup_V |g - f_l|;$$

dit impliceert dat

$$\sup_V |f_k - f_l| \leq \sup_V |f_k - g| + \sup_V |g - f_l|.$$

Voor de tweede uitspraak nemen we nu aan dat de f_k een uniforme Cauchy-rij vormen. Voor iedere $x \in V$ geldt dat

$$|f_k(x) - f_l(x)| \leq \sup_V |f_k - f_l|,$$

waaruit we aflezen dat de $f_k(x)$ een Cauchy-rij in $\mathbb{C}$ vormen. Dit impliceert dat er een $g(x) \in \mathbb{C}$ is, waarvoor $f_k(x)$ naar $g(x)$ convergeert als $k \rightarrow \infty$. (In het college Inleiding Analyse is bewezen dat iedere Cauchy-rij in $\mathbb{R}^n$ convergeert naar een element van $\mathbb{R}^n$.) Anders gezegd, we hebben een functie $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ gevonden waarvoor f_k puntsgewijs naar g convergeert als $k \rightarrow \infty$.

We gaan nu bewijzen dat de convergentie in feite uniform is. Zij $\epsilon > 0$ en zij N zodanig dat voor alle $k \geq N$ en $l \geq N$ geldt dat $\sup_V |f_k - f_l| \leq \epsilon$. Voor iedere $x \in V$, $k \geq N$, $l \geq N$ krijgen we dan dat

$$|g(x) - f_k(x)| \leq |g(x) - f_l(x)| + |f_l(x) - f_k(x)| \leq |g(x) - f_l(x)| + \epsilon.$$

We houden hierin nu x en k vast en onderzoeken het limietgedrag van het linker- en rechterlid voor $l \rightarrow \infty$. Vanwege het behoud van ongelijkheden $\leq$ onder het nemen van limieten krijgen we dat

$$|g(x) - f_k(x)| \leq \epsilon.$$

Omdat dit geldt voor iedere $x \in V$ geldt dus, voor iedere $k \geq N$, dat $\sup_V |g - f_k| \leq \epsilon$.

De laatste uitspraak is nu een gevolg van Stelling 5.5. □

Gevolg 5.8 Zij, voor ieder geheel getal $k \geq p$, een functie $f_k : V \rightarrow \mathbb{C}$ gegeven en neem aan dat er een rij van getallen $M_k \geq 0$ is, met de volgende eigenschappen:

a) Voor iedere $x \in V$ is $|f_k(x)| \leq M_k$.

b) De rij van partiële sommen

$$S_l := \sum_{k=p}^l M_k$$

van de getallen M_k is begrensd.

Dan is er een éénduidig bepaalde $s : V \rightarrow \mathbb{C}$ waarvoor

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{k=p}^l f_k(x) = s(x), \quad (5.3)$$

waarbij de convergentie uniform op V is. Zijn alle functies f_k continu, dan is ook de functie s continu.

Bewijs De rij van partiële sommen S_l is monotoon stijgend en begrensd, dus zij convergeert (naar hun supremum). Dit impliceert dat de S_l een Cauchy-rij vormen, dus bij iedere $\epsilon > 0$ is er een $l = l(\epsilon) \in \mathbb{Z}_{\geq p}$, met de eigenschap dat voor iedere $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ geldt dat

$$\sum_{k=l+1}^{l+m} M_k = S_{l+m} - S_l \leq \epsilon.$$

Schrijf nu

$$s_l(x) = \sum_{k=p}^l f_k(x) \quad (5.4)$$

voor de partiële sommen van de $f_k(x)$. Dan is, voor iedere $x \in V$, $l = l(\epsilon)$, $m \in \mathbb{Z}_{>0}$,

$$|s_{l+m}(x) - s_l(x)| = \left| \sum_{k=l+1}^{l+m} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=l+1}^{l+m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=l+1}^{l+m} M_k \leq \epsilon.$$

Hieruit lezen we af dat de s_k een uniforme Cauchy-rij vormen. De conclusies van de stelling volgen nu uit Stelling 5.7 met f_k , resp. g vervangen door s_k , resp. s . □

Definitie 5.9 Men noemt de reeks $\sum_{k \geq p} f_k(x)$ ook wel *uniform absoluut convergent* als zij aan de voorwaarden van Gevolg 5.8 voldoet, dat wil zeggen, als

$$\sum_{k=p}^{\infty} \sup_{x \in V} |f_k(x)| < \infty. \quad (5.5)$$

Is voor iedere $x \in V$ de reeks $\sum_{k \geq p} f_k(x)$ convergent, dan noemt men de reeks $\sum_{k \geq p} f_k(x)$ *punts-gewijs convergent*; in het algemeen is uniforme absolute convergentie een veel sterkere voorwaarde dan puntsgewijze convergentie. Is de reeks $\sum_{k \geq p} f_k(x)$ puntsgewijs convergent, dan schrijft men voor de limiet $s(x)$ van de partiële sommen ook wel

$$s(x) = \sum_{k=p}^{\infty} f_k(x). \quad (5.6)$$

Men zegt dat de reeks

$$\sum_{k \geq p} f_k(x)$$

uniform convergeert naar $s(x)$, als de rij van functie

$$\sum_{k=p}^N f_k(x)$$

uniform naar $s(x)$ convergeert voor $N \rightarrow \infty$. Uniform absolute convergentie van een reeks impliceert uniforme convergentie, hetgeen op zijn beurt puntsgewijze convergentie impliceert. $\otimes$

Opmerking 5.10 In Definitie 5.9 wordt gesproken over *de reeks* $\sum_{k \geq p} f_k(x)$, zonder dat daarvan een definitie is gegeven. Voor alle doeleinden is het voldoende dat de oneindige rij van functies $f_k(x)$, $k \geq p$ is gegeven.

Het somsymbool herinnert eraan dat men de partiële sommen $s_l(x)$ in (5.4) wil onderzoeken, in het bijzonder of deze convergeren voor $l \rightarrow \infty$. Als de partiële sommen convergeren, dan wordt de limiet geïnterpreteerd als de som van alle functies $f_k(x)$, $k \geq p$ en genoteerd als (5.6). Maar ook als de partiële sommen niet convergeren (of men nog niet weet of ze convergeren), kan het interessant zijn om het gedrag van de partiële sommen te onderzoeken, bijvoorbeeld voor iedere gegeven l als functie van x .

Zo men wil zou men ‘de reeks $\sum_{k \geq p} f_k(x)$ ’ kunnen definiëren als de oneindige rij van de partiële sommen $s_l(x)$, $l \geq p$, in (5.4). In het wiskundige taalgebruik wordt de term ‘reeks’ echter ook voor de functie $s(x)$ in (5.6) gebruikt, in welk geval men vrolijk spreekt over ‘de (convergente) reeks (5.6)’. Het is duidelijk dat ‘de rij van de partiële sommen’ en ‘de limiet van de rij van de partiële sommen’ heel verschillende dingen zijn en eigenlijk zou men daar dan ook verschillende woorden voor moeten gebruiken. $\otimes$

Voorbeeld 5.11 De reeks

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} \sin(k^2 x)$$

is uniform absoluut convergent. Bewijs: voor iedere n geldt dat

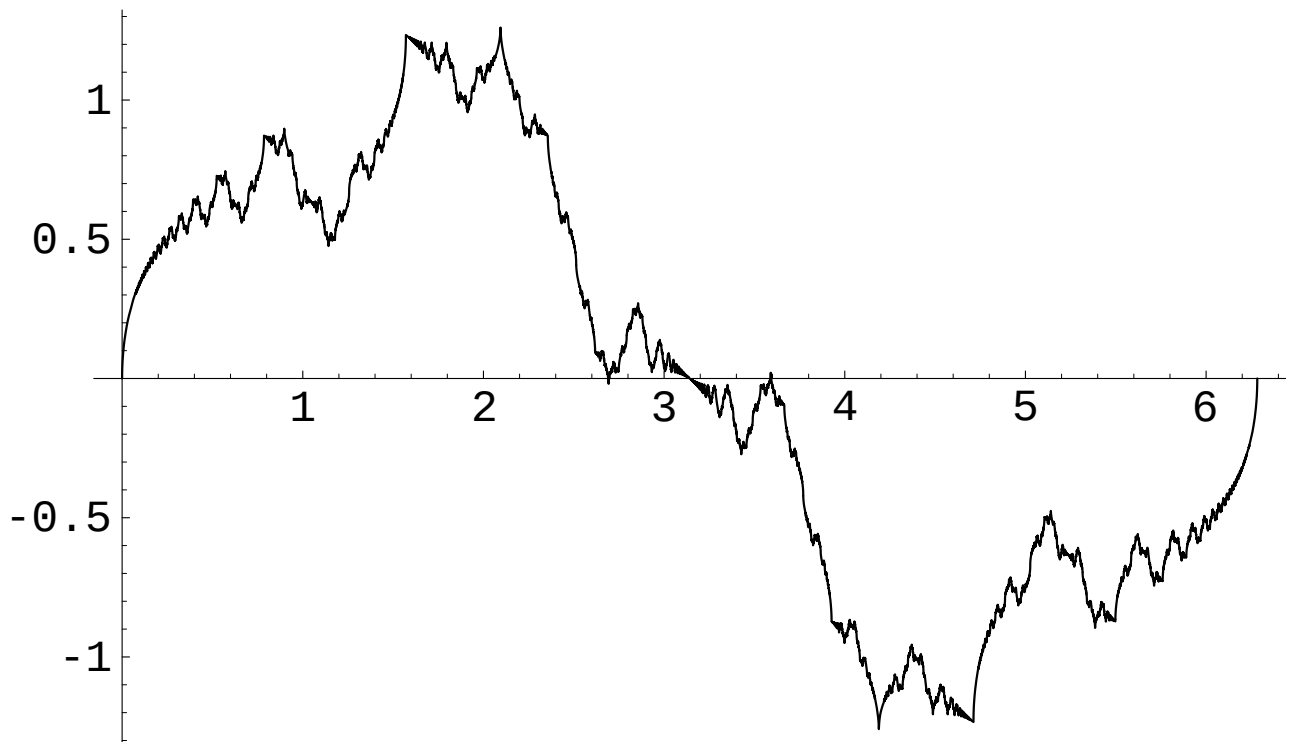
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Dit kan gemakkelijk met volledige inductie over n bewezen worden, of ook door te gebruiken dat

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2} dx.$$

Omdat bovendien voor iedere k de functie $x \mapsto k^{-2} \sin(k^2 x)$ continu is, definieert de reeks een continue functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Het volgende plaatje laat zien dat deze continue functie zich behoorlijk ‘hakkelig’ gedraagt.

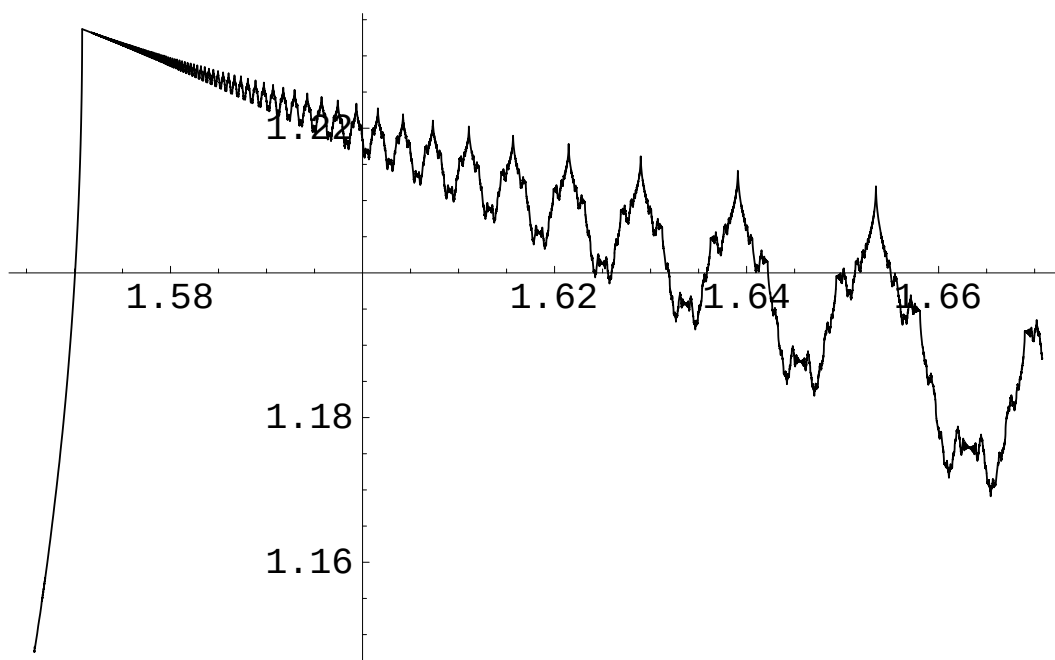


De som der $k^{-2} \sin(k^2 x)$ over alle positieve gehele k .

Bij uitvergroten wordt de hakkeligheid niet minder en wordt de functie niet goed benaderd door een lineaire functie, zoals zou moeten gebeuren als de functie differentieerbaar zou zijn:

Dat er iets mis is met de differentieerbaarheid van deze functie kan vermoed worden door de reeks te beschouwen die ontstaat door alle termen naar x te differentiëren:

$$\sum_{k \geq 1} \cos(k^2 x)$$



Uitvergroting van het vorige plaatje bij $x = \pi/2$.

Deze reeks convergeert niet erg best: alle termen oscilleren voortdurend tussen -1 en 1 en voor $x = 0$ is de som gelijk aan plus oneindig. $\odot$

5.2 Machtreeksen

Voorbeeld 5.12 Een zeer belangrijke reeks, zowel uit theoretisch oogpunt alsook in allerlei praktische toepassingen, is de *meetkundige reeks*

$$\sum_{k \geq 0} z^k, \quad (5.7)$$

die we ook voor complexe waarden van de variabele z onderzoeken. De som van de eerste l termen is gelijk aan

$$s_{l-1}(z) := \sum_{k=0}^{l-1} z^k = \frac{1 - z^l}{1 - z}, \quad (5.8)$$

als $z \neq 1$, terwijl $s_{l-1}(1) = l$.

Bewijs $z s_{l-1}(z)$ is gelijk aan de som over $1 \leq k \leq l$ van de z^k , dus $z s_{l-1}(z) = s_{l-1}(z) + z^l - 1$. Hieruit volgt (5.8) als $z \neq 1$. $\square$

Als $|z| < 1$, dan geldt dat $|z^l| = |z|^l \rightarrow 0$ als $l \rightarrow \infty$, dus $s_{l-1}(z) \rightarrow 1/(1 - z)$ als $l \rightarrow \infty$. Anders gezegd,

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1 - z}, \quad z \in \mathbb{C}, |z| < 1. \quad (5.9)$$

Als $|z| \geq 1$, dan gaan de termen $z^l = s_l(z) - s_{l-1}(z)$ niet naar nul voor $l \rightarrow \infty$, dus vormen de partiële sommen $s_l(z)$ geen Cauchy-rij en convergeren daarom niet. Anders gezegd, de meetkundige reeks met reden z convergeert als $|z| < 1$ en divergeert als $|z| \geq 1$. $\oslash$

Opmerking 5.13 Een andere bron van reeksen, waarvan de termen veelvouden zijn van de machten van de variabele, is de uit vroegere colleges bekende *formule van Taylor*. Deze zegt het volgende. Als f een l keer continu differentieerbare functie is op een interval I met $0 \in I$ en $x \in I$, dan geldt dat

$$f(x) = p_{l-1}(x) + r_l(x), \quad \text{waarin} \quad (5.10)$$

$$p_{l-1}(x) := \sum_{k=0}^{l-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad \text{en} \quad (5.11)$$

$$r_l(x) = \frac{f^{(l)}(t x)}{l!} x^l \quad \text{voor een } t \in]0, 1[. \quad (5.12)$$

De uitdrukking in het rechterlid van (5.11), resp. (5.12) heet de *Taylor-veelterm van de functie f van de graad $l-1$* , resp. *de formule van Lagrange voor de restterm*.

In eerste instantie wordt deze formule voor vaste l gebruikt om het gedrag van $f(x)$ te onderzoeken als x naar 0 gaat. Zij impliceert bijvoorbeeld dat $(f(x) - p_l(x))/x^l \rightarrow 0$ als $x \rightarrow 0$.

Echter, als f willekeurig vaak differentieerbaar is op I , dan kan men, voor een vaste $x \in I$, ook het gedrag van de Taylor-veelterm $p_{l-1}(x)$ onderzoeken voor $l \rightarrow \infty$.

Stel dat ρ_l een positief reëel getal is met de eigenschap dat voor iedere $0 < t < 1$ geldt dat

$$\left| \frac{f^{(l)}(t x)}{l!} x^l \right| \leq \rho_l.$$

Dan is $|r_l(x)| \leq \rho_l$. Als bovendien geldt dat $\rho_l \rightarrow 0$ als $l \rightarrow \infty$, dan concluderen we dat $r_l(x) \rightarrow 0$ als $l \rightarrow \infty$, ofwel $p_{l-1}(x) \rightarrow f(x)$ als $l \rightarrow \infty$. Anders gezegd, in dit geval geldt dat

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k. \quad (5.13)$$

Deze methode leidt tot de convergentie van de volgende reeksen:

$$-\log(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k, \quad |x| < 1, \quad (5.14)$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.15)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.16)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.17)$$

Bijvoorbeeld, om voor (5.15) de gewenste schatting te krijgen, gebruiken we dat als $0 < t < 1$, dan is $0 < e^{t x} \leq e^x$ als $x \geq 0$ en $0 < e^{t x} \leq 1$ als $x \leq 0$. Dit impliceert dat

$$|r_l(x)| \leq \rho_l := \max(e^x, 1) \frac{|x|^l}{l!}.$$

Omdat $\rho_{l+1}/\rho_l = |x|/(l+1) \rightarrow 0$ als $l \rightarrow \infty$, concluderen we dat $\rho_l \rightarrow 0$ als $l \rightarrow \infty$, hetgeen (5.15) impliceert. Het bewijs van de convergentie voor de andere voorbeelden (5.14), (5.16) en (5.17) kan op analoge manier gegeven worden. $\oslash$

In deze paragraaf onderzoeken we willekeurige machtreeksen, dat wil zeggen reeksen waarvan de termen veelvoudig zijn van de machten van de variabele, met willekeurige constanten als factoren voor deze machten. Merk op dat, voor iedere $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, de reëelwaardige functie $x \mapsto x^k$ op $\mathbb{R}$ een natuurlijke uitbreiding heeft tot de complexwaardige functie $z \mapsto z^k$ op $\mathbb{C}$. Dit verklaart waarom we in machtreeksen de variabele in het complexe vlak laten bewegen, zelfs als het aanvankelijke doel was om het gedrag van de functie op de reële as te onderzoeken.

Definitie 5.14 Zij $a \in \mathbb{C}$ en $c_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. De *machtreeks in het punt a met coëfficiënten c_k* , aangeduid met

$$\sum_k c_k (z - a)^k,$$

is de rij van partiële sommen

$$s_l(z) = \sum_{k=0}^l c_k (z - a)^k, \quad l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

De reeks is *convergent in het punt z* als de partiële sommen $s_l(z)$ convergeren als $l \rightarrow \infty$, men noteert in dit geval de limiet $s(z)$ met

$$s(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k.$$

Als de partiële sommen $s_l(z)$ niet convergeren voor $l \rightarrow \infty$, dan heet de reeks *divergent in het punt z* . $\oslash$

Opmerking 5.15 Voor iedere $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ is de partiële som $s_l(z)$ een complexe veeltermfunctie van de graad l , gedefinieerd op het hele complexe vlak $\mathbb{C}$. Als $V \subset \mathbb{C}$ en de reeks convergeert voor $z \in V$ naar een functie $f : V \rightarrow \mathbb{C}$, dan krijgen we hiermee een benadering van f door middel van complexe veeltermfuncties.

In het algemeen ziet een benadering door middel van complexe veeltermfuncties $P_l(z)$ voor $l \rightarrow \infty$ er als volgt uit. Voor iedere l zijn er coëfficiënten $c_{k,l}$ voor $0 \leq k \leq m(l)$, waarvoor

$$P_l(z) = \sum_{k=0}^{m(l)} c_{k,l} (z - a)^k.$$

Hierin is $m(l)$ de graad van P_l .

Voor de machtreeks is $m(l) = l$, $c_{k,l} = c_k$ voor $0 \leq k \leq l$ en $c_{k,l} = 0$ voor $k > l$. Een machtreeks is daarmee een benadering met veeltermen van een heel speciale soort. Fixeren we k , dan is de coëfficiënt van z^k van de veelterm P_l gelijk aan nul voor $l < k$ en verandert bij toenemende l niet meer voor $l \geq k$. $\oslash$

In het vervolg maken we steeds gebruik van de volgende notaties. Als $a \in \mathbb{C}$ en $r > 0$, dan is

$$B(a; r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}, \quad \text{resp.} \quad (5.18)$$

$$C(a; r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\} \quad (5.19)$$

de open schijf, resp. cirkel in $\mathbb{C}$ met middelpunt gelijk aan a en straal gelijk aan r . De notatie voor de open schijf komt overeen met die van (3.26) voor de open bol in $\mathbb{R}^n$. De gesloten schijf is vroeger al ingevoerd in (4.29). Merk ook op dat $C(0; 1) = \mathbf{T}$ de eenheidscirkel is die is ingevoerd in (4.10).

Stelling 5.16 Zij $r_0 > 0$ en onderstel dat de rij $k \mapsto |c_k| r_0^k$ begrensd is. Dan geldt voor iedere $0 \leq r < r_0$ dat de machtreeks $\sum_{k \geq 0} c_k (z - a)^k$ uniform absoluut convergeert in $\overline{B}(a; r)$. De som

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k, \quad |z - a| < r_0,$$

definieert een continue functie $f : B(a; r_0) \rightarrow \mathbb{C}$. Zij $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq a$, schrijf $r_0 = |z_0 - a|$.

Omgekeerd: als $\sum_{k \geq 0} c_k (z_0 - a)^k$ convergeert en $r_0 = |z_0 - a|$, dan geldt dat $|c_k| r_0^k \rightarrow 0$ als $k \rightarrow \infty$.

Bewijs Er is een constante C met de eigenschap dat voor iedere $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ geldt dat $|c_k| r_0^k \leq C$. Zij nu $0 \leq r < r_0$ en zij $z \in \mathbb{C}$, $|z - a| \leq r$. Daarvoor is

$$\begin{aligned} |c_k (z - a)^k| &= |c_k| \cdot |z - a|^k \leq |c_k| r^k \\ &= |c_k| r_0^k \left(\frac{r}{r_0}\right)^k \leq C \left(\frac{r}{r_0}\right)^k. \end{aligned}$$

Noteren we $v = \frac{r}{r_0}$ dan is $0 \leq v < 1$, dus

$$\sum_{k=0}^{l-1} v^k = \frac{1 - v^l}{1 - v} \leq \frac{1}{1 - v},$$

en we zien dat aan de voorwaarden van Gevolg 5.8 is voldaan, met $f_k(x)$, resp. M_k vervangen door $c_k (z - a)^k$, resp. $C v^k$. De conclusies van Gevolg 5.8 geven nu de conclusies in het eerste gedeelte van de stelling.

Voor het tweede gedeelte van de stelling merken we op dat de convergentie van de partiële sommen

$$s_l = \sum_{k=0}^l c_k (z_0 - a)^k.$$

voor $l \rightarrow \infty$ impliceert dat deze rij een Cauchy-rij is. Daaruit volgt dat de termen $t_l = c_l (z_0 - a)^l = s_l - s_{l-1}$ naar nul convergeren als $l \rightarrow \infty$. $\square$

Definitie 5.17 De convergentiestraal ρ van de machtreeks $\sum_k c_k (z - a)^k$ is gedefinieerd als het supremum van de verzameling R der $|z - a|$, waarvoor $z \in \mathbb{C}$ en $\sum_k c_k (z - a)^k$ convergeert. We schrijven daarbij $\rho = \infty$ als de verzameling R onbegrensd is. $\oslash$

Om een uitdrukking te krijgen voor de convergentiestraal van een machtreeks in termen van de grootte van haar coëfficiënten, gebruiken we het begrip *limes superior*, dat voor iedere rij van reële getallen r_k , $k = 1, 2, \dots$ kan worden gedefinieerd, ook als deze niet convergent is. Het idee is om de bijbehorende rij

$$s_N := \sup_{k \geq N} r_k$$

van de *suprema van de staarten* van de rij r_k te maken. We schrijven hierbij $s_N = \infty$ als de rij r_k , $k \geq N$ niet van boven begrensd is. Zij $\mathbb{Z}_{\geq N}$ de verzameling der gehele getallen k waarvoor $k \geq N$. Dan is evident dat $\mathbb{Z}_{\geq (N+1)} \subset \mathbb{Z}_{\geq N}$, hetgeen impliceert dat $s_{N+1} \leq s_N$. Anders gezegd, de rij der s_N , $N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ is monotoon niet-stijgend, en convergeert daarom als zij naar beneden begrensd is. Preciezer, er geldt dat

$$\lim_{N \rightarrow \infty} s_N = \inf_{N \geq 1} s_N.$$

Deze limiet heet de *limes superior* van de rij r_k en wordt ook wel aangeduid met

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} r_k := \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq N} r_k \right). \quad (5.20)$$

Als de rij r_k niet naar boven begrensd is, dan geldt voor iedere N dat $s_N = \infty$ en dan schrijft men $\limsup_{k \rightarrow \infty} r_k = \infty$. Verder kan het voorkomen dat de monotoon dalende rij der s_N niet naar beneden begrensd is, in dat geval schrijft men $\limsup_{k \rightarrow \infty} r_k = -\infty$. Dit laatste is uiteraard equivalent met de uitspraak dat er voor ieder (negatief) reëel getal M een N is met $r_k \leq M$ voor alle $k \geq N$, ofwel dat $r_k \rightarrow -\infty$ als $k \rightarrow \infty$ in de gebruikelijke zin.

Analoog krijgt men dat de rij

$$i_N := \inf_{k \geq N} r_k$$

van de infima van de staarten een monotoon niet-dalende rij is. Deze convergeert dus automatisch, met limiet gelijk aan het supremum der i_N . Men noemt

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} r_k := \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \geq N} r_k \right). \quad (5.21)$$

de *limes inferior* ofwel de *liminf* van de rij der r_k . Het is een aardige oefening om te bewijzen dat de rij r_k convergeert, dan en slechts dan als $\limsup_{k \rightarrow \infty} r_k = \liminf_{k \rightarrow \infty} r_k$ en, is dit het geval, dan is de limiet van de rij gelijk aan de gemeenschappelijke waarde van de limsup en de liminf.

Wij zullen, omdat we slechts incidenteel van de limes superior gebruik maken, deze met de iets uitgebreidere notatie

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{k \geq N} r_k \quad (5.22)$$

noteren, omdat deze notatie beter aan de definitie van de limes superior herinnert dan het linkerlid in (5.20).

Lemma 5.18 *De convergentiestraal van de machtreeks $\sum_k c_k z^k$ wordt gegeven door*

$$\rho = 1 / \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{k \geq N} |c_k|^{1/k}. \quad (5.23)$$

Bewijs In het vervolg zullen we het bekende feit gebruiken dat voor iedere $M > 0$ geldt dat $M^{1/k} \rightarrow 1$ als $k \rightarrow \infty$.

Zij $r < \rho$. Dan convergeert de rij $k \mapsto |c_k| r^k$ naar nul. Dit impliceert dat er een $C \geq 1$ is, met de eigenschap dat voor iedere k geldt dat $|c_k| r^k \leq C$. Dit impliceert dat voor iedere $k \geq N$ geldt dat $|c_k|^{1/k} \leq C^{1/k} / r \leq C^{1/N} / r$, dus

$$\sup_{k \geq N} |c_k|^{1/k} \leq C^{1/N} / r.$$

De limiet in het linker- en rechterlid nemend voor $N \rightarrow \infty$ en de stelling over het behoud van ongelijkheden onder het nemen van limieten gebruikend, krijgen we hieruit dat

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{k \geq N} |c_k|^{1/k} \leq 1/r.$$

Omdat dit geldt voor iedere $r < \rho$, geeft dit

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{k \geq N} |c_k|^{1/k} \leq 1/\rho. \quad (5.24)$$

Anderzijds, als $R > \rho$, dan volgt uit Stelling 5.16 dat de rij $k \mapsto |c_k| R^k$ onbegrensd is. Dit impliceert dat er een $0 < \epsilon \leq 1$ is met de eigenschap dat er voor iedere N een $k \geq N$ is, waarvoor $|c_k| R^k \geq \epsilon$, ofwel $|c_k|^{1/k} \geq \epsilon^{1/k}/R$. Hieruit volgt dat

$$\sup_{k \geq N} |c_k|^{1/k} \geq \epsilon^{1/N}/R.$$

De limiet nemend voor $N \rightarrow \infty$, krijgen we dat

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{k \geq N} |c_k|^{1/k} \geq 1/R$$

en omdat dit geldt voor iedere $R > \rho$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{k \geq N} |c_k|^{1/k} \geq 1/\rho. \quad (5.25)$$

Combinatie van (5.24) en (5.25) geeft nu (5.23). $\square$

Voorbeeld 5.19 Van (5.9) en (5.14) is de convergentiestraal gelijk aan 1, terwijl van (5.15), (5.16) en (5.17) de convergentiestraal gelijk is aan ∞ . $\otimes$

Gevolg 5.20 Zij ρ de convergentiestraal van de machtreeks $\sum_k c_k (z - a)^k$ in het punt $a \in \mathbb{C}$ met coëfficiënten $c_k \in \mathbb{C}$. We hebben dan de volgende mogelijkheden.

- a) $\rho = \infty$. Dan is voor iedere $z \in \mathbb{C}$ de reeks $\sum_k c_k (z - a)^k$ convergent en uniform absoluut convergent in iedere begrensde deelverzameling van $\mathbb{C}$. De som van de reeks definieert een continue functie $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.
- b) $0 < \rho < \infty$. Dan is voor iedere $z \in B(a; \rho)$ de reeks $\sum_k c_k (z - a)^k$ convergent. Voor iedere $0 \leq r < \rho$ is de reeks $\sum_k c_k (z - a)^k$ uniform absoluut convergent in $\overline{B}(a; r)$. De reeks $\sum_k c_k (z - a)^k$ definieert een continue functie $f : B(a; \rho) \rightarrow \mathbb{C}$. Voor iedere $z \in \mathbb{C}$ met $|z - a| > \rho$ is de reeks $\sum_k c_k (z - a)^k$ divergent.
- c) Zij $\rho = 0$. Dan is de reeks $\sum_k c_k (z - a)^k$ divergent voor iedere $z \in \mathbb{C}$ met $z \neq a$.

Bewijs Dat $\sum_k c_k (z - a)^k$ divergeert als $|z - a| > \rho$ volgt direct uit de definitie van de convergentiestraal, Definitie 5.17. Dit geeft zowel c) als de laatste uitspraak in b).

Als $\rho = \infty$ en r is een gegeven positief getal, dan is er een $z_0 \in \mathbb{C}$, waarvoor $r_0 := |z_0 - a| > r$ en $\sum_k c_k (z_0 - a)^k$ convergeert. Stelling 5.16 geeft nu dat de reeks uniform absoluut convergeert in

$\overline{B}(a; r)$ en in $B(a; r)$ een continue functie definieert. Omdat dit geldt voor iedere $r > 0$, krijgen we de conclusies in b).

Als $0 \leq r < \rho < \infty$ dan geeft $\rho = \sup R$, met R als in Definitie 5.17, dat ρ een limietpunt is van R . Dus is er een $z_0 \in \mathbb{C}$, waarvoor $r < r_0 := |z_0 - a| \leq \rho$ en $\sum_k c_k (z_0 - a)^k$ convergeert. Opnieuw Stelling 5.16 toepassend krijgen we de resterende conclusies in b). $\square$

Men noemt $B(a; \rho)$, resp. $\overline{B}(a; \rho)$, resp. $C(a; \rho)$ de *open convergentieschijf*, resp. *gesloten convergentieschijf*, resp. *convergentiecirkel* van de machtreeks $\sum_k c_k (z - a)^k$. Gevolg 5.20 impliceert dat de machtreeks convergeert in ieder punt van de open convergentieschijf en divergeert in ieder punt buiten de gesloten convergentieschijf. Geen uitsluitsel wordt in Gevolg 5.20 gegeven over de convergentie, dan wel divergentie, in punten op de convergentiecirkel. Voor een gegeven machtreeks kan dit een subtiel probleem zijn, waar wij hier niet verder op ingaan.

Definitie 5.21 Zij $V \subset \mathbb{C}$ en $f : V \rightarrow \mathbb{C}$. Als $a \in V$ dan heet de functie f *analytisch in het punt a* als er een machtreeks $\sum_k c_k (z - a)^k$ in het punt a is en een $\delta > 0$, waarvoor

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k$$

voor alle $z \in V$ met $|z - a| < \delta$. De functie f heet *analytisch in V* als voor iedere $a \in V$ geldt dat f analytisch is in het punt a .

Men noemt f *reëel analytisch*, resp. *complex analytisch*, als hierbij V een open interval in $\mathbb{R}$, resp. een open deelverzameling van $\mathbb{C}$ is. Men noemt f *geheel analytisch* als $V = \mathbb{C}$. $\otimes$

Voorbeeld 5.22 Zij $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$ gedefinieerd door $f(z) = 1/(1 - z)$. Zij $a \neq 1$. Dan is

$$f(z) = \frac{1}{1 - a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{1-a}} = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - a)^{-(k+1)} (z - a)^k.$$

Dit geeft dat f analytisch is in het punt a . De convergentiestraal van de machtreeks van f in het punt a is gelijk aan

$$\rho = 1 / \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{k \geq N} |1 - a|^{-(k+1)/k} = |1 - a|,$$

dus gelijk aan de afstand van a tot het singuliere punt 1 van de functie f . $\otimes$

5.3 Analytisch en Complex Differentieerbaar

Definitie 5.23 Zij U open in $\mathbb{C}$ en $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ willekeurig vaak complex differentieerbaar. Dan heet

$$\sum_k \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z - a)^k.$$

de *Taylor-reeks van de functie f in het punt a* . Dit is de machtreeks in het punt a met, voor iedere $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, de k -de coëfficiënt gelijk aan $c_k = f^{(k)}(a)/k!$. $\otimes$

In het begin van deze paragraaf hebben we voor een aantal functies f en geschikte reële waarden van z verteld dat de Taylor-reeks van f convergeert, met som gelijk aan $f(z)$. De integraalformule

van Cauchy geeft nu dat dit het geval is voor iedere complex differentieerbare functie met continue afgeleide, zie Stelling 5.25 verderop in deze paragraaf.

In deze stelling gebruiken we de volgende notatie. Als $V \subset \mathbb{C}$ en $a \in \mathbb{C}$ dan definieert men

$$d(a, V) := \inf \{|a - b| \mid b \in V\} \quad (5.26)$$

als de *afstand van het punt a tot de verzameling V* . We schrijven $d(a, V) = \infty$ als $V = \emptyset$. De *rand* van U is gedefinieerd als $\partial U = \overline{U} \setminus U$.

Lemma 5.24 *Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{C}$ en $a \in U$. Als $U \neq \mathbb{C}$, dan is er een $b \in \partial U$, waarvoor $d(a, \mathbb{C} \setminus U) = |a - b| = d(a, \partial U)$. Er geldt dat $r < d(a, \partial U)$, dan en slechts dan als $\overline{B}(a, r) \subset U$.*

Bewijs Het volgt uit de definitie van $d(a, \mathbb{C} \setminus U)$, dat er een rij van punten $b_j \in \mathbb{C} \setminus U$ is, waarvoor de getallen $|a - b_j|$ convergeren naar $d(a, \mathbb{C} \setminus U)$ als $j \rightarrow \infty$. De rij b_j is begrensd, dus vanwege de stelling van Bolzano-Weierstrass is er een deelrij $b_{j(k)}$ van de b_j waarvoor de $b_{j(k)}$ convergeren naar een $b \in \mathbb{C}$ als $k \rightarrow \infty$. Omdat de $b_{j(k)}$ tot de gesloten deelverzameling $\mathbb{C} \setminus U$ van $\mathbb{C}$ behoren, geldt dat $b \in \mathbb{C} \setminus U$, hetgeen impliceert dat $d(a, \mathbb{C} \setminus U) \leq |a - b|$. Anderzijds geeft

$$|a - b| \leq |a - b_{j(k)}| + |b_{j(k)} - b|$$

en limietnemen in het rechterlid voor $k \rightarrow \infty$ dat ook $|a - b| \leq d(a, \mathbb{C} \setminus U)$, dus $d(a, \mathbb{C} \setminus U) = |a - b|$. Tenslotte ligt b niet in het inwendige van $\mathbb{C} \setminus U$, want anders zou er op het lijnstuk van b naar a een punt $c \in \mathbb{C} \setminus U$ liggen met $|a - c| < |a - b|$. Dit betekent dat b ligt in de afsluiting $\overline{U}$ van U in $\mathbb{C}$, ofwel $b \in \partial U$. De conclusie is dat $0 < d(a, \mathbb{C} \setminus U) = |a - b| = d(a, \partial U)$ als $a \in U$. $\square$

Stelling 5.25 *Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{C}$, zij $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ complex differentieerbaar en $f' : U \rightarrow \mathbb{C}$ continu. Dan is f willekeurig vaak complex differentieerbaar. Voor iedere $a \in U$ heeft de Taylor-reeks van f in het punt a convergentiestraal groter of gelijk aan $d(a, \partial U)$. Tenslotte, als $b \in U$ en $|b - a| < d(a, \partial U)$, dan is*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b - a)^k.$$

In het bijzonder is f complex analytisch in het punt a .

Bewijs Dat f willekeurig vaak complex differentieerbaar is volgt uit Stelling 4.37.

De formule (4.32) voor $\zeta = a$ gebruikend, krijgen we

$$\sum_{k=0}^{l-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b - a)^k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(z) \frac{1 - \left(\frac{b-a}{z-a}\right)^l}{z - b} dz. \quad (5.27)$$

Hierin hebben we gebruikt dat

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{(z - a)^{k+1}} (b - a)^k &= \frac{1}{z - a} \sum_{k=0}^{l-1} \left(\frac{b - a}{z - a}\right)^k \\ &= \frac{1}{z - a} \frac{1 - \left(\frac{b-a}{z-a}\right)^l}{1 - \frac{b-a}{z-a}} = \frac{1 - \left(\frac{b-a}{z-a}\right)^l}{z - b}. \end{aligned}$$

De pointe is nu dat $|\frac{b-a}{z-a}| = |b-a|/r$, hetgeen onafhankelijk is van $z \in C(a; r)$ en strikt kleiner dan 1. Voor vastgehouden b convergeert daarom de integrand in het rechterlid van (5.27) *uniform* naar de functie $z \mapsto \frac{f(z)}{z-b}$ op $C(a; r)$ als $l \rightarrow \infty$. Vanwege Lemma 5.3 mogen we dus concluderen dat

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{l-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-b} dz = f(b), \quad (5.28)$$

waarbij we in de tweede identiteit de integraalformule van Cauchy (4.31) hebben gebruikt. $\square$

Gevolg 5.26 *Als in de situatie van Stelling 5.25 bovendien gegeven is dat er een punt $p \in \partial U$ is waarvoor $|p-a| = d(a, \partial U)$ en f geen complex analytische uitbreiding heeft tot een open omgeving van het punt p , dan is de convergentiestraal van de Taylor-reeks van f in het punt a gelijk aan $|p-a| = d(a, \partial U)$.*

Voorbeeld 5.27 Zij $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$ gedefinieerd door $f(z) = 1/(1-z)$. Dan is f complex differentieerbaar en $f' : z \mapsto (1-z)^{-2}$ is continu op $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Vanwege Stelling 5.25 is f willekeurig vaak complex differentieerbaar en complex analytisch op $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. De eerste conclusie kan ook ingezien worden door met volledige inductie over k te bewijzen dat $f^{(k)}(z) = k! (1-z)^{-(k+1)}$.

Omdat f geen complex analytische uitbreiding heeft tot een open omgeving van het punt 1, levert Gevolg 5.26 dat de convergentiestraal van de machtreeks van f in het punt $a \neq 1$ gelijk is aan de afstand $|1-a|$ van a tot het punt 1. Dit resultaat hadden we al eerder, op directe manier, geverifieerd in Voorbeeld 5.22. $\oslash$

Omgekeerd definieert iedere convergente machtreeks ook een willekeurig vaak complex differentieerbare functie en zijn de coëfficiënten gelijk aan die van de Taylor-reeks van de functie. Preciezer:

Stelling 5.28 *Zij $\sum_k c_k (z-a)^k$ een machtreeks in het punt $a \in \mathbb{C}$ met convergentiestraal $\rho > 0$, waarbij $\rho = \infty$ is toegelaten. Zij $f : B(a; \rho) \rightarrow \mathbb{C}$ gedefinieerd door*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k, \quad |z-a| < \rho.$$

Dan is f willekeurig vaak complex differentieerbaar en voor iedere $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ geldt dat

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}. \quad (5.29)$$

Bewijs Zij $0 < r < \rho$. Voor iedere $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ is de partiële som

$$s_l(z) = \sum_{k=0}^l c_k (z-a)^k$$

een complex differentieerbare functie met continue afgeleide, dus we mogen (4.31) toepassen met $f(z)$ vervangen door $s_l(z)$. Dit geeft dat

$$s_l(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{s_l(z)}{z-\zeta} dz.$$

Voor vaste $\zeta \in B(a; r)$ convergeren de functies $z \mapsto s_l(z)/(z - \zeta)$ op $C(a; r)$ uniform naar de functie $z \mapsto f(z)/(z - \zeta)$. Vanwege Lemma 5.3 mogen we dus concluderen dat

$$f(\zeta) = \lim_{l \rightarrow \infty} s_l(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz.$$

Vanwege Lemma 4.36 concluderen we dat het rechterlid een willekeurig vaak complex differentieerbare functie van $\zeta \in B(a; r)$ definieert. De conclusie is dat f willekeurig vaak complex differentieerbaar is in $B(a; r)$. Omdat dit geldt voor iedere $r < \rho$ krijgen we dat f willekeurig vaak complex differentieerbaar is in $B(a; \rho)$.

Om (5.29) te bewijzen, beginnen we met de opmerking dat de k -de orde afgeleide naar z in het punt $z = a$ van de functie $(z - a)^m$ gelijk is aan nul als $m \neq k$ en gelijk aan $k!$ als $m = k$. Dit impliceert dat, mits $k \leq l$,

$$c_k = \frac{s_l^{(k)}(a)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{s_l(z)}{(z - a)^{k+1}} dz,$$

waarbij we in de tweede identiteit (4.32) hebben toegepast met f , resp. ζ vervangen door s_l , resp. a , daarbij opmerkend dat de complexe veeltermfunctie s_l willekeurig vaak complex differentieerbaar is. Omdat voor z op de cirkel om a met straal r de functies $s_l(z)$ uniform naar $f(z)$ convergeren als $l \rightarrow \infty$, convergeert het rechterlid voor $l \rightarrow \infty$ naar

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z - a)^{k+1}} dz = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

waarbij we (4.32) hebben toegepast met ζ vervangen door a , daarbij gebruikend dat we al hadden bewezen dat f willekeurig vaak complex differentieerbaar is op $B(a; \rho)$. $\square$

Opmerking 5.29 Stelling 5.28 impliceert dat als $f(z)$ gelijk is aan een machtreeks in een punt a , dan zijn de coëfficiënten van deze machtreeks eenduidig bepaald. Anders gezegd, als er een $r > 0$ is, waarvoor

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - a)^k, \quad |z - a| < r,$$

dan geldt voor iedere $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ dat $c_k = d_k$. Immers, is $f(z)$ de functie gedefinieerd door beide machtreeksen, dan volgt uit Stelling 5.28 dat $c_k = f^{(k)}(a)/k! = d_k$.

De eenduidigheid van de coëfficiënten van een machtreeks kan ook gemakkelijk direct bewezen worden, zonder van Stelling 5.28 gebruik te maken. Immers, stel dat $c_j = d_j$ voor alle $0 \leq j \leq l - 1$. Dan is

$$\begin{aligned} c_l &= \lim_{z \rightarrow a} \sum_{k=l}^{\infty} c_k (z - a)^{k-l} = \lim_{z \rightarrow a, z \neq a} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k}{(z - a)^l} \\ &= \lim_{z \rightarrow a, z \neq a} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - a)^k}{(z - a)^l} = \lim_{z \rightarrow a} \sum_{k=l}^{\infty} d_k (z - a)^{k-l} = d_l. \end{aligned}$$

Dit leidt ook tot een alternatief bewijs voor (5.29): uit Stelling 5.25 volgt dat $f(z)$ gelijk is aan zijn eigen Taylor-reeks in het punt a en uit de eenduidigheid van de coëfficiënten van een machtreeks volgt vervolgens dat (5.29) geldt voor iedere $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. In deze zin is de formule (5.29) *equivalent* met de eenduidigheid van de coëfficiënten van een machtreeks. $\odot$

Gevolg 5.30 Zij U open in $\mathbb{C}$ en $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Dan zijn de volgende voorwaarden i), ii), iii) equivalent.

- i) f is complex differentieerbaar met continue afgeleide.
- ii) f is willekeurig vaak complex differentieerbaar en bij iedere $a \in U$ is er een omgeving van a in U waarin f gelijk is aan zijn Taylor-reeks in het punt a .
- iii) f is complex analytisch.

De stelling van Goursat zegt dat in i) de zinsnede ‘met continue afgeleide’ weggelaten kan worden, zie Opmerking 4.38.

Het volgende *delingslemma* voor complex analytische functies is nu evident.

Lemma 5.31 Zij U open in $\mathbb{C}$, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ complex analytisch, $a \in U$ en $m \in \mathbb{Z}_{>0}$. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.

- a) Voor iedere $0 \leq k \leq m-1$ is $f^{(k)}(a) = 0$, terwijl $f^{(m)}(a) \neq 0$.
- b) Er is een complex analytische functie $q : U \rightarrow \mathbb{C}$ waarvoor $f(z) = (z-a)^m q(z)$, $z \in U$ en $q(a) \neq 0$.

Gelden a) en b), dan is $q(a) = f^{(m)}(a)/m!$.

Men zegt dat f een *nulpunt van de orde m in het punt a* heeft als één van de equivalente voorwaarden a) of b) in Lemma 5.31 is voldaan.

We bespreken tot slot nog even reëel analytische functies. Daartoe geven we eerst een resultaat dat ook op zichzelf interessant is. Voor de definitie van samenhangende open deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$, zie Definitie 3.10.

Lemma 5.32 Zij U een samenhangende open deelverzameling van $\mathbb{C}$ en zij $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ complex analytisch. Zij $z_0 \in U$ en, voor iedere $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $f^{(k)}(z_0) = 0$. Dan is $f(z) = 0$ voor iedere $z \in U$.

Bewijs Definieer

$$N_k := \{z \in U \mid f^{(k)}(z) = 0\} \quad \text{en} \quad N := \bigcap_{k=0}^{\infty} N_k.$$

Omdat $f^{(k)} : U \rightarrow \mathbb{C}$ continu is, is $U \setminus N_k$ een open deelverzameling van $\mathbb{C}$. Omdat dit geldt voor iedere $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, is ook

$$U \setminus N = \bigcup_{k=0}^{\infty} U \setminus N_k$$

een open deelverzameling van $\mathbb{C}$.

Anderzijds geeft ii) in Gevolg 5.30 dat er bij iedere $a \in N$ een open omgeving V van a is, bevat in U , waarvoor f gelijk aan nul is in V . Maar omdat V open is, impliceert dit dat alle afgeleiden van f in V ook gelijk aan nul zijn, ofwel $V \subset N$. Dit laat zien dat N een open deelverzameling van $\mathbb{C}$ is.

Omdat U samenhangend was verondersteld, is nu ófwel $N = \emptyset$, ófwel $U \setminus N = \emptyset$, ofwel $N = U$. We hadden aangenomen dat $z_0 \in N$; de conclusie is dat $N = U$. $\square$

Stelling 5.33 Zij I een open interval in $\mathbb{R}$ en zij $f : I \rightarrow \mathbb{C}$. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.

i) f is reëel analytisch.

ii) Er is een open omgeving U van I in $\mathbb{C}$ en een complex analytische functie $g : U \rightarrow \mathbb{C}$, waarvoor $g|_I = f$.

Bewijs Bij iedere $a \in I$ is er een machtreeks $\sum_k c_k(a) (z - a)^k$ met convergentiestraal $\rho(a) > 0$, zodanig dat voor iedere $x \in I$ met $|x - a| < \rho(a)$ geldt dat $f(x) = f_a(x)$, als we schrijven

$$f_a(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k, \quad z \in \mathbb{C}, |z - a| < \rho(a).$$

We nemen nu

$$U = \bigcup_{a \in I} B(a; \rho(a))$$

en definiëren $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ door

$$g(z) = f_a(z) \quad \text{als} \quad z \in B(a; \rho(a)).$$

Dit is een toelaatbare definitie, dan en slechts dan als voor iedere $a, b \in I$ met

$$D := B(a; \rho(a)) \cap B(b; \rho(b)) \neq \emptyset$$

geldt dat $f_a = f_b$ in D .

Nu is D een samenhangende open deelverzameling van $\mathbb{C}$, ga dit na. Verder is $f_a = f = f_b$ in $D \cap I$, waarbij bovendien $D \cap I \neq \emptyset$. Neem $c \in D \cap I$. We krijgen, omdat $v = f_a - f_b = 0$ in het open interval $D \cap I$ om c , dat voor iedere $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ geldt dat $v^{(k)}(c) = 0$. Lemma 5.32 toepassend met f , resp. U vervangen door v , resp. D , krijgen we dat $v = 0$ in D , ofwel $f_a = f_b$ in D .

Bij definitie zijn de functies f_a complex analytisch. Dus de functie f , die lokaal gegeven wordt door de f_a , is complex analytisch. $\square$

Opmerking 5.34 De equivalentie tussen ‘ontwikkelbaarheid in machtreeksen’ en ‘complex differentieerbaar met continue afgeleiden’ kan gebruikt worden om allerlei conclusies betreffende machtreeksen te verkrijgen, zonder alle coëfficiënten uit te rekenen, resp. te schatten. We geven een paar voorbeelden.

i) Laat $\sum_k a_k (z - z_0)^k$ en $\sum_k b_k (z - z_0)^k$ machtreeksen in het punt z_0 zijn, beiden met convergentiestraal groter of gelijk aan $r > 0$. Definieer

$$c_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}.$$

Dan heeft $\sum_k c_k (z - z_0)^k$ convergentiestraal groter of gelijk aan r en als

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k, \quad h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

dan is $f(z)g(z) = h(z)$ voor $|z - z_0| < r$.

- ii) Zij $\sum_k a_k (z - z_0)^k$, resp. $\sum_k b_k (w - w_0)^k$ machtreeksen met positieve convergentiestraal in het punt z_0 , resp. w_0 en zij $w_0 = a_0$. Dan is er een éénduidig bepaalde machtreeks $\sum_k c_k (z - z_0)^k$ in het punt z_0 met positieve convergentiestraal, met de eigenschap dat als

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad g(w) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (w - w_0)^k, \quad h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

dan is $h(z) = g(f(z))$ voor alle z in een omgeving van z_0 .

Deze resultaten volgen direct uit het feit dat het product, resp. de samenstelling van complex differentieerbare functies met continue afgeleiden weer een complex differentieerbare functie is met continue afgeleide. De coëfficiënten van de machtreeks van het product, resp. de samenstelling kunnen succesief bepaald worden door differentiatie of, equivalent daarmee, door verzamelen van alle termen met dezelfde macht van $z - z_0$.

De theorie van complex analytische functies is een ware schatkamer van soms zeer verrassende resultaten. In een later college Complexe Functietheorie zal hier verder op ingegaan worden. $\odot$

5.4 Vraagstukken bij Hoofdstuk 5

Vraagstuk 5.1 Zij I een begrens interval in $\mathbb{R}$ en zij $f_n, n \in \mathbb{Z}_{>0}$, een rij van continu differentieerbare complexwaardige functies op I .

- a) Neem aan dat de rij van afgeleiden f_n' uniform convergeert naar de functie g en dat er een $a \in I$ en $c \in \mathbb{C}$ is, waarvoor $f_n(a)$ naar c convergeert als $n \rightarrow \infty$. Bewijs dat er een continu differentieerbare functie f op I is, waarvoor f_n uniform naar f convergeert als $n \rightarrow \infty$ en verder $f' = g, f(a) = c$.

Hint: schrijf, voor iedere $x \in I$,

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(y) dy$$

en bewijs dat dit voor $n \rightarrow \infty$ convergeert naar $c + \int_a^x g(y) dy$.

- b) Neem aan dat de reeks van functies $\sum_{k \geq 1} f_k'$ uniform convergent is en dat de reeks van getallen $\sum_{k \geq 1} f_k(a)$ convergeert. Bewijs dat de reeks van functies $\sum_{k \geq 1} f_k$ uniform convergeert, dat de som een continu differentieerbare functie is en dat

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_k(x), \quad x \in I.$$

Men noemt dit de *regel van differentiatie onder het somteken*.

⊗

Vraagstuk 5.2 Definieer de rij van functies $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, door

$$f_k(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- a) Bewijs dat voor iedere $x \in \mathbb{R}$ de reeks $\sum_k f_k(x)$ convergent is en bereken de som $s(x)$. Behandel hierbij het geval dat $x = 0$ apart. Is $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continu? Bewijs dat de reeks $\sum_k f_k(x)$ niet uniform convergent is op $\mathbb{R}$.
- b) Zij $\delta > 0$. Bewijs dat de reeks $\sum_k f_k(x)$ uniform convergent is op $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq \delta\}$.

⊗

Vraagstuk 5.3 Definieer de reëelwaardige functie f op $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Z}\}$ door middel van

$$f(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x-k)^2}.$$

- a) Ga na dat voor iedere $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ de reeks uniform convergeert op $[\epsilon, 1 - \epsilon]$. Concludeer dat f continu is op $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

b) Bewijs met Taylor-ontwikkeling van de functie $x \mapsto \sin(\pi x)$ in het punt 0 dat

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Bewijs dat voor iedere $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ en iedere $l \in \mathbb{Z}$ geldt dat $f(x+l) = f(x)$. Bewijs dat f kan worden voortgezet tot een functie, die we ook f noemen, die continu is op $\mathbb{R}$. Concludeer dat de aldus gedefinieerde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een continue periodieke functie is, en dat f bijgevolg begrensd op $\mathbb{R}$ is.

c) Toon aan dat

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bewijs hiermee dat voor iedere $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $|f(x)| \leq \frac{1}{4} \sup |f| + \frac{1}{4} \sup |f|$, en daarmee dat $\sup |f| \leq \frac{1}{2} \sup |f|$. Concludeer dat $f \equiv 0$ op $\mathbb{R}$, m.a.w., voor iedere $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ geldt dat

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x-k)^2}.$$

Bewijs dat $f(0) = 0$, resp. $f(1/2) = 0$ leiden tot

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \text{resp.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

d) Bewijs dat voor iedere gehele $n \geq 1$ geldt dat

$$\pi \frac{d^n}{dx^n} \tan(\pi x) = n! \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\left(k - \frac{1}{2} - x\right)^{n+1}}.$$

e) De *zeta-functie van Riemann* is gedefinieerd door

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

Bewijs dat

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} + 2^{-s} \zeta(s).$$

Bewijs dat voor iedere $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ geldt dat

$$\pi^{2m} \tan^{(2m-1)}(0) = (2m-1)! 2^{2m} (1 - 2^{-2m}) 2 \zeta(2m).$$

Door $\tan^{(n)}$ voor $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ achtereenvolgens te bepalen, kan $\zeta(2m)$ voor $m = 1, 2, 3, \dots$ achtereenvolgens bepaald worden. Bereken $\zeta(2), \zeta(4), \zeta(6)$.

⊗

Vraagstuk 5.4 Definieer $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ als $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ en $f(0) = 1$. Bewijs dat f geheel analytisch is. Bepaal de Taylor-reeks van f in het punt $z = 0$ en bepaal zijn convergentiestraal. $\otimes$

Vraagstuk 5.5 Zij $F(z) = \sum_{k \geq 0} c_k (z - a)^k$ een machtreeks met convergentiestraal $\rho > 0$. Zij D de verzameling van alle $z \in \mathbb{C}$ waarvoor $|z - a| < \rho$.

a) Bewijs dat $f(z) = \sum_{l \geq 0} (l + 1) c_{l+1} (z - a)^l$ dezelfde convergentiestraal ρ heeft.

b) Zij $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$ een C^1 kromme in D met $\gamma(0) = a$. Bewijs dat

$$c_0 + \int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(1)).$$

c) Gebruik Opmerking 4.29 om te bewijzen dat $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ complex differentieerbaar is en dat $F'(z) = f(z)$, $z \in D$.

d) Bereken $\sum_{l \geq 0} (l + 1) z^l$ en $\sum_{m \geq 0} (m + 2) (m + 1) z^m$. Wat is de convergentiestraal? $\otimes$

Vraagstuk 5.6 Zij $c \in \mathbb{R}$ en zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x) = \frac{1 + c x^2}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zij $c \neq 1$. Bepaal, voor iedere $a \in \mathbb{R}$, de convergentiestraal van de Taylor-reeks van f in het punt a . Wat gebeurt er voor $c = 1$ met de convergentiestraal? $\otimes$

Vraagstuk 5.7 Neem aan dat $\sum_{k \geq 0} c_k (z - a)^k$ convergentiestraal $\rho > 0$ heeft.

a) Bewijs dat

$$\frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k (z - a)^{k-1}, \quad |z - a| < \rho,$$

waarbij de machtreeks in het rechterlid convergentiestraal gelijk aan ρ heeft. Anders gezegd: machtreeksen mogen termsgewijs gedifferentieerd worden in hun open convergentieschijf.

b) Differentieer de machtreeksen in (5.14), (5.15), (5.16) en (5.17) termsgewijs en identificeer de daarmee verkregen machtreeksen.

c) Bepaal de machtreeks voor $(1 - z)^{-2}$ in $z = 0$. Wat is de convergentiestraal?

d) Zij $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Bepaal de machtreeks voor $(1 - z)^{-1-m}$ in $z = 0$. $\otimes$

Vraagstuk 5.8 Werk ii) in Opmerking 5.34 in detail uit. Bereken c_0, c_1, c_2 in termen van a_0, a_1, a_2 en b_0, b_1, b_2 . $\otimes$

Vraagstuk 5.9 Er geldt de volgende *inverse-functiestelling voor complex differentieerbare functies*, waarvan we het bewijs hier niet geven, maar die u in het vervolg van dit vraagstuk mag gebruiken. Zij

U een open deelverzameling van $\mathbb{C}$, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ complex differentieerbaar, $z_0 \in U$ en $f'(z_0) \neq 0$. Dan is er een open omgeving U_0 van z_0 in U , met de eigenschap dat de beperking f_0 van f tot U_0 een bijectieve afbeelding definieert van U_0 naar een open deelverzameling V_0 van $\mathbb{C}$, terwijl verder de inverse $g_0 : V_0 \rightarrow U_0$ van f_0 complex differentieerbaar is.

Zij $\sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^k$ een machtreeks met positieve convergentiestraal in het punt z_0 en neem aan dat $a_1 \neq 0$. Bewijs dat er een éénduidig bepaalde machtreeks $\sum_{k \geq 0} b_k (w - a_0)^k$ met positieve convergentiestraal in het punt a_0 is, met de eigenschappen dat $b_0 = z_0$ en dat als

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad g(w) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (w - a_0)^k,$$

dan is $g(f(z)) = z$ voor alle z in een omgeving van $z = z_0$.

Bereken b_1 in termen van a_1 en bereken b_2 in termen van a_1 en a_2 . ⊗

Vraagstuk 5.10 Zij U een samenhangende open deelverzameling van $\mathbb{C}$ en zij $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ en $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ complex analytisch. Zij verder $a \in U$ en z_j een rij in U met $z_j \neq a$ voor iedere j en $z_j \rightarrow a$ als $j \rightarrow \infty$. Neem tenslotte aan dat voor iedere j geldt dat $f(z_j) = g(z_j)$. Bewijs dat voor iedere $z \in U$ geldt dat $f(z) = g(z)$.

Hint: schrijf $h(z) = f(z) - g(z)$. Bewijs met volledige inductie over l dat voor iedere $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ geldt dat $h^{(l)}(a) = 0$. Maak daarbij gebruik van Taylor-ontwikkeling in het punt a , met $z = z_j$. ⊗

Vraagstuk 5.11 Zij U een samenhangende en open deelverzameling van $\mathbb{C}$, die symmetrisch is ten aanzien van de spiegeling om de reële as, dat wil zeggen, als $z \in U$ dan is $\bar{z} \in U$. Zij verder $a \in U \cap \mathbb{R}$ en zij $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ complex analytisch. Bewijs dat de volgende uitspraken a) – c) equivalent zijn.

- a) Als $x \in U \cap \mathbb{R}$ dan is $f(x) \in \mathbb{R}$.
- b) Voor iedere $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ is $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$.
- c) Voor iedere $z \in U$ geldt dat $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.

Hint voor b) $\Rightarrow$ c): bewijs eerst dat de functie g , gedefinieerd door

$$g(z) := \overline{f(\bar{z})}, \quad z \in U,$$

complex analytisch is in U . ⊗

Vraagstuk 5.12

- a) Bewijs dat, als $z \neq 1$ en $n \in \mathbb{Z}_{>0}$,

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{n-1} z^k + \frac{z^n}{1-z}.$$

Substitueer $z = -y^2$, integreer over y van 0 tot x en bewijs dat

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + (-1)^n R_n(x),$$

waarin

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{y^{2n}}{1+y^2} dy.$$

b) Bewijs dat de machtreeks

$$\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \quad (*)$$

niet absoluut uniform convergent is op $[0, 1]$. Hint: bewijs dat deze uitspraak equivalent is met de uitspraak dat $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{2k+1} = \infty$. Waarom is dit laatste waar?

c) Bewijs dat voor iedere $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ en $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ geldt dat

$$\frac{1}{1+x^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \leq R_n(x) \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Bewijs dat de machtreeks $(*)$ uniform convergent is op $[0, 1]$. Wat is de convergentiestraal? Wat is de som?

d) Bewijs dat

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^n r_n, \quad \text{met} \quad \frac{1}{2} \frac{1}{2n+1} \leq r_n \leq \frac{1}{2n+1}.$$

Bewijs dat $r_n \rightarrow 0$, ofwel $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \rightarrow \pi/4$ als $n \rightarrow \infty$. Daarbij laat de eerste ongelijkheid echter zien dat de convergentie uitermate langzaam is: als je een benadering met 6 nauwkeurige decimalen wilt hebben, dan moet je al zo'n half miljoen termen sommeren. Voor iedere extra nauwkeurige decimaal zijn 10 maal zoveel termen nodig.

Een stuk sneller gaat de benadering van $\pi/2^m$ met behulp van de partiële sommen van $(*)$, als we $x = a_m = \tan(\pi/2^m)$ nemen met m een geheel getal dat groter is dan 2; de benadering gaat des te sneller naarmate m groter is. Hierbij kunnen de a_m inductief bepaald worden door $a_2 = 1$ en door a_{m+1} te bepalen als de positieve oplossing x van de vergelijking $a_m x^2 + 2x - a_m = 0$. Deze x kan zeer snel met zeer grote nauwkeurigheid bepaald worden met behulp van Newton's benaderingsprocedure.

⊗

Vraagstuk 5.13 Het *convergentiecriterium van Dirichlet* zegt het volgende. Zij a_n , $n \geq 1$, een monotoon niet-stijgende rij van reële getallen die naar 0 convergeert als $n \rightarrow \infty$. Zij b_n , $n \geq 1$, een rij van complexwaardige functies op een verzameling V waarvan de partiële sommen uniform begrensd zijn, in de zin dat er een positieve constante M is met de eigenschap dat voor iedere $p \geq 0$ en iedere $z \in V$ geldt dat

$$\left| \sum_{n=1}^p b_n(z) \right| \leq M.$$

Dan is er een functie f op V waarvoor

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^p a_n b_n(z) = f(z), \quad \text{uniform voor } z \in V.$$

- a) Om dit te bewijzen, schrijf $s_p(z) = \sum_{n=1}^p a_n b_n(z)$ en $B_p(z) = \sum_{n=1}^p b_n(z)$. Bewijs met volledige inductie over q dat voor iedere $q > p \geq 1$ geldt dat

$$s_q(z) - s_p(z) = \sum_{n=p+1}^q (a_n - a_{n+1}) B_n(z) - a_{p+1} B_p(z) + a_{q+1} B_q(z).$$

(Deze truc wordt ook wel *partiële sommatie*, of *Abel-sommatie* genoemd.) Gebruik nu dat $a_n - a_{n+1} \geq 0$ en $a_n \geq 0$ om aan te tonen dat

$$|s_q(z) - s_p(z)| \leq \sum_{n=p+1}^q (a_n - a_{n+1}) M + a_{p+1} M + a_{q+1} M = 2a_{p+1} M.$$

Toon hiermee aan dat de functies $s_p(z)$ een uniforme Cauchy-rij vormen en maak het bewijs van Dirichlet's convergentiecriterium af.

- b) Als toepassing nemen we nu $b_n(z) = z^n$, en voor $V = V_\delta$ de verzameling der complexe getallen z , waarvoor $|z| \leq 1$ en $|1 - z| > \delta$, waarbij δ een strikt positief reëel getal is. Bewijs dat als a_n een rij van positieve reële getallen is die monotoon naar nul convergeert, dan is voor iedere $\delta > 0$ de machtreeks $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$ uniform convergent op V_δ . (Deze conclusie geldt natuurlijk ook als we een willekeurige constante term a_0 aan de reeks toevoegen.)

Zij V_0 de verzameling der $z \in \mathbb{C}$ met $|z| \leq 1$ en $z \neq 1$. Bewijs dat het voorgaande impliceert dat voor iedere $z \in V_0$ de machtreeks $\sum_{n \geq 1} a_n z^n$ convergeert en dat de functie

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

continu is op V_0 .

- c) Neem nu $a_n = 1/n$ in b). Bewijs dat in dit geval de machtreeks niet absoluut convergeert als $|z| = 1$, hoewel zij wel voor iedere $\delta > 0$ uniform convergeert op V_δ .

Bewijs dat als $|z| < 1$, dan is $f(z)$ complex differentieerbaar, $f'(z) = 1/(1 - z)$ en $f(0) = 0$. Bewijs hiermee dat $f(z) = -\log(1 - z)$ als $|z| < 1$, waarbij we de standaardkeuze voor de hoekfunctie gebruiken. Gebruik tenslotte de continuïteit van $f(z)$ op V_0 om aan te tonen dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n = \log \frac{1}{1 - z}, \quad z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1, z \neq 1.$$

Bewijs dat de reeks divergeert als $|z| > 1$ en ook als $z = 1$.

⊗

Vraagstuk 5.14 Bewijs dat de complexe cosinus, sinus, cosinushyperbolicus en sinushyperbolicus, ingevoerd in Vraagstuk 4.24, geheel analytische functies zijn. Geef van ieder van deze functies de machtreeks in het punt 0. ⊗

Vraagstuk 5.15 Zij U een open deelverzameling van $\mathbb{C}$ en neem aan dat f en g complex analytische functies zijn op U . Zij $a \in \mathbb{C}$ en neem aan dat g een nulpunt van de orde m heeft in het punt a .

a) Bewijs dat, in de terminologie van Vraagstuk 4.47, f/g een pool van de orde $\leq m$ heeft in het punt a .

Hint: gebruik Lemma 5.31 met f vervangen door g . Gebruik ook dat de functie $1/q$ complex analytisch is en schrijf zowel f als $1/q$ als een veelterm van de graad $m - 1$ plus een complex analytische functie met een nulpunt van de orde $\geq m$ in het punt a .

b) Bewijs dat als $m = 1$, dan is $\text{Res}_a(f/g) = f(a)/g'(a)$.

◊

6 Fourier-reeksen

6.1 Elementaire Theorie

We zullen nu reeksen bestuderen met de trigonometrische functies als bouwstenen en met de reële rechte als definitiegebied. Deze reeksen zijn genoemd naar de Franse wiskundige J. Fourier (1768-1830), die ze introduceerde in zijn theorie over warmte (artikelen vanaf 1807, boek *Théorie de la Chaleur* uit 1822).

Definitie 6.1 Een *Fourier-reeks* is een reeks van functies van de vorm

$$a_0 + \sum_{k \geq 1} a_k \cos kx + \sum_{k \geq 1} b_k \sin kx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}, \quad (6.1)$$

waarin de *coëfficiënten* $a_k, k \geq 0$ en $b_k, k \geq 1$, resp. $c_k, k \in \mathbb{Z}$, complexe getallen kunnen zijn.

De identiteit tussen de twee gedaanten berust op het (uit Hoofdstuk 4 bekende) feit dat de cosinus en de sinus samengenomen kunnen worden tot de complexwaardige functie

$$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx, \quad (6.2)$$

waaruit we omgekeerd de cosinus en de sinus terug kunnen vinden door middel van

$$\cos kx = \frac{1}{2} (e^{ikx} + e^{-ikx}), \quad \sin kx = \frac{1}{2i} (e^{ikx} - e^{-ikx}). \quad (6.3)$$

Op grond hiervan zijn de c_k in termen van de a_k en b_k gegeven door

$$c_0 = a_0 \quad \text{en, voor } k \geq 1, \quad c_k = \frac{1}{2} (a_k - i b_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2} (a_k + i b_k), \quad (6.4)$$

terwijl omgekeerd de a_k, b_k in termen van de c_k gegeven worden door

$$a_0 = c_0 \quad \text{en, voor } k \geq 1, \quad a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}). \quad (6.5)$$

Men spreekt van een *reëelwaardige Fourier-reeks* als de coëfficiënten a_0, a_k en b_k allen reële getallen zijn. Met het oog op (6.4) en (6.5) is dit equivalent met de voorwaarde dat voor iedere $k \in \mathbb{Z}$ geldt dat c_k gelijk is aan de complex geconjugeerde $\overline{c_{-k}}$ van c_{-k} . Merk op dat dit impliceert dat c_0 reëel is. In het geval van een reëelwaardige Fourier-reeks noemt men de uitdrukking links van het gelijkteken in (6.1) de *reële gedaante* van de Fourier-reeks. Omdat, zelfs als de Fourier-reeks reëelwaardig is, de termen $c_k e^{ikx}$ met $c_k \neq 0, k \neq 0$ geen reëelwaardige functies van $x \in \mathbb{R}$ zijn, heet de uitdrukking rechts van het gelijkteken in (6.1) de *complexe gedaante* van de Fourier-reeks.

Men noemt de Fourier-reeks (6.1) *convergent* als de rij van de *symmetrische partiële sommen*

$$s_l(x) := a_0 + \sum_{k=1}^l a_k \cos kx + \sum_{k=1}^l b_k \sin kx = \sum_{k=-l}^l c_k e^{ikx} \quad (6.6)$$

convergeert voor $l \rightarrow \infty$. Is dit het geval, dan noteert men de limiet als

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \quad (6.7)$$

en noemt dit de *som van de Fourier-reeks*. Men kan deze convergentie voor ieder gegeven punt $x \in \mathbb{R}$ onderzoeken, in welk geval men van *puntsgewijze convergentie* van de Fourier-reeks spreekt. Beschouwen we de partiële sommen (6.6) als functies van x en is daarvoor de convergentie voor $l \rightarrow \infty$ uniform, dan heet de Fourier-reeks (6.1) *uniform convergent*. $\oslash$

Omdat de complexe gedaante eenvoudiger in het gebruik is, formuleren we de conclusies gewoonlijk daarvoor. De identiteiten tussen de (coëfficiënten van) de reële en de complexe vorm maken de vertaling naar de corresponderende resultaten voor de reële vorm tot een eenvoudige oefening.

Een functie g op $\mathbb{R}$ heet *periodiek met periode ω* als voor iedere $y \in \mathbb{R}$ geldt dat $g(y + \omega) = g(y)$.

Voor iedere $k \in \mathbb{Z}$ is de functie

$$\epsilon_k : x \mapsto e^{ikx} \quad (6.8)$$

periodiek met periode 2π . Dit geeft dat de som van iedere puntsgewijs convergente Fourier-reeks een periodieke functie is met periode 2π .

Het is duidelijk dat de substitutie

$$f(x) = g\left(\frac{\omega}{2\pi} x\right), \quad g(y) = f\left(\frac{2\pi}{\omega} y\right),$$

een ω -periodieke functie g overvoert in een 2π -periodieke functie f en vice versa, om deze reden zijn alle resultaten in deze paragraaf representatief voor periodieke functies met een willekeurige periode.

Stelling 6.2 *De rij*

$$l \mapsto \sum_{k=-l}^l |c_k|$$

is begrensd dan en slechts dan als de reeksen $\sum_{k \geq 0} c_k e^{ikx}$ en $\sum_{k \geq 0} c_{-k} e^{-ikx}$ uniform absoluut convergent op $\mathbb{R}$ zijn. Is dit het geval, dan convergeert de Fourier-reeks (6.1) uniform op $\mathbb{R}$ en is de som ervan een continue functie f op $\mathbb{R}$, die periodiek is met periode 2π .

Bewijs De eerste uitspraak volgt uit de opmerking dat voor iedere $x \in \mathbb{R}$ en $k \in \mathbb{Z}$ geldt dat $|e^{ikx}| = 1$. De resterende conclusies volgen door toepassing van Gevolg 5.8. $\square$

Voorbeeld 6.3 De absoluut uniform convergente reeks

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin(k^2 x)$$

uit Voorbeeld 5.11 is een Fourier-reeks, waarvan de coëfficiënten a_j, b_j gedefinieerd zijn door $a_j = 0$ voor alle $j \geq 0$, $b_j = 0$ voor iedere $j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ die niet gelijk is aan een kwadraat van een geheel getal, en tenslotte $b_j = 1/k^2$ als $j = k^2$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Men noemt een Fourier-reeks *lacunair* als de verzameling van de rangnummers j waarvoor $c_j \neq 0$ ‘steeds grotere gaten’ vertoont voor grote $|j|$. Lacunaire Fourier-reeksen worden vaak gebruikt om er al te naïeve ideeën over het gedrag van functies mee te weerleggen. De plaatjes van Voorbeeld 5.11 illustreren dit. $\oslash$

De volgende stelling van Euler (1777) en Fourier geeft aan hoe de coëfficiënten van een Fourier-reeks teruggevonden kunnen worden uit de som.

Stelling 6.4 Veronderstel dat de Fourier-reeks (6.1) uniform convergeert, met som (6.7) gelijk aan de continue functie f . Dan geldt voor iedere $k \in \mathbb{Z}$ dat

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (6.9)$$

Bewijs Zij $k \in \mathbb{Z}$. Omdat $|e^{-ikx}| \equiv 1$, geeft de uniforme convergentie van (6.1) dat de rij van functies

$$x \mapsto \left(\sum_{j=-l}^l c_j e^{ijx} \right) e^{-ikx}$$

voor $l \rightarrow \infty$ uniform convergeert naar de functie $x \mapsto f(x) e^{-ikx}$. Vanwege Lemma 5.3 mogen we daarom concluderen dat

$$\int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{j=-l}^l c_j \int_0^{2\pi} e^{ijx} e^{-ikx} dx.$$

Nu is $e^{ijx} e^{-ikx} = e^{i(j-k)x}$ en daarvan is de integraal over $[0, 2\pi]$ gelijk aan 0 als $j \neq k$ en gelijk aan 2π als $j = k$. Dus de som achter het limietteken is gelijk aan $c_k 2\pi$, zodra $l \geq |k|$. $\square$

Opmerking 6.5 Voor iedere $a \in \mathbb{R}$ kan de integraal over $[0, 2\pi]$ in (6.9) vervangen worden door de integraal over $[a, a + 2\pi]$. Dit berust op het feit dat als f een 2π -periodieke functie is, dan is

$$\int_{2\pi}^{a+2\pi} f(x) dx = \int_0^a f(y + 2\pi) dy = \int_0^a f(y) dy,$$

dus

$$\int_a^{a+2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} f(x) dx + \int_{2\pi}^{a+2\pi} f(x) dx - \int_0^a f(x) dx = \int_0^{2\pi} f(x) dx,$$

ofwel de integralen van f over alle intervallen ter lengte 2π zijn dezelfde. Het getal

$$\text{av}(f) := \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) dx$$

heet ook wel het *gemiddelde* van de 2π -periodieke functie f .

Is ϕ een functie op de eenheidscirkel $C(0; 1)$ in het complexe vlak, dan definieert

$$f(x) = \phi(e^{ix}), \quad x \in \mathbb{R} \quad (6.10)$$

een 2π -periodieke functie op $\mathbb{R}$. Men gaat gemakkelijk na dat de afbeelding $\phi \mapsto f$ bijectief is van de ruimte van functies op $C(0; 1)$ naar de ruimte van 2π -periodieke functies op $\mathbb{R}$. En ook dat de integraal van f over een interval ter lengte 2π gelijk is aan de ongeoriënteerde lijnintegraal van ϕ over $C(0; 1)$. $\oslash$

Definitie 6.6 Voor iedere Riemann-integreerbare functie f op $[0, 2\pi]$ en iedere $k \in \mathbb{Z}$ heet (6.9) de k -de *Fourier-coëfficiënt* van de functie f , aangeduid met $\mathcal{F}(f)_k$. De rij $\mathcal{F}(f) : k \mapsto \mathcal{F}(f)_k$ van

complexe getallen heet ook wel de *Fourier-getransformeerde* van f . De bijbehorende reeks (6.1) met $c_k = \mathcal{F}(f)_k$, heet de *Fourier-reeks van de functie f* . $\oslash$

Al in de 18e eeuw werd het vermoeden uitgesproken dat de ‘algemene, voldoende nette’ functie gelijk is aan de som van een Fourier-reeks. In de 18e en het begin van de 19e eeuw vonden er verhitte discussies plaats tussen aanhangers van dit vermoeden en tegenstanders, die beargumenteerden dat de sommen van Fourier-reeksen een heel speciale klasse van functies vormen. Dit laatste is zeker het geval voor de lineaire combinaties van eindig veel van de functies $\cos(kx)$ en $\sin(kx)$. Het vermoeden werd in 1829 door Dirichlet bevestigd.

Opmerking 6.7 Dirichlet geloofde dat voor iedere continue 2π -periodieke functie f de rij van de partiële sommen

$$s_l(x) := \sum_{k=-l}^l \mathcal{F}(f)_k e^{ikx}, \quad l \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

voor iedere $x \in \mathbb{R}$ naar $f(x)$ convergeert als $l \rightarrow \infty$. Echter, P. du Bois Reymond construeerde in 1876 een continue 2π -periodieke functie f en een aftelbare dichte deelverzameling D van $\mathbb{R}$, met de eigenschap dat voor iedere $x \in D$ de rij van de partiële sommen $s_l(x)$ onbegrensd is, dus zeker niet convergeert naar $f(x)$. Dat D dicht ligt in $\mathbb{R}$ betekent dat er bij iedere $y \in \mathbb{R}$ en iedere $\delta > 0$ een $x \in D$ is, waarvoor $|x - y| < \delta$. Voor meer informatie, zie bijvoorbeeld Vol. 1, Ch. VIII, §1 in A. Zygmund: *Trigonometric Series*. Cambridge University Press, 1968. $\oslash$

Hoewel niet geldig voor alle continue 2π -periodieke functies, is het bewijs van Dirichlet wel correct voor functies waarvoor een periodeninterval opgedeeld kan worden in een eindig aantal deelintervallen, op ieder waarvan de functie monotoon stijgend of monotoon dalend is. Dit is nog steeds een zeer ruime klasse van functies. Later is de klasse van functies, die in de één of andere zin gelijk zijn aan hun Fourier-reeks, op diverse manieren uitgebreid. Wij geven in deze paragraaf een resultaat dat op vrij eenvoudige manier is te bewijzen.

Is f Riemann-integreerbaar over $[0, 2\pi]$, dan vormen de Fourier-coëfficiënten c_k van f een begrensde rij. Dit lezen we af uit de schatting

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx \right| \leq \int_0^{2\pi} |f(x)| \cdot |e^{-ikx}| dx = \int_0^{2\pi} |f(x)| dx,$$

dus voor iedere $k \in \mathbb{Z}$ geldt dat $|c_k| \leq \text{av}(|f|)$. Anders gezegd, de Fourier-coëfficiënten worden gemajoreerd door het gemiddelde van de absolute waarde van de functie.

Dit impliceert nog niet dat de Fourier-reeks absoluut uniform convergeert. Een idee is nu om de Fourier-coëfficiënten c_k te vervangen door $r^{|k|} c_k$, met $0 < r < 1$, waarbij we r dicht bij 1 denken. De Fourier-reeks met de coëfficiënten $r^{|k|} c_k$ is dan wél absoluut convergent, van de som nemen we vervolgens de limiet voor $r \uparrow 1$. Dit idee staat bekend als de *Abel-Poisson-benaderingsmethode*. Zij leidt tot het volgende resultaat.

Lemma 6.8 *Zij f een continue 2π -periodieke functie op $\mathbb{R}$, met Fourier-coëfficiënten c_k , $k \in \mathbb{Z}$. Dan definieert*

$$f_r(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} c_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{6.11}$$

voor iedere $|r| < 1$ een continue 2π -periodieke functie $f_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Voor $r \uparrow 1$ convergeert deze familie van functies uniform naar de functie f , in de volgende zin: bij iedere $\epsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ met de eigenschap dat als $1 - \delta \leq r < 1$, dan geldt voor iedere $x \in \mathbb{R}$ dat $|f_r(x) - f(x)| \leq \epsilon$.

Bewijs We substitueren (6.9) in het rechterlid van (6.11), waarbij we de integratievariabele x door y vervangen. Op grond van de uniforme convergentie mogen we de sommatie onder het integraalteken brengen, zie Lemma 5.3. Nu geldt dat

$$r^{|k|} e^{-iky} e^{ikx} = r^{|k|} e^{ik(x-y)} = \begin{cases} \left(r e^{i(x-y)}\right)^k & \text{als } k \geq 0, \\ \left(r e^{-i(x-y)}\right)^{-k} & \text{als } k \leq 0. \end{cases}$$

De som over alle gehele k hiervan is gelijk aan de som over alle $k \geq 0$ plus de som over alle $k \leq 0$, verminderd met 1 omdat de term voor $k = 0$ in beide sommen optreedt. De som over alle gehele k wordt daarmee gelijk aan $P_r(x - y)$, waarin

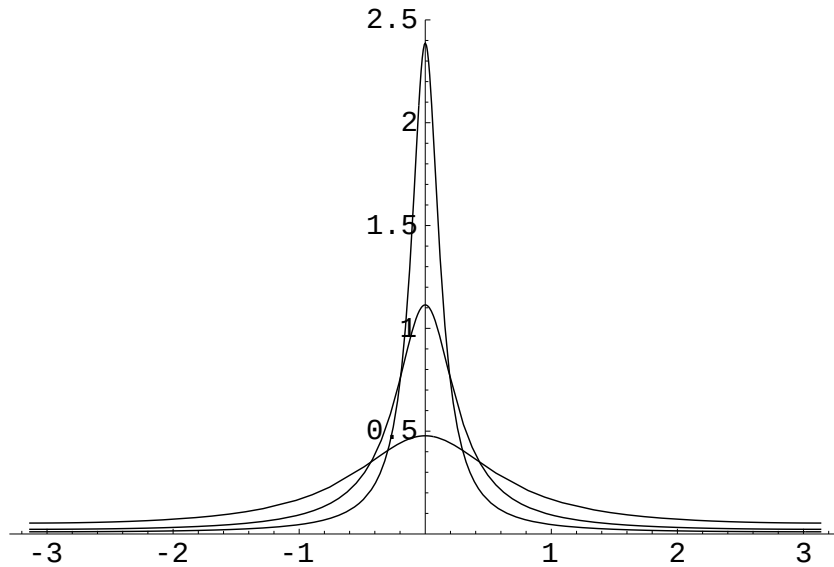
$$P_r(v) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikv} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1 - r e^{iv}} + \frac{1}{1 - r e^{-iv}} - 1 \\ &= \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos v}, \quad v \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

De functie in (6.13) wordt ook wel de *Poisson-kern* genoemd. Hiermee krijgen we dat

$$f_r(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) P_r(x - y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x - v) P_r(v) dv, \quad (6.14)$$

waarbij we voor de tweede identiteit de substitutie van variabelen $y = x - v$ hebben gebruikt en het principe hebben toegepast dat voor een 2π -periodieke functie de integralen over alle intervallen ter lengte 2π aan elkaar gelijk zijn, zie Opmerking 6.5.



De functies $v \mapsto P_r(v)$ voor $r = \frac{1}{2}$, $r = \frac{3}{4}$ en $r = \frac{7}{8}$.

Integratie van de uniform convergente Fourier-reeks in het rechterlid van (6.12) geeft dat

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(v) \, dv = 1,$$

ofwel het gemiddelde van de functie P_r is gelijk is aan 1. Hieruit volgt dat

$$f_r(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-v) - f(x)] P_r(v) \, dv.$$

Zij $0 < a \leq \pi$. Als $a \leq |v| \leq \pi$ dan is

$$0 < P_r(v) \leq P_r(a).$$

De integraal opsplitsend in de integraal over $|v| \leq a$ en de integraal over $a \leq |v| \leq \pi$, krijgen we daarmee de schatting

$$|f_r(x) - f(x)| \leq \sup_{|v| \leq a} |f(x-v) - f(x)| + 2(\max |f|) \cdot P_r(a), \quad (6.15)$$

waarbij we hebben gebruikt dat $|P_r(v)| = P_r(v) \leq P_r(a)$. Hierbij hebben we bij de schatting van de integraal over $|v| \leq a$ nog gebruikt dat

$$a \nu(1_{[-a,a]} P_r) \leq a \nu(P_r) = 1$$

omdat $P_r > 0$, terwijl we bij de schatting van de integraal over $a \leq |v| \leq \pi$ hebben gebruikt dat

$$|f(x-v) - f(x)| \leq |f(x-v)| + |f(x)| \leq 2 \max |f|.$$

Zij nu $\epsilon > 0$ gegeven. De continuïteit van f geeft dat f uniform continu is op ieder begrensde en gesloten interval, zoals bekend uit het college Inleiding Analyse. Dit impliceert dat er een $0 < a \leq \pi$ is, met de eigenschap dat voor iedere $x \in [0, 2\pi]$ geldt dat

$$\sup_{|v| \leq a} |f(x-v) - f(x)| \leq \epsilon/2.$$

Na deze keuze van a krijgen we uit het feit dat $P_r(a)$ naar 0 convergeert als $r \uparrow 1$, dat er een $\delta > 0$ is, met de eigenschap dat als $1 - \delta \leq r < 1$, dan is

$$2(\max |f|) \cdot P_r(a) \leq \epsilon/2.$$

Deze twee schattingen combinerend, krijgen we uit (6.15) dat als $1 - \delta \leq r < 1$, dan geldt voor iedere $x \in [0, 2\pi]$ dat $|f_r(x) - f(x)| \leq \epsilon$. Hieruit volgt dat de functies f_r uniform naar f convergeren als $r \uparrow 1$. $\square$

Gevolg 6.9 Zij f een continue 2π -periodieke functie op $\mathbb{R}$ en zij η een positief reëel getal. Dan is er een eindige verzameling J van gehele getallen en er zijn complexe getallen $\tilde{c}_j$, $j \in J$, met de eigenschap dat voor iedere $x \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$\left| f(x) - \sum_{j \in J} \tilde{c}_j e^{ijx} \right| \leq \eta. \quad (6.16)$$

In woorden: iedere continue 2π -periodieke functie kan uniform benaderd worden door middel van eindige lineaire combinaties van de functies e^{ikx} , $k \in \mathbb{Z}$.

Bewijs Kies $0 < \epsilon < \eta$. Merk op dat $\zeta := \eta - \epsilon > 0$. Vanwege Lemma 6.8 is er een $0 < r < 1$ met de eigenschap dat voor iedere $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $|f(x) - f_r(x)| \leq \epsilon$. Schrijf, voor ieder positief geheel getal n ,

$$s_{r,n}(x) := \sum_{j=-n}^n r^{|j|} c_j e^{ijx}.$$

Omdat de Fourier-reeks in (6.11) uniform convergeert, is er een n met de eigenschap dat voor iedere $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $|f_r(x) - s_{r,n}(x)| \leq \zeta$. Dit geeft dat voor iedere $x \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$|f(x) - s_{r,n}(x)| \leq |f(x) - f_r(x)| + |f_r(x) - s_{r,n}(x)| \leq \epsilon + \zeta = \eta.$$

Hiermee is het gevolg bewezen, met J gelijk aan de verzameling der $j \in \mathbb{Z}$ met $-n \leq j \leq n$ en $\tilde{c}_j = r^{|j|} c_j$. $\square$

Opmerking 6.10 Opmerking 6.7 laat zien dat de uniforme convergentie niet altijd gerealiseerd kan worden door te nemen $J = \{j \in \mathbb{Z} \mid -n \leq j \leq n\}$ en $\tilde{c}_j$ gelijk aan de j -de Fourier-coëfficiënt c_j van f . Het is, behalve voor heel eenvoudige functies f , praktisch ondoenlijk om de coëfficiënten $\tilde{c}_j$, $j \in J$ te bepalen, waarvoor het maximum over alle $x \in [0, 2\pi]$ van de getallen in het linkerlid van (6.16) minimaal is. $\otimes$

Stelling 6.11 Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continu en periodiek met periode 2π . Noteer de Fourier-coëfficiënten van f met c_k , $k \in \mathbb{Z}$. Als $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| < \infty$, dan is de som van de Fourier-reeks van f gelijk aan f .

Bewijs Zij $\epsilon > 0$ gegeven. Daarbij bestaat een rangnummer l , waarvoor

$$\sum_{|k| > l} |c_k| \leq \epsilon. \quad (6.17)$$

Schrijf

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

voor de som van de Fourier-reeks van f . Deze reeks is uniform convergent op grond van Stelling 6.2.

We gaan deze functie vergelijken met (6.11), waarbij we zowel voor g als voor f_r de som splitsen in de som over de k met $|k| \leq l$ en de som over de k met $|k| > l$, waarbij de laatste gemajoreerd wordt door ϵ , op grond van (6.17) en het feit dat $|r^{|k|}| \leq 1$. Ook nog gebruikend dat $1 - r^{|k|} \leq 1 - r^l$ als $0 < r < 1$ en $|k| \leq l$, krijgen we dat

$$|g(x) - f_r(x)| \leq 2\epsilon + (1 - r^l) \sum_{k=-l}^l |c_k|.$$

Nu convergeren zowel $1 - r^l$ als $|f_r(x) - f(x)|$ naar 0 als $r \uparrow 1$, dus de limiet voor $r \uparrow 1$ van het rechterlid in

$$|g(x) - f(x)| \leq |g(x) - f_r(x)| + |f_r(x) - f(x)| \leq 2\epsilon + (1 - r^l) \sum_{k=-l}^l |c_k| + |f_r(x) - f(x)|$$

nemend, krijgen we dat $|g(x) - f(x)| \leq 2\epsilon$. Omdat dit het geval is voor iedere $\epsilon > 0$, is de conclusie dat $g(x) = f(x)$. $\square$

Gevolg 6.12 Zij g en h continue 2π -periodieke complexwaardige functies op $\mathbb{R}$ met dezelfde Fourier-coëfficiënten, dat wil zeggen, voor iedere $k \in \mathbb{Z}$ geldt dat $\mathcal{F}(g)_k = \mathcal{F}(h)_k$. Dan is $g = h$, dat wil zeggen, voor iedere $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $g(x) = h(x)$.

Bewijs De functie $f := g - h$ is continu en 2π -periodiek en voor iedere $k \in \mathbb{Z}$ geldt dat

$$c_k := \mathcal{F}(f)_k = \mathcal{F}(g - h)_k = \mathcal{F}(g)_k - \mathcal{F}(h)_k = 0.$$

Dan is zeker $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| < \infty$, dus vanwege Stelling 6.11 is $g(x) - h(x) = f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} = 0$. $\square$

Opmerking 6.13 We voeren wat notaties in om de gevolgen van Stelling 6.2, Stelling 6.4, Stelling 6.11 en Gevolg 6.12 zo duidelijk mogelijk neer te zetten. Bij eerste lezing ziet het er misschien nogal geleerd uit, maar als je alles goed laat inzinken, dan zal blijken dat het niet om diepe dingen gaat.

Noteer $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ voor de verzameling van alle continue en 2π -periodieke functies $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Zij $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ de verzameling van alle rijtjes $c = (c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ van complexe getallen. Met de puntsgewijze optelling en complexe scalairvermenigvuldiging vormt $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ een complexe lineaire ruimte. Met de coördinaatsgewijze optelling en scalairvermenigvuldiging vormt $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ een lineaire ruimte.

Is $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, dan hebben wij in Definitie 6.6 met $\mathcal{F}(f) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ zijn Fourier-getransformeerde aangeduid, dat wil zeggen, zijn rij van Fourier-coëfficiënten. De afbeelding $\mathcal{F} : f \mapsto \mathcal{F}(f)$, die aan een continue 2π -periodieke functie zijn rij van Fourier-coëfficiënten toevoegt, heet de *Fourier-transformatie van 2π -periodieke functies*. Men gaat direct na dat voor iedere $f, g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, $a \in \mathbb{C}$ en $k \in \mathbb{Z}$ geldt dat

$$\mathcal{F}(f + g)_k = \mathcal{F}(f)_k + \mathcal{F}(g)_k, \quad \mathcal{F}(af)_k = a \mathcal{F}(f)_k.$$

Anders gezegd, de afbeelding $\mathcal{F} : C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ is een lineaire afbeelding van de lineaire ruimte $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ naar de lineaire ruimte $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. Uit het college Lineaire Algebra weten we dat dit impliceert dat de beeldruimte een lineaire deelruimte is van $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. Dit leidt tot de inclusie

$$\mathcal{F}(C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})) \subset \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$$

van lineaire ruimten. Per definitie is $\mathcal{F}$ surjectief van $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ naar $\mathcal{F}(C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}))$, terwijl Gevolg 6.12 zegt dat $\mathcal{F}$ injectief is van $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ naar $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$. Dit betekent dat $\mathcal{F}$ een bijectieve lineaire afbeelding is van $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ naar $\mathcal{F}(C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}))$.

Schrijf

$$l^1(\mathbb{Z}) := \left\{ c \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \mid \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| < \infty \right\}. \quad (6.18)$$

$l^1(\mathbb{Z})$ is een lineaire deelruimte van $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$.

Is $c \in l^1(\mathbb{Z})$, dan lezen we uit Stelling 6.2 af dat de bijbehorende Fourier-reeks

$$\mathcal{S}(c) : x \mapsto \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

een continue en 2π -periodieke complexwaardige functie op $\mathbb{R}$ definieert. Het is duidelijk dat deze Fourier-reeks op een lineaire manier van de coëfficiënten afhangt. Anders gezegd, de afbeelding $\mathcal{S}$, die aan een rijtje $c \in l^1(\mathbb{Z})$ de som van zijn Fourier-reeks toevoegt, is een lineaire afbeelding van

$l^1(\mathbb{Z})$ naar $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Dit impliceert dat de beeldruimte een lineaire deelruimte is van $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, hetgeen leidt tot de inclusie

$$S(l^1(\mathbb{Z})) \subset C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$$

van lineaire ruimten. Uit de definitie volgt dat S surjectief is van $l^1(\mathbb{Z})$ naar $S(l^1(\mathbb{Z}))$.

Zij $c \in l^1(\mathbb{Z})$ en $f = S(c)$. Stelling 6.4 impliceert dat voor iedere $k \in \mathbb{Z}$ geldt dat $\mathcal{F}(f)_k = c_k$. Maar dit betekent dat $\mathcal{F}(S(c)) = c$. Met andere woorden, $\mathcal{F} \circ S$ is gelijk aan de identiteit op $l^1(\mathbb{Z})$. Ook lezen we hieruit af dat

$$l^1(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{F}(C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}))$$

waarbij het linkerlid een lineaire deelruimte is van het rechterlid.

Dit impliceert op zijn beurt dat de afbeelding $S : l^1(\mathbb{Z}) \rightarrow C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ injectief is. Immers, als $c, c' \in l^1(\mathbb{Z})$ en $S(c) = S(c')$, dan geeft toepassen van $\mathcal{F}$ op het linker- en rechterlid dat $c = c'$. De conclusie is dat S een bijectieve lineaire afbeelding van $l^1(\mathbb{Z})$ naar $S(l^1(\mathbb{Z}))$ definieert, met inverse gelijk aan de beperking tot $S(l^1(\mathbb{Z}))$ van de lineaire afbeelding $\mathcal{F} : C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$.

We hadden eerder geconcludeerd dat $\mathcal{F}$ bijectief is van $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ naar $\mathcal{F}(C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}))$. De beperking van

$$\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{F}(C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})) \rightarrow C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \quad (*)$$

tot de lineaire deelruimte $l^1(\mathbb{Z})$ van $\mathcal{F}(C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}))$ is gelijk aan S . Men is geneigd om (*) ook met S aan te duiden, hoewel Opmerking 6.7 impliceert dat er $c \in \mathcal{F}(C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}))$ zijn waarvoor de reeks $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ divergeert voor alle x in een aftelbare dichte deelverzameling van de reële as. $\oslash$

We gaan nu aantonen dat iedere tweemaal continu differentieerbare functie f op $\mathbb{R}$, die bovendien periodiek is met periode 2π , een absoluut uniform convergente Fourier-reeks heeft. Vanwege Stelling 6.11 is dan f gelijk aan zijn eigen Fourier-reeks. Hiermee is aangetoond dat de klasse van functies waarvoor we zeker zijn dat ze gelijk zijn aan hun eigen Fourier-reeks, behoorlijk groot is. We beginnen met een lemma dat zó vaak in toepassingen wordt gebruikt, dat het als een belangrijke motivatie voor Fourier-reksen gezien kan worden.

Lemma 6.14 *Zij f een continu differentieerbare en 2π -periodieke functie op $\mathbb{R}$. Dan geldt*

$$\mathcal{F}(f')_k = i k \mathcal{F}(f)_k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (6.19)$$

In woorden: de k -de Fourier-coëfficiënt van de afgeleide is gelijk aan $i k$ maal de k -de Fourier-coëfficiënt van de functie.

Bewijs Dit volgt door een partiële integratie uit te voeren in (6.9), met f vervangen door f' , en op te merken dat de randtermen tegen elkaar wegvallen vanwege de 2π -periodiciteit van f . $\square$

Stelling 6.15 *Zij f een 2π -periodieke tweemaal continu differentieerbare functie op $\mathbb{R}$. Dan is de Fourier-reeks van f absoluut uniform convergent, met som gelijk aan f .*

Bewijs Tweemaal toepassen van Lemma 6.14 geeft voor iedere $k \in \mathbb{Z}$ met $k \neq 0$ dat

$$\mathcal{F}(f'')_k = i k \mathcal{F}(f')_k = -k^2 \mathcal{F}(f)_k.$$

Voor iedere continue 2π -periodieke functie g op $\mathbb{R}$ geldt de schatting

$$|\mathcal{F}(g)_k| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} g(x) e^{-ikx} dx \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(x) e^{-ikx}| dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(x)| dx,$$

waarin het rechterlid gelijk is aan het gemiddelde $\text{av}(|g|)$ van de functie $|g|$. Dit toepassend met $g = f''$ krijgen we dat

$$|\mathcal{F}(f)_k| = |\mathcal{F}(f'')_k|/k^2 \leq \text{av}(|f''|)/k^2.$$

Omdat

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1,$$

concluderen we dat de som van de absolute waarden van de Fourier-coëfficiënten van f eindig is. $\square$

Is een functie f op een interval I van de vorm $I = [a, a + 2\pi]$ gedefinieerd, dan is er een eenduidig bepaalde $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ die 2π -periodiek is en waarvoor de beperking van $\tilde{f}$ tot I gelijk is aan f . Deze wordt gegeven door $\tilde{f}(x) = f(x - 2\pi n)$ als $a + 2\pi n \leq x < a + 2\pi(n + 1)$. De 2π -periodieke uitbreiding $\tilde{f}$ van f wordt gewoonlijk ook met f aangeduid. We geven de waarschuwing dat als f continu is op I , dan hoeft $\tilde{f}$ niet continu op $\mathbb{R}$ te zijn: we krijgen dat $\tilde{f}$ continu is op $\mathbb{R}$ dan en slechts dan als

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) = f(a + 2\pi).$$

Voorbeeld 6.16 De 2π -periodieke functie f op $\mathbb{R}$, waarvoor $f(x) = |x|$ als $x \in]-\pi, \pi]$, is continu. Maak een schets! De Fourier-coëfficiënten worden gegeven door

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{\pi}{2},$$

terwijl we voor $k \neq 0$ de integraal in

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \frac{1}{-ik} \frac{d}{dx} e^{-ikx} dx$$

schrijven als de som van de integraal over $[-\pi, 0]$ en de integraal over $[0, \pi]$. Op ieder van deze integralen passen we een partiële integratie toe, hetgeen dan uiteindelijk leidt tot

$$c_k = \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}, \quad k \neq 0.$$

Hieruit zien we dat de Fourier-reeks van f absoluut uniform convergeert. Opmerkend dat $c_k = 0$ als k even is en $k \neq 0$ en $c_k = -2/\pi k^2$ als k oneven is, krijgen we nu op grond van Stelling 6.11 dat

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos((2j-1)x)}{(2j-1)^2}, \quad |x| \leq \pi, \quad (6.20)$$

waarbij de convergentie uniform is op grond van Stelling 6.2.

Door $x = 0$ in te vullen vinden we dat

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad (6.21)$$

Noteren we

$$s := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

dan geeft splitsing van de som over $n = 2j$ en over $n = 2j - 1$, met $j \in \mathbb{Z}_{>0}$, dat $s = \frac{s}{4} + \frac{\pi^2}{8}$, dus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (6.22)$$

Deze identiteit is afkomstig van Euler, uit het midden van de 18^e eeuw. $\odot$

6.2 De Dirichlet-kern en Functies met Sprongen

We gaan hier nog wat verder in op de subtiële kwestie van de puntsgewijze convergentie van Fourier-reeksen, als f niet voldoet aan de voorwaarden van Stelling 6.11. De nu volgende analyse gaat terug tot het eerste bewijs, van Dirichlet uit 1829, dat de ‘algemene’ functie f gelijk is aan zijn eigen Fourier-reeks.

Zij f een 2π -periodieke functie op $\mathbb{R}$, die Riemann-integreerbaar is over het interval ter lengte 2π , zij c_k de k -de Fourier-coëfficiënt van f en zij $s_l(x)$ de partiële som in (6.6). De voor de hand liggende methode om de convergentie van $s_l(x)$ voor $l \rightarrow \infty$ te onderzoeken is om (6.9) in (6.6) te substitueren, waarbij we de integratievariabele x door v vervangen en de sommatie onder het integraalteken te brengen. Dit geeft dat

$$s_l(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}} f(x-v) D_l(v) dv, \quad (6.23)$$

waarin het symbool $\int_{\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}}$ betekent dat we integreren over een periodeninterval $[a, a + 2\pi]$ waarvan het beginpunt a vrij gekozen mag worden. De functie $D_l(v)$ in (6.23) is daarbij gegeven door

$$D_l(v) := \sum_{k=-l}^l e^{ikv} \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} &= e^{-ilv} \sum_{n=0}^{2l} (e^{iv})^n = e^{-ilv} \frac{e^{i(2l+1)v} - 1}{e^{iv} - 1} = \frac{e^{i(l+1)v} - e^{-ilv}}{e^{iv} - 1} \\ &= \frac{e^{i(l+\frac{1}{2})v} - e^{-i(l+\frac{1}{2})v}}{e^{i\frac{1}{2}v} - e^{-i\frac{1}{2}v}} = \frac{\sin((l+\frac{1}{2})v)}{\sin(\frac{1}{2}v)}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

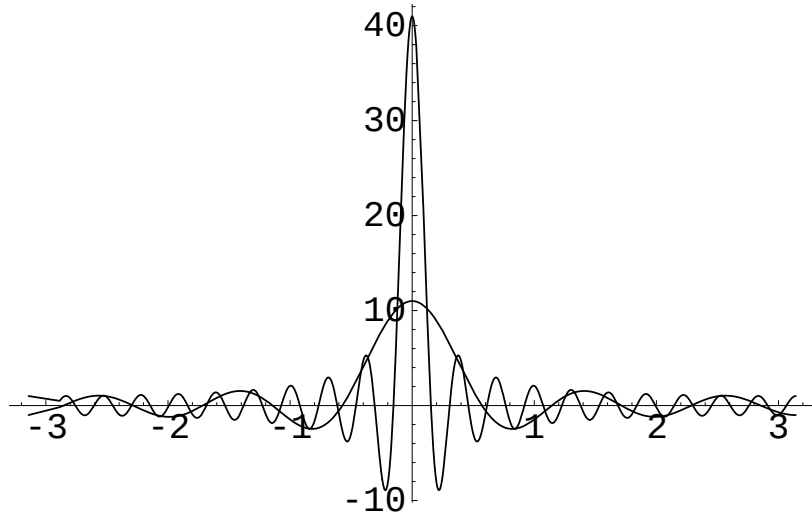
Deze functie staat bekend als de *Dirichlet-kern*. Het probleem dat $\sin(\frac{1}{2}v) = 0$ als $v = 0$ is in de uitdrukking (6.25) slechts schijnbaar. Immers, uit de definitie (6.24) volgt dat D_l een analytische 2π -periodieke functie op $\mathbb{R}$ is, met $D_l(0) = 2l + 1 =$ het aantal termen in de partiële som.

Het gemiddelde nemen van (6.24) geeft dat

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}} D_l(v) dv = 1. \quad (6.26)$$

Vermenigvuldigen we (6.26) met $f(x)$ en trekken het we het resultaat af van (6.23), dan krijgen we op analoge wijze als in het bewijs van Lemma 6.8 dat

$$s_l(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}} (f(x-v) - f(x)) D_l(v) dv \quad (6.27)$$



De functies $v \mapsto D_5(v)$ en $v \mapsto D_{20}(v)$.

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-v) - f(x)}{\sin(\frac{1}{2}v)} \sin((l + \frac{1}{2})v) dv. \quad (6.28)$$

Als v wegblijft van 0 dan convergeert de functie $D_l(v)$ *niet* uniform naar nul als $l \rightarrow \infty$. Om toch te krijgen dat voor iedere $\delta > 0$ de bijdrage van de integraal over de v met $\delta \leq |v| \leq \pi$ naar nul gaat als $l \rightarrow \infty$, schrijven we

$$\sin((l + \frac{1}{2})v) = -\frac{1}{l + \frac{1}{2}} \frac{d}{dv} \cos((l + \frac{1}{2})v),$$

en passen in (6.28) een partiële integratie toe. Dit werkt als de functie f continu differentieerbaar is. We kunnen zelfs nog toelaten dat f in een periodeninterval een eindig aantal punten heeft waar f discontinu verspringt.

Definitie 6.17 De 2π -periodieke functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heet *stuksgewijs continu differentieerbaar* als er eindig veel punten $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq N$, zijn met de volgende eigenschappen

- i) Voor iedere $1 \leq i \leq N$ geldt dat $a_{i-1} < a_i$. Verder is $a_N = a_0 + 2\pi$.
- ii) Voor iedere $1 \leq i \leq N$ is er een continu differentieerbare functie f_i op $[a_{i-1}, a_i]$, met de eigenschap dat $f(x) = f_i(x)$ als $a_{i-1} < x < a_i$.

Iedere $j \in \mathbb{Z}$ kan geschreven kan worden als $j = i + kN$ voor eenduidig bepaalde $1 \leq i \leq N$ en $k \in \mathbb{Z}$, daarvoor schrijven we $a_j := a_i + k2\pi$. De functie $f_j : [a_{j-1}, a_j] \rightarrow \mathbb{C}$ wordt vervolgens gedefinieerd door middel van $f_j(x + k2\pi) := f_i(x)$ als $a_{i-1} \leq x \leq a_i$. Omdat $f_i(x) = f(x) = f(x + k2\pi)$ als $a_{i-1} < x < a_i$, heeft de beperking van f tot het open interval $]a_{j-1}, a_j[$ de functie f_j als continu differentieerbare uitbreiding tot het gesloten interval $[a_{j-1}, a_j]$.

Voor iedere $j \in \mathbb{Z}$ definiëren we tenslotte $f_+(a_j) := f_{j+1}(a_j)$ en $f_-(a_j) := f_j(a_j)$. Merk op dat

$$\lim_{x \downarrow a_j} f(x) = f_+(a_j) \quad \text{en} \quad \lim_{x \uparrow a_j} f(x) = f_-(a_j), \quad (6.29)$$

welke formules zowel zeggen dat de genoemde limieten bestaan alsook opgevat kunnen worden als definities van de getallen $f_+(a_j)$ en $f_-(a_j)$. $\otimes$

De volgende stelling laat zien dat als x niet al te dicht bij de sprongpunten komt, dan wordt de functie $f(x)$ uniform benaderd door de partiële sommen $s_l(x)$ voor grote waarden van l . Dit resultaat impliceert dat voor iedere $\eta > 0$ en iedere j de partiële sommen $s_l(x)$ uniform naar $f(x)$ convergeren op het interval $[a_{j-1} + \eta, a_j - \eta]$. Op zijn beurt impliceert dit dat voor iedere $x \in \mathbb{R}$ die niet gelijk is aan een van de sprongpunten a_j geldt dat $s_l(x) \rightarrow f(x)$ als $l \rightarrow \infty$.

Stelling 6.18 *Veronderstel dat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ een stuksgewijs continu differentieerbare 2π -periodieke functie is als in Definitie 6.17. Dan zijn er bij iedere $\epsilon > 0$ positieve getallen M en l_0 met de volgende eigenschap. Als $l \geq l_0$ en $|x - a_j| \geq M/(l + \frac{1}{2})$ voor iedere j , dan is $|s_l(x) - f(x)| \leq \epsilon$.*

Bewijs We noteren $k := l + \frac{1}{2}$ en

$$q_x(v) = \frac{f(x-v) - f(x)}{\sin(v/2)} = \frac{f(x-v) - f(x)}{v} \frac{v}{\sin(v/2)}.$$

Neem aan dat $\delta > 0$ en dat voor iedere j geldt dat $|a_j - x| \geq \delta$. Dan ligt er geen sprongpunt a_j van f tussen x en $x-v$ als $|v| < \delta$. Dit impliceert dat $|q_x(v)| \leq C D$ als $|v| < \delta$, waarin C het maximum is van de absolute waarden van de afgeleide van f op de deelintervallen waarop f differentieerbaar is en D het maximum is van de absolute waarde van de continue functie $v \mapsto v/\sin(v/2)$ op het interval $[-\pi, \pi]$. Omdat ook $|\sin(kv)| \leq 1$, krijgen we dat

$$\left| \int_{-\delta}^{\delta} q_x(v) \sin(kv) dv \right| \leq 2\delta C D.$$

De integraal van de functie $q_x(v) \sin(kv)$ over de resterende v met $\delta \leq |v| \leq \pi$ splitsen we in integralen over de eindig vele v -intervallen waarop de functie q_x continu differentieerbaar is. Op ieder van die intervallen schrijven we

$$\sin(kv) = -\frac{1}{k} \frac{d \cos(kv)}{dv}$$

en passen een partiële integratie toe. Omdat voor de randpunten w geldt dat $|w| \geq \delta$ en $|q_x(w)| \leq E/|w|$ voor een constante E , krijgen we dat de absolute waarde van de som van de randtermen kleiner of gelijk is aan een constante maal $1/k\delta$. De integraal die na de partiële integratie ontstaat heeft als integrand $\frac{1}{k} q'_x(v) \cos(kv)$, waarin

$$q'_x(v) = -\frac{f'(x-v)}{\sin(v/2)} - \frac{1}{2} \frac{f(x-v) - f(x)}{\sin^2(v/2)} \cos(v/2).$$

De absolute waarde hiervan is kleiner of gelijk aan een constante F maal $1/v^2$. De absolute waarde van de integraal van $\frac{1}{k} q'_x(v) \cos(kv)$ over een interval dat op afstand $\geq \delta$ blijft van 0 is daarmee kleiner of gelijk aan

$$\frac{F}{k} \int_{\delta}^{\infty} v^{-2} dv = \frac{F}{k\delta}.$$

Dit levert uiteindelijk dat de absolute waarde van de integraal van de functie $q_x(v) \sin(kv)$ over de v met $\delta \leq |v| \leq \pi$ kleiner of gelijk is aan een constante maal $1/k\delta$.

De conclusie is dat de absolute waarde van de integraal in (6.28) uniform klein is als we δ en $1/k$ voldoende klein nemen. Dit kan gerealiseerd worden door $\delta = M/k = M/(l + \frac{1}{2})$ te nemen met M groot en vervolgens l veel groter dan M te nemen. $\square$

Opmerking Als f sprongen maakt, dan convergeren de partiële sommen s_l niet uniform op $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ naar f . Immers, vanwege de continuïteit van de s_l zou dit op grond van Stelling 5.5 impliceren dat de limietfunctie continu is, hetgeen niet het geval is zodra er een j is met $f_+(a_j) \neq f_-(a_j)$.

Voorbeeld 6.19 Beschouw de zaagtandfunctie f die ontstaat als de 2π -periodieke uitbreiding van de functie $f(x) = x$ op $]0, 2\pi[$. Voor de waarde $f(0) = f(2\pi)$ van f in het sprongpunt mag u nemen wat u wilt. Merk op dat $f_+(0) = 0$ en $f_-(0) = f_-(2\pi) = 2\pi$. Maak een schets!

De Fourier-coëfficiënten worden gegeven door

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} (2\pi)^2 = \pi$$

terwijl we voor $k \neq 0$ met behulp van een partiële integratie krijgen dat

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x \frac{1}{-ik} \frac{d}{dx} e^{-ikx} dx = -\frac{1}{ik}$$

Hiermee is de Fourier-reeks van f gegeven door

$$\pi - \sum_{k \geq 1} \frac{2 \sin(kx)}{k}.$$

Voor $x = 0$ convergeert deze, op een flauwe manier, met som gelijk aan π , hetgeen precies midden tussen $f_+(0) = 0$ en $f_-(0) = 2\pi$ in ligt. Dit suggereert dat $f(0) = \pi$ de natuurlijke keuze is voor de waarde van f in het sprongpunt.

Stelling 6.18 impliceert anderzijds dat

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^l \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi, \quad (6.30)$$

een klassieke formule. $\oslash$

We onderzoeken nu het gedrag van $s_l(x)$ voor grote waarden van l in de resterende x -intervallen, waarbij x op een afstand van de orde $1/(l + \frac{1}{2})$ ligt van een punt $p = a_j$, waar de functie f een sprong maakt. Hiertoe maken we de substitutie van variabelen $x = p + y/(l + \frac{1}{2})$, met y begreind. Dit blijkt een verrassend limietpatroon op te leveren als $l \rightarrow \infty$.

Het limietpatroon wordt beschreven in termen van de functie

$$I(y) := \int_0^y \frac{\sin z}{z} dz, \quad (6.31)$$

waarvan we eerst een aantal eigenschappen verzamelen. De substitutie van variabelen $z \mapsto -z$ in de integraal laat zien dat $I(-y) = -I(y)$, dus het gedrag van $I(y)$ voor $y < 0$ kan afgelezen worden uit het gedrag van $I(y)$ voor $y > 0$.

Lemma 6.20 De functie $I(y)$ in (6.31) convergeert naar $\pi/2$ als $y \rightarrow \infty$. Voor ieder geheel getal $m \geq 1$ is de functie $I(y)$ monotoon strikt stijgend, resp. dalend in $[(2m-2)\pi, (2m-1)\pi]$, resp. $[(2m-1)\pi, 2m\pi]$. De rij $I((2m-1)\pi)$, $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, van lokale maxima is monotoon strikt dalend en de rij $I(2m\pi)$, $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, van lokale minima is monotoon strikt stijgend. Omdat de limiet voor $m \rightarrow \infty$ van ieder van deze rijen gelijk is aan $\pi/2$, volgt hieruit ook dat $I((2m-1)\pi) > \pi/2 > I(2m\pi)$ voor iedere $m \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Bewijs De functie $\frac{\sin z}{z}$, uitgebreid met de waarde 1 in $z = 0$, is C^∞ op $\mathbb{R}$, zie Voorbeeld 2.14. Dit impliceert dat $\frac{z}{\sin z}$ een C^∞ functie definieert op het complement van de getallen $k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$ en $k \neq 0$, met waarde in $z = 0$ eveneens gelijk aan 1. Opnieuw Gevolg 2.13 toepassend, volgt hieruit dat $\frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \left(\frac{z}{\sin z} - 1 \right)$ een C^∞ functie definieert op $] -\pi, \pi[$, hetgeen impliceert dat de functie

$$\phi(v) := \frac{1}{\sin(v/2)} - \frac{1}{v/2}$$

een C^∞ functie definieert op $] -2\pi, 2\pi[$.

We noteren weer $k = l + \frac{1}{2}$. Er geldt nu dat

$$\begin{aligned} 2\pi - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(kv)}{v/2} dv &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(kv)}{\sin(v/2)} dv - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(kv)}{v/2} dv \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \phi(v) \sin(kv) dv = \frac{1}{k} \int_{-\pi}^{\pi} \phi'(v) \cos(kv) dv, \end{aligned}$$

waarbij de eerste identiteit volgt uit (6.26) en (6.25) en in de laatste identiteit een partiële integratie is toegepast. Daarbij treden geen randtermen op, omdat $\cos(kv) = 0$ als $v = \pm\pi$ en $k = l + \frac{1}{2}$.

Anderzijds is

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(kv)}{v/2} dv = 4 \int_0^{\pi} \frac{\sin(kv)}{v} dv = 4 \int_0^{k\pi} \frac{\sin z}{z} dz,$$

waarbij in de tweede identiteit de substitutie van variabelen $v = z/k$ is toegepast. Omdat uit de voorgaande alinea volgt dat het linkerlid naar 2π convergeert als $k \rightarrow \infty$, zien we dat $I(k\pi) \rightarrow \pi/2$ als $k = l + \frac{1}{2}$, $l \in \mathbb{Z}$ en $l \rightarrow \infty$.

Als $0 < a < b$, dan geeft een partiële integratie dat

$$I(b) - I(a) = \int_a^b \frac{\sin z}{z} dz = \frac{\cos a}{a} - \frac{\cos b}{b} - \int_a^b \frac{\cos z}{z^2} dz,$$

waarbij

$$\left| \int_a^b \frac{\cos z}{z^2} dz \right| \leq \int_a^b \frac{|\cos z|}{z^2} dz \leq \int_a^b \frac{1}{z^2} dz \leq \frac{1}{a}.$$

Nemen we $b = k\pi$, met $k = l + \frac{1}{2}$, $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, dan krijgen we dat

$$|I(k\pi) - I(a)| \leq \frac{2}{a}$$

als $k\pi > a$. In combinatie met het voorgaande geeft dit dat

$$\left| \frac{\pi}{2} - I(a) \right| \leq \left| \frac{\pi}{2} - I(k\pi) \right| + |I(k\pi) - I(a)| \leq \left| \frac{\pi}{2} - I(k\pi) \right| + \frac{2}{a}.$$

Nemen we hierin de limiet voor $l \rightarrow \infty$, dan krijgen we dat $|\frac{\pi}{2} - I(a)| \leq 2/a$, waarmee de eerste uitspraak van het lemma is bewezen.

De uitspraken over de monotonie van $I(y)$ volgen uit de opmerking dat $I'(z) = \frac{\sin z}{z}$ positief, resp. negatief is als $z \in](2m-2)\pi, (2m-1)\pi[$, resp. $z \in](2m-1)\pi, 2m\pi[$.

Voor het monotoon dalen van de lokale maxima schrijven we

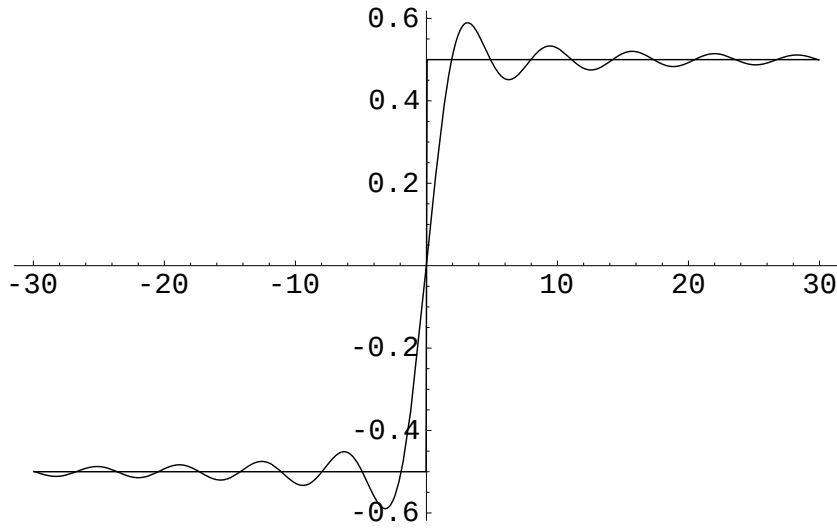
$$\begin{aligned} I((2m+1)\pi) - I((2m-1)\pi) &= \int_{(2m-1)\pi}^{(2m+1)\pi} \frac{\sin z}{z} dz \\ &= \int_{(2m-1)\pi}^{2m\pi} \left(\frac{\sin z}{z} + \frac{\sin(z+\pi)}{z+\pi} \right) dz = \int_{(2m-1)\pi}^{2m\pi} \sin z \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+\pi} \right) dz < 0, \end{aligned}$$

omdat $\sin z < 0$ als $(2m-1)\pi < z < 2m\pi$.

Op analoge wijze volgt het monotoon stijgen van de lokale minima uit

$$I(2m\pi) - I((2m+2)\pi) = \int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi} \sin z \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+\pi} \right) dz > 0,$$

omdat $\sin z > 0$ als $2m\pi < z < (2m+1)\pi$. □



De functies $y \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^y \frac{\sin z}{z} dz$ en $z \mapsto \frac{1}{2} \operatorname{sgn} z$.

Stelling 6.21 Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ een stuksgewijs continu differentieerbare 2π -periodieke functie en zij p een punt waar f een sprong maakt. Dan geldt voor de partiële sommen $s_l(x)$ dat

$$\lim_{l \rightarrow \infty} s_l \left(p + \frac{y}{l + \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} [f_+(p) + f_-(p)] + [f_+(p) - f_-(p)] \frac{1}{\pi} \int_0^y \frac{\sin z}{z} dz, \quad (6.32)$$

waarbij voor iedere $C > 0$ de convergentie uniform is voor alle $y \in [-C, C]$.

Bewijs We noteren weer $k = l + \frac{1}{2}$. We gaan nu uit van de formule (6.23) voor $s_l(x)$, het gemiddelde van de functie

$$g_x(v) = \frac{f(x-v)}{\sin(v/2)} \sin(kv).$$

Zij $M > 0$ gegeven. Net als in het bewijs van Stelling 6.18 levert een partiële integratie dat de absolute waarde van de integraal over de v met $0 \leq M/k \leq |v| \leq \pi$ van de functie $g_x(v)$ kleiner of gelijk is aan een constante maal $1/M$.

Zij nu $-M \leq y \leq M$. De substituties van variabelen $x = p + y/k$ en $v = z/k$ geven dat

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-M/k}^{M/k} f(x-v) D_l(v) dv = \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \frac{\sin z}{k \sin(z/2k)} f\left(p + \frac{y-z}{k}\right) dz,$$

waarin $k = l + \frac{1}{2}$. Als $z < y$, resp. $z > y$ en l is voldoende groot, dan ligt $f(p + (y-z)/k)$ dicht bij $f_+(p)$, resp. $f_-(p)$, uniform voor $y, z \in [-M, M]$.

Taylor-ontwikkeling van de sinus geeft verder dat

$$k \sin(z/2k) = \frac{z}{2} + k \mathcal{O}((z/k)^3) = \frac{z}{2} (1 + \mathcal{O}(k^{-2})), \quad k \rightarrow \infty,$$

waarin $\mathcal{O}(p)$ betekent dat de absolute waarde van de term in kwestie kleiner of gelijk is aan een constante maal p . Hieruit volgt dat

$$\frac{1}{k \sin(z/2k)} = \frac{2}{z} \frac{1}{1 + \mathcal{O}(k^{-2})} = \frac{2}{z} (1 + \mathcal{O}(k^{-2})), \quad k \rightarrow \infty,$$

uniform voor $z \in [-M, M]$. Dit impliceert dat de integraal voor $k \rightarrow \infty$ convergeert naar

$$\begin{aligned} & \frac{f_+(p)}{\pi} \int_{-M}^y \frac{\sin z}{z} dz + \frac{f_-(p)}{\pi} \int_y^M \frac{\sin z}{z} dz \\ &= [f_+(p) + f_-(p)] \frac{1}{\pi} \int_0^M \frac{\sin z}{z} dz + [f_+(p) - f_-(p)] \frac{1}{\pi} \int_0^y \frac{\sin z}{z} dz. \end{aligned}$$

Hierbij hebben we in de laatste identiteit gebruikt dat

$$\int_y^0 \frac{\sin z}{z} dz = - \int_0^y \frac{\sin z}{z} dz \quad \text{en} \quad \int_{-M}^0 \frac{\sin z}{z} dz = \int_0^M \frac{\sin z}{z} dz.$$

Om de uitspraak van de stelling te bewijzen, kiezen we eerst $M \geq C$ zo groot dat $1/M$ en

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^M \frac{\sin z}{z} dz - \frac{1}{2} \right|$$

zo klein zijn als maar gewenst. Door vervolgens $l \geq l_0$ met l_0 voldoende groot te kiezen, zien we dat het verschil tussen $s_l\left(p + \frac{y}{l+\frac{1}{2}}\right)$ en het rechterlid in (6.32) net zo klein is als gewenst, uniform voor alle $y \in [-C, C]$. $\square$

Het is opmerkelijk dat het limietpatroon in (6.32) alleen afhangt van de waarden van $f_+(p)$ en $f_-(p)$ en niet van het verdere gedrag van de stuksgewijs continu differentieerbare functie f .

Invullen van $y = 0$ in (6.32) geeft dat $s_l(p)$ voor $l \rightarrow \infty$ convergeert naar het gemiddelde $(f_+(p) + f_-(p))/2$ van $f_+(p)$ en $f_-(p)$, als $l \rightarrow \infty$.

Als $y > 0$, dan is het instructief om (6.32) te schrijven in de vorm

$$\lim_{l \rightarrow \infty} s_l \left(p + \frac{y}{l + \frac{1}{2}} \right) = f_+(p) + [f_+(p) - f_-(p)] \left[\frac{1}{\pi} \int_0^y \frac{\sin z}{z} dz - \frac{1}{2} \right].$$

Volgens Lemma 6.20 oscilleert de factor achter $f_+(p) - f_-(p)$ om nul, met positieve lokale maxima als y een oneven geheel veelvoud is van π en negatieve lokale minima als y een even geheel veelvoud is van π . De grootste waarde van deze factor is gelijk aan

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin z}{z} dz - \frac{1}{2} = 0,08949 \dots$$

Dit betekent dat $s_l(x)$ bij $x = p + \frac{\pi}{l + \frac{1}{2}}$ voorbij $f_+(p)$ schiet, met bijna 9 procent van de sprong $f_+(p) - f_-(p)$ die f in het punt p maakt.

Dit doorschietgedrag was door Michelson waargenomen aan een door hem uitgevonden mechanische ‘harmonische analysator’, hetgeen hem deed twijfelen of het apparaat wel goed werkte. Een analyse van Gibbs uit 1899 bevestigde dat het doorschietgedrag inderdaad optreedt bij de partiële sommen, dus dat dit niet aan het apparaat lag. Sederdien noemt men dit het *Gibbs-verschijnsel*, hoewel het eerder was gevonden door Wilbraham in 1848 — diens artikel was blijkbaar niet zo opgefallen. Voor meer details, zie Jan D. Stegeman: *Het verschijnsel van Gibbs*, p. 131–160 in F. van der Blij e.a.: *Kaleidoscoop van de wiskunde 1*, Epsilon Uitgaven 17, Utrecht, 1990.

Opmerking 6.22 Men kan onder heel wat zwakkere voorwaarden voor f concluderen dat, voor een gegeven $x \in \mathbb{R}$, de partiële sommen $s_l(x)$ convergeren als $l \rightarrow \infty$. Bijvoorbeeld, de *convergentietest van Dini* zegt dat als er getallen c_+ , c_- zijn, waarvoor

$$\int_{-\pi}^0 \left| \frac{f(x-v) - c_+}{\sin(v/2)} \right| dv < \infty \quad \text{en} \quad \int_0^\pi \left| \frac{f(x-v) - c_-}{\sin(v/2)} \right| dv < \infty,$$

dan convergeert $s_l(x)$ naar $(c_+ + c_-)/2$ als $l \rightarrow \infty$. Voor een bewijs, zie Vol. 1, Ch. II, §6 in A. Zygmund: *Trigonometric Series*. Cambridge University Press, 1968.

Men noemt de functie f *Hölder-continu in het punt x* als er constanten $C > 0$, $\alpha > 0$ en $\delta > 0$ zijn, met de eigenschap dat voor iedere $y \in \mathbb{R}$ met $|y - x| \leq \delta$ geldt dat

$$|f(y) - f(x)| \leq C |y - x|^\alpha. \quad (6.33)$$

Is dit het geval, dan is aan Dini’s convergentietest voldaan met $c_+ = c_- = f(x)$, hetgeen impliceert dat $s_l(x) \rightarrow f(x)$ als $l \rightarrow \infty$.

Dichter bij Dirichlet’s baanbrekende artikel uit 1829 staat de *convergentietest van Dirichlet en Jordan*, zoals beschreven in Vol. 1, Ch. II, §8 in A. Zygmund: *Trigonometric Series*, Cambridge University Press, 1968. Een reëelwaardige functie f op $[-\pi, \pi]$ heet *van begrensde variatie* als zij geschreven kan worden als het verschil $\phi(x) - \psi(x)$ van twee monotoon niet-dalende functies $\phi(x)$ en $\psi(x)$. Deze aanname impliceert dat voor iedere p de limieten

$$\lim_{x \downarrow p} f(p) = f_+(p) \quad \text{en} \quad \lim_{x \uparrow p} f(x) = f_-(p)$$

bestaan. Jordan bewees, in zijn *Cours d’Analyse* (1883, beter in de tweede uitgave 1913), dat als f van begrensde variatie is, dan geldt voor iedere p dat $s_l(x)$ convergeert naar $(f_+(p) + f_-(p))/2$.

Dirichlet had dezelfde conclusie in 1829 bewezen onder de aanname dat het interval $[-\pi, \pi]$ opgedeeld kan worden in eindig veel deelintervallen, op ieder waarvan f ofwel monotoon niet-dalend, ofwel monotoon niet-stijgend is. Deze voorwaarde impliceert dat f van begrensde variatie is; daarmee is Jordan's stelling een generalisatie van Dirichlet's resultaat. Dirichlet beweerde verder dat het geval van een willekeurige functie herleid kan worden tot het geval van stuksgewijs monotone functies. Het is echter niet duidelijk wat hij hiermee bedoelde, gezien de existentie van continue 2π -periodieke functies waarvoor de rij van partiële sommen divergeert. $\oslash$

6.3 Orthonormale Stelsels

Als f en g complexwaardige continue 2π -periodieke functies op $\mathbb{R}$ zijn, dan heet het complexe getal

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx = \text{av}(f \overline{g}) \quad (6.34)$$

het *integraalinproduct* van f en g . In termen hiervan kunnen we, met de notatie (6.8) en opmerkend dat $\epsilon_{-k} = \overline{\epsilon_k}$, de formule (6.9) voor de Fourier-coëfficiënten lezen als

$$c_k = \langle f, \epsilon_k \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (6.35)$$

Het laatste deel van het bewijs van Stelling 6.4 was daarbij gebaseerd op de eigenschap dat $\langle \epsilon_j, \epsilon_k \rangle$ gelijk is aan 0 als $j \neq k$ en gelijk aan 1 als $j = k$. Anders gezegd:

De functies ϵ_k , $k \in \mathbb{Z}$ vormen een orthonormaal stelsel met betrekking tot het integraalinproduct.

In deze paragraaf behandelen we enkele eigenschappen van Fourier-reeksen die hierop gebaseerd zijn. De argumenten die we gebruiken hebben echter een zeer algemene geldigheid, daarom geven we de formulering in het kader van willekeurige lineaire ruimten met daarin gegeven een willekeurig inproduct. Aan het einde van deze paragraaf schrijven we dan uit wat de conclusies betekenen in het geval van Fourier-reeksen.

We beginnen met een reeks definities waarvan een aantal bekend zijn uit het college Lineaire Algebra.

Definitie 6.23 Zij E een lineaire ruimte over $\mathbb{C}$. Een *Hermite's inproduct* op E is een afbeelding

$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{C},$$

met de volgende eigenschappen.

- i) Voor iedere $g \in E$ is $f \mapsto \langle f, g \rangle$ complex-lineair van E naar $\mathbb{C}$.
- ii) Voor iedere $f, g \in E$ geldt dat $\langle g, f \rangle = \overline{\langle f, g \rangle}$.
- iii) Als $f \in E$ en $f \neq 0$, dan is $\langle f, f \rangle > 0$.

Merk op dat uit i) volgt dat $\langle 0, g \rangle = 0$, dus in het bijzonder is $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$. Eigenschap iii) laat het toe om te definiëren

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2} \geq 0, \quad f \in E, \quad (6.36)$$

dit getal heet de *norm* van f met betrekking tot het Hermite'se inproduct. Men zegt dat een rij $f_l \in E$ naar f convergeert met betrekking tot het Hermite'se inproduct, resp. de norm, als $\|f_l - f\|$ naar nul convergeert voor $l \rightarrow \infty$. $\oslash$

Uit i) en ii) lezen we af dat voor iedere $f \in E$ de afbeelding $\mu : g \mapsto \langle f, g \rangle$ van E naar $\mathbb{C}$ niet complex-lineair is, maar *complex antilineair*. Hiermee wordt bedoeld dat

$$\begin{aligned}\mu(g + h) &= \mu(g) + \mu(h), \quad g, h \in E, \\ \mu(c g) &= \bar{c} \mu(g), \quad c \in \mathbb{C}, \quad g \in E.\end{aligned}$$

We nemen in de rest van deze paragraaf steeds aan dat $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$ een Hermite's inproduct is op de complex-lineaire ruimte E . Daarvoor hebben we de *ongelijkheid van Cauchy-Schwarz*:

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|, \quad f, g \in E. \quad (6.37)$$

Bewijs: als $g = 0$ dan geldt (6.37) om flauwe redenen. Voor iedere $c \in \mathbb{C}$ geldt dat

$$0 \leq \langle f + c g, f + c g \rangle = \langle f, f \rangle + c \langle g, f \rangle + \bar{c} \langle f, g \rangle + |c|^2 \langle g, g \rangle.$$

Is $g \neq 0$, dan is $\langle g, g \rangle > 0$ en dan leidt substitutie van $c = -\langle f, g \rangle / \langle g, g \rangle$ tot (6.37).

Op zijn beurt impliceert (6.37) dat

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle f, g \rangle + \|g\|^2 \leq (\|f\| + \|g\|)^2,$$

dus

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|, \quad f, g \in E, \quad (6.38)$$

hetgeen de *driehoeksongelijkheid* voor de norm $f \mapsto \|f\|$ genoemd wordt. Merk ook op dat

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 \quad \text{als} \quad \langle f, g \rangle = 0, \quad (6.39)$$

hetgeen de *wet van Pythagoras* voor het Hermite'se inproduct genoemd wordt. De norm voldoet ook nog aan

$$\|c f\| = |c| \cdot \|f\|, \quad c \in \mathbb{C}, \quad f \in E \quad (6.40)$$

en eigenschap iii) van het Hermite'se inproduct impliceert dat

$$\|f\| > 0 \quad \text{als} \quad f \in E \text{ en } f \neq 0. \quad (6.41)$$

Algemener, is E een willekeurige lineaire ruimte, dan is een *norm op E* gedefinieerd als een reëelwaardige functie $f \mapsto \|f\|$ op E die aan (6.38), (6.40) en (6.41) voldoet.

Voor een willekeurige norm $f \mapsto \|f\|$ in een lineaire ruimte E heet

$$d(f, g) = \|f - g\| \quad (6.42)$$

de bijbehorende *afstand* tussen f en g . Merk op dat altijd

$$d(f, g) \geq 0 \quad \text{en dat} \quad d(f, g) > 0 \text{ als } f \neq g. \quad (6.43)$$

Toepassing van (6.38) met f , resp. g vervangen door $f - g$, resp. $g - h$ geeft de driehoeksongelijkheid

$$d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h), \quad f, g, h \in E. \quad (6.44)$$

Ook geldt dat $\|g - f\| = \|(g - f)\| = \|f - g\|$, ofwel

$$d(g, f) = d(f, g), \quad f, g \in E. \quad (6.45)$$

Algemener, zij E een willekeurige verzameling. Een *afstandsfunctie* of *metriek* in E is een functie die aan ieder paar $f, g \in E$ een reëel getal $d(f, g)$ toevoegt en voldoet aan (6.43), (6.44) en (6.45). Een *metrische ruimte* is een paar (E, d) waarin E een verzameling is en d een afstandsfunctie in E .

Tenslotte definiëren we nog voor iedere $f \in E$ en iedere deelverzameling V van E de *afstand* $d(f, V)$ van f tot V als

$$d(f, V) := \inf\{d(f, g) \mid g \in V\}. \quad (6.46)$$

Merk op dat $d(f, V) = 0$ dan en slechts dan als f een limietpunt is van V , in de zin dat er bij iedere $\delta > 0$ een $g \in V$ is waarvoor $d(f, g) < \delta$.

Definitie 6.24 Zij K een indexverzameling en $k \mapsto \epsilon_k$ een afbeelding van K naar E . Men noemt de $\epsilon_k, k \in K$ een *orthonormaal stelsel* in E met betrekking tot het Hermite'se inproduct $\langle \cdot, \cdot \rangle$ op E , als voor iedere $j, k \in K$ geldt dat $\langle \epsilon_j, \epsilon_k \rangle = 0$ als $j \neq k$ en $\langle \epsilon_j, \epsilon_k \rangle = 1$ als $j = k$. $\oslash$

Is J een eindige deelverzameling van K , dan is

$$f = \sum_{j \in J} c_j \epsilon_j \quad (6.47)$$

gedefinieerd als de som over i , $1 \leq i \leq n$, van de vectoren $c_{j(i)} \epsilon_{j(i)}$, als $i \mapsto j(i)$ een aftelling van J voorstelt. Omdat de optelling in E associatief en commutatief is, is deze som onafhankelijk van de keuze van de aftelling van J .

Er geldt voor iedere $k \in K$ dat

$$\langle f, \epsilon_k \rangle = \sum_{j \in J} c_j \langle \epsilon_j, \epsilon_k \rangle = c_k, \quad (6.48)$$

waarbij we in de tweede identiteit de orthonormaliteit van de ϵ_k hebben gebruikt. Hieruit volgt ook dat de ϵ_k lineair onafhankelijk zijn: de som f in (6.47) kan alleen maar gelijk aan nul zijn als alle coëfficiënten c_k gelijk aan nul zijn. In het bijzonder zien we dat E oneindig-dimensionaal is zodra K oneindig is.

Op zijn beurt volgt uit (6.48) dat

$$\langle f, f \rangle = \langle f, \sum_{j \in J} c_j \epsilon_j \rangle = \sum_{j \in J} \overline{c_j} \langle f, \epsilon_j \rangle = \sum_{j \in J} |c_j|^2,$$

ofwel

$$\|f\| = \left(\sum_{j \in J} |c_j|^2 \right)^{1/2}. \quad (6.49)$$

Hoewel de conclusies in het vervolg ook gelden voor eindige orthonormale stelsels, denken we bij de formulering toch voornamelijk aan het geval dat K oneindig is. We beginnen met een observatie die afkomstig is van Bessel (1828).

Lemma 6.25 Zij $\epsilon_k, k \in K$ een orthonormaal stelsel in E en zij J een eindige deelverzameling van K . Noteer met E_J de eindig-dimensionale lineaire deelruimte van E die is opgespannen door de ϵ_j met $j \in J$. Voor iedere $f \in E$ noteren we

$$f_J := \sum_{j \in J} \langle f, \epsilon_j \rangle \epsilon_j. \quad (6.50)$$

Dan is f_J het eenduidig bepaalde element $s \in E_J$ met de eigenschap dat $f - s$ loodrecht staat op E_J , in de zin dat voor iedere $h \in E_J$ geldt dat $\langle f - s, h \rangle = 0$. Verder geldt voor iedere $h \in E_J$ dat

$$\|f - h\|^2 = \|f - f_J\|^2 + \|f_J - h\|^2. \quad (6.51)$$

Dit impliceert dat voor iedere $h \in E_J$ geldt dat $\|f - f_J\| \leq \|f - h\|$, met gelijkheid, dan en slechts dan als $h = f_J$. Hiermee is $\|f - f_J\|$ gelijk aan de afstand $d(f, E_J)$ van f tot de lineaire deelruimte E_J . Tenslotte geldt dat

$$\|f\|^2 = d(f, E_J)^2 + \sum_{j \in J} |\langle f, \epsilon_j \rangle|^2 \geq \sum_{j \in J} |\langle f, \epsilon_j \rangle|^2. \quad (6.52)$$

Bewijs Zij

$$h = \sum_{j \in J} c_j \epsilon_j.$$

Voor iedere $k \in J$ geldt vanwege (6.48) met f vervangen door h , dat

$$\langle f - h, \epsilon_k \rangle = \langle f, \epsilon_k \rangle - c_k,$$

hetgeen gelijk aan nul is, dan en slechts dan als $c_k = \langle f, \epsilon_k \rangle$. Hieruit lezen we af dat $f - h \perp E_J$, dan en slechts dan als $h = f_J$.

Omdat $f_J \in E_J$, geldt voor iedere $h \in E_J$ dat $f_J - h \in E_J$, dus $f - f_J \perp f_J - h$. Omdat $f - h = (f - f_J) + (f_J - h)$, volgt (6.51) nu uit de wet van Pythagoras (6.39).

Tenslotte volgt (6.52) uit (6.51) voor $h = 0$, gecombineerd met (6.49), (6.48), met f vervangen door f_J . $\square$

Definitie 6.26 Zij $c : k \mapsto c_k : K \rightarrow \mathbb{C}$ en $s \in \mathbb{C}$. We schrijven

$$s = \sum_{k \in K} c_k, \quad (6.53)$$

als er voor iedere $\delta > 0$ een eindige deelverzameling J_0 van K is, met de eigenschap dat voor iedere eindige J met $J_0 \subset J \subset K$ geldt dat

$$\left| s - \sum_{j \in J} c_j \right| < \delta.$$

Men zegt in dit geval dat de c_k , $k \in K$, *sommeerbaar* zijn, met som gelijk aan s .

Zij $f \in E$. We schrijven

$$f = \sum_{k \in K} c_k \epsilon_k, \quad (6.54)$$

als er voor iedere $\delta > 0$ een eindige deelverzameling J_0 van K is, met de eigenschap dat voor iedere eindige J met $J_0 \subset J \subset K$ geldt dat

$$\left\| f - \sum_{j \in J} c_j \epsilon_j \right\| < \delta.$$

In dit geval noemt men de reeks in het rechterlid van (6.54) *convergent* met betrekking tot de norm $\|\cdot\|$, met som gelijk aan f . $\oslash$

Deze definities geven niets nieuws als K eindig is, we denken vooral aan het geval van oneindige orthonormale stelsels.

Stelling 6.27 *Zij ϵ_k , $k \in K$, een orthonormaal stelsel in E . Noteer met E_K de verzameling van alle lineaire combinaties van eindig vele der ϵ_k . Zij $f \in E$. Dan is de collectie van getallen $|\langle f, \epsilon_k \rangle|^2$ met $k \in K$ sommeerbaar en er geldt dat*

$$\|f\|^2 = d(f, E_K)^2 + \sum_{k \in K} |\langle f, \epsilon_k \rangle|^2 \geq \sum_{k \in K} |\langle f, \epsilon_k \rangle|^2. \quad (6.55)$$

Verder geldt

$$\|f\|^2 = \sum_{k \in K} |\langle f, \epsilon_k \rangle|^2 \quad (6.56)$$

dan en slechts dan als er bij iedere $\delta > 0$ een lineaire combinatie g van eindig vele ϵ_k is, waarvoor $\|f - g\| < \delta$. Is dit het geval, dan geldt dat

$$f = \sum_{k \in K} \langle f, \epsilon_k \rangle \epsilon_k. \quad (6.57)$$

In dit geval geldt voor iedere eindige deelverzameling J van K dat

$$\|f - f_J\|^2 = \sum_{k \in K} |\langle f, \epsilon_k \rangle|^2 - \sum_{j \in J} |\langle f, \epsilon_j \rangle|^2 = \sum_{k \in K, k \notin J} |\langle f, \epsilon_k \rangle|^2 \quad \text{als} \quad f_J = \sum_{j \in J} \langle f, \epsilon_j \rangle \epsilon_j. \quad (6.58)$$

waarin

$$f_J = \sum_{j \in J} \langle f, \epsilon_j \rangle \epsilon_j.$$

Bewijs Uit (6.52) lezen we af dat de sommen der $|\langle f, \epsilon_j \rangle|^2$ over eindig veel j 's naar boven begrensd zijn door $\|f\|^2$. Schrijven we

$$s := \sup \left\{ \sum_{j \in J} |\langle f, \epsilon_j \rangle|^2 \mid J \text{ is eindig en } J \subset K \right\},$$

dan zien we dat

$$s = \sum_{k \in K} |\langle f, \epsilon_k \rangle|^2.$$

Anderzijds geeft de definitie van s in combinatie met (6.52) dat $\|f\|^2 - s$ gelijk is aan het infimum over alle eindige deelverzamelingen J van K van de getallen $d(f, E_J)^2$. Omdat

$$E_K = \bigcup_{J \subset K, J \text{ is eindig}} E_J,$$

volgt hieruit de identiteit in (6.55), waarbij (6.56) geldt dan en slechts dan als $d(f, E_K) = 0$.

Tenslotte volgt (6.58) uit (6.52) en (6.56). Omdat de definitie van ‘de som over alle $k \in K$ van ...’ impliceert dat er voor iedere $\delta > 0$ een eindige deelverzameling J is waarvoor het rechterlid in (6.58) kleiner is dan δ , volgt hieruit dat (6.57). $\square$

Definitie 6.28 Men noemt de ongelijkheid

$$\sum_{k \in K} |\langle f, \epsilon_k \rangle|^2 \leq \|f\|^2, \quad (6.59)$$

die uit (6.55) volgt, de *ongelijkheid van Bessel*. De identiteit (6.56), die geldt in het geval dat f een verdichtingspunt is van de lineaire combinaties van eindig vele der ϵ_k , heet de *identiteit van Parseval*. De conclusie (6.57), die misschien wel de belangrijkste is over orthonormale stelsels, heeft geen speciale naam.

Men noemt het orthonormale stelsel $\epsilon_k, k \in K$ in E *volledig* als iedere $f \in E$ een verdichtingspunt is van de lineaire combinaties van eindig vele der ϵ_k . Op grond van Stelling 6.27 is dit equivalent met de voorwaarde dat (6.56), resp. (6.57) geldt voor iedere $f \in E$. $\odot$

We gaan nu de voorgaande theorie van orthonormale stelsels toepassen in het geval dat E gelijk is aan de ruimte $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ van alle continue 2π -periodieke functies op $\mathbb{R}$.

Lemma 6.29 De formule (6.34) definieert een Hermite's inproduct in $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

Bewijs Alleen de eigenschap dat $\langle f, f \rangle > 0$ als $f \neq 0$ vergt nog een bewijs. Stel $a \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $f(a) \neq 0$, hetgeen impliceert dat $\epsilon := |f(a)|^2 > 0$. Vanwege de continuïteit van de functie $x \mapsto |f(x)|^2$ is er een $0 < \delta < \pi$ met de eigenschap dat voor iedere x met $|x - a| < \delta$ geldt dat

$$|f(x)|^2 > \epsilon/2.$$

Hieruit volgt dat de integraal I_1 van $|f|^2$ over de δ -omgeving van a , groter of gelijk is aan $\epsilon/2$ maal de lengte 2δ van deze δ -omgeving, dus $I_1 \geq \epsilon\delta$. Omdat $|f(x)|^2 \geq 0$ voor alle x in het complement C van de δ -omgeving van a , is de integraal I_2 van $|f|^2$ over C niet-negatief. De conclusie is dat

$$\langle f, f \rangle = (I_1 + I_2)/2\pi \geq I_1/2\pi \geq \epsilon\delta/2\pi > 0,$$

hetgeen impliceert dat $\langle f, f \rangle > 0$. $\square$

De bijbehorende norm

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad (6.60)$$

heet de *kwadraatintegraalnorm* van de functie f .

Lemma 6.30 Voor iedere $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ geldt dat $\|f\| \leq \sup |f|$. Als de rij van functies f_n uniform convergeert naar de functie f voor $n \rightarrow \infty$, dan convergeert de rij f_n naar f met betrekking tot de kwadraatintegraalnorm.

Bewijs Voor iedere $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ geldt dat

$$\langle f, f \rangle = \text{av}(|f|^2) \leq \sup(|f|^2) = (\sup|f|)^2,$$

dus $\|f\| \leq \sup|f|$.

Hierin f vervangend door $f - f_n$ en opmerkend dat de uniforme convergentie van f_n naar f betekent dat $\sup|f - f_n|$ naar nul convergeert als $n \rightarrow \infty$, krijgen we hieruit dat $\|f - f_n\|$ (minstens zo snel) naar nul convergeert als $n \rightarrow \infty$. $\square$

Opmerking 6.31 De omkering is zeker niet in het algemeen waar. Beschouw bijvoorbeeld de functie P_r uit (6.13). Daarvoor hebben we dat $\text{av}(P_r) = 1$, terwijl anderzijds $\sup P_r = P_r(0) = \frac{1+r}{1-r}$. Neem nu

$$f_r = \left(\frac{1-r}{1+r} P_r \right)^{1/2}.$$

Dan convergeert $\|f_r\| = (1-r)/(1+r)$ naar nul als $r \uparrow 1$, terwijl anderzijds voor iedere $0 < r < 1$ geldt dat $f_r(0) = 1$. $\otimes$

In $E = C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ hebben we de functies ϵ_k , $k \in \mathbb{Z}$, gedefinieerd als in (6.8). Deze vormen een orthonormaal stelsel in E , zoals we hadden geconstateerd in het laatste deel van het bewijs van Stelling 6.4.

Stelling 6.32 De functies ϵ_k , $k \in \mathbb{Z}$, gedefinieerd in (6.8), vormen een volledig orthonormaal stelsel in de ruimte $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, ten aanzien van het integraalproduct (6.34). Zij $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ met Fourier-coëfficiënten $c_k = \langle f, \epsilon_k \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$. Dan is de rij $|c_k|^2$, $k \in \mathbb{Z}$, sommeerbaar en we hebben de identiteit van Parseval voor Fourier-reeksen

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2. \quad (6.61)$$

De Fourier-reeks $\sum_k c_k \epsilon_k$ van f convergeert naar f ten aanzien van de kwadraatintegraalnorm (6.60). Preciezer, voor iedere eindige verzameling J van gehele getallen geldt dat

$$\|f - f_J\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 - \sum_{j \in J} |c_j|^2 \quad \text{als} \quad f_J = \sum_{j \in J} c_j \epsilon_j. \quad (6.62)$$

Tenslotte geldt dat $\|f - f_J\| < \|f - h\|$ voor iedere andere lineaire combinatie h van de ϵ_j met $j \in J$.

Bewijs Zij $\eta > 0$. Uit Gevolg 6.9 krijgen we dat er een eindige Fourier-reeks g is met de eigenschap dat voor iedere $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $|f(x) - g(x)| \leq \eta$. Vanwege Lemma 6.30 volgt hieruit dat $\|f - g\| \leq \sup|f - g| \leq \eta$. Hiermee is aangetoond dat de eindige Fourier-reeksen een dichte deelverzameling van $E = C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ vormen, in termen van de afstand $\|f - g\|$. Anders gezegd, het orthonormale stelsel der ϵ_k , $k \in \mathbb{Z}$, is volledig in E . De conclusies voor de functie f volgen nu uit Stelling 6.27, waarbij we voor de laatste conclusie verwijzen naar (6.51). $\square$

Opmerking 6.33 De convergentie in Stelling 6.32 is equivalent met de uitspraak dat voor iedere aftelling van $i \mapsto k(i)$ van $\mathbb{Z}$ geldt dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \sum_{i=1}^n c_{k(i)} \epsilon_{k(i)}\| = 0.$$

Men noemt dit *onvoorwaardelijke convergentie* omdat de som van de oneindig vele termen $c_k \epsilon_k$, $k \in \mathbb{Z}$ niet afhangt van de volgorde waarin de termen $c_k \epsilon_k$ worden gesommeerd. Deze uitspraak is in principe sterker dan (maar voor orthonormale stelsels equivalent aan) de uitspraak dat

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|f - \sum_{k=-l}^l c_k \epsilon_k\| = 0.$$

De sommeerbaarheid der $|c_k|^2$, $k \in \mathbb{Z}$ impliceert dat $|c_k|^2 \rightarrow 0$ als $k \rightarrow \infty$ en als $k \rightarrow -\infty$ hetgeen op zijn beurt impliceert dat $c_k \rightarrow 0$ als $k \rightarrow \infty$ en als $k \rightarrow -\infty$. $\oslash$

Als ϵ_k , $k \in \mathbb{Z}$, gedefinieerd zijn als in (6.8) en $E = C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, dan zijn de getallen $\langle f, \epsilon_k \rangle$ de Fourier-coëfficiënten van f , cf. (6.35). Anders gezegd, de *Fourier-transformatie* in Definitie 6.6 is de afbeelding $\mathcal{F}$ die aan $f \in E$ zijn rij van de inproducten $\langle f, \epsilon_k \rangle$, $k \in \mathbb{Z}$ toevoegt. Vanwege Stelling 6.32 is $\mathcal{F}(E) \subset l^2(\mathbb{Z})$, als $l^2(\mathbb{Z})$ de *ruimte der kwadratisch sommeerbare rijtjes* voorstelt, de ruimte der c_k , $k \in \mathbb{Z}$, waarvoor

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty.$$

Uit Gevolg 6.12 (of uit Lemma 6.35) zien we dat de afbeelding $\mathcal{F} : C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$ injectief is.

Uit Stelling 6.2, gecombineerd met Lemma 6.30, lezen we af dat als de rij $c : k \mapsto c_k$ absoluut sommeerbaar is, dat wil zeggen $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| < \infty$, dan is $c = \mathcal{F}(f)$ voor een $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Met de notatie $l^1(\mathbb{Z})$ uit Opmerking 6.13 leidt dit tot de volgende inclusies van lineaire ruimten:

$$l^1(\mathbb{Z}) \subset \mathcal{F}(C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})) \subset l^2(\mathbb{Z}). \quad (6.63)$$

De Fourier-coëfficiënten c_k , $k \in \mathbb{Z}$ van de zaagtandfunctie f in Voorbeeld 6.19 zijn van de orde $1/|k|$ als $k \rightarrow \pm\infty$, hetgeen impliceert dat $|c_k|^2 = \mathcal{O}(1/k^2)$, waaruit volgt dat de rij $|c_k|^2$ sommeerbaar is. Stel dat $c = \mathcal{F}(g)$ voor een $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$; we gaan aantonen dat dit tot een tegenspraak leidt.

Voor iedere $0 < \delta < \pi$ geldt dat

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} |g(x) - s_l(x)|^2 dx \leq \|g - s_l\|^2,$$

waarbij het rechterlid naar nul convergeert als $l \rightarrow \infty$. Anderszijds convergeren de functies s_l uniform op $[\delta, 2\pi - \delta]$ naar f als $l \rightarrow \infty$, waaruit volgt dat het linkerlid voor $l \rightarrow \infty$ convergeert naar de integraal met $s_l(x)$ vervangen door $f(x)$. De conclusie is dat

$$\int_{\delta}^{2\pi-\delta} |g(x) - f(x)|^2 dx = 0.$$

Omdat de functie $g - f$ continu is op $[\delta, 2\pi - \delta]$, volgt hieruit dat $g(x) - f(x) = 0$ voor iedere $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$. Omdat dit geldt voor iedere $\delta > 0$, is de conclusie dat $g(x) = f(x) = x$ voor iedere $x \in]0, 2\pi[$. Omdat ook g 2π -periodiek is, krijgen we dat g discontinu is in het punt $x = 0$, tegenspraak.

Dit laat zien dat niet iedere $c \in l^2(\mathbb{Z})$ gelijk is aan $c = \mathcal{F}(g)$ voor een $g \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Anderszijds zijn er continue functies waarvoor de partiële sommen $s_l(x)$ divergeren, hetgeen impliceert dat $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| = \infty$. Anders gezegd, geen van beide inclusies in (6.63) is een gelijkheid. Zelfs is er geen expliciet in termen van de c_k geformuleerde voorwaarde bekend, die noodzakelijk en voldoende is opdat $c \in \mathcal{F}(C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}))$.

6.4 Hilbert-ruimten

In de nu volgende tekst wordt de theorie verder afgerond. Deze tekst behoort niet tot de tentamenstof.

We noteren $\mathbb{C}^K$ voor de lineaire ruimte van alle functies $c : k \mapsto c_k : K \rightarrow \mathbb{C}$ en $l^2(K)$ voor de verzameling van alle $c \in \mathbb{C}^K$ waarvoor de getallen $|c_k|^2, k \in K$, sommeerbaar zijn.

Lemma 6.34 $l^2(K)$ is een lineaire deelruimte van $\mathbb{C}^K$ en

$$\|c\| := \left(\sum_{k \in K} |c_k|^2 \right)^{1/2}, \quad c \in l^2(K)$$

definieert een norm op $l^2(K)$.

Bewijs Noteer, voor iedere eindige deelverzameling J van K en iedere $c \in \mathbb{C}^K$, met $c_J \in \mathbb{C}^J$ de beperking van c tot J . Als we J door middel van een aftelling identificeren met $\{1, 2, \dots, n\}$, dan is $\mathbb{C}^J = \mathbb{C}^n$ en de norm in $\mathbb{C}^J$ correspondeert met de standaardnorm in $\mathbb{C}^n$. Als $c, d \in l^2(K)$, dan geldt op grond van de driehoeksongelijkheid voor de standaardnorm in $\mathbb{C}^n$ dat

$$\|(c + d)_J\| = \|c_J + d_J\| \leq \|c_J\| + \|d_J\| \leq \|c\| + \|d\|,$$

voor iedere eindige $J \subset K$. Hieruit volgt dat $c + d \in l^2(K)$ en $\|c + d\| \leq \|c\| + \|d\|$. Het is nog gemakkelijker om te bewijzen dat voor iedere $\lambda \in \mathbb{C}$ en $c \in l^2(K)$ geldt dat $\lambda c \in l^2(K)$ en $\|\lambda c\| = |\lambda| \|c\|$. $\square$

Definieer, voor iedere $f \in E$ en $k \in K$, $\mathcal{F}(f)_k = \langle f, \epsilon_k \rangle$. Dit definieert een lineaire afbeelding $\mathcal{F} : E \rightarrow \mathbb{C}^K$. We weten uit Lineaire Algebra dat de beeldruimte $\mathcal{F}(E)$ een lineaire deelruimte is van $\mathbb{C}^K$ en het volgt uit (6.59) dat $\mathcal{F}(E) \subset l^2(K)$.

Lemma 6.35 *Neem aan dat het orthonormale stelsel $\epsilon_k, k \in K$ volledig is in E . Dan geldt voor iedere $f, f' \in E$ dat*

$$\|\mathcal{F}(f) - \mathcal{F}(f')\| = \|\mathcal{F}(f - f')\| = \|f - f'\|. \quad (6.64)$$

Dit impliceert dat de afbeelding $\mathcal{F} : E \rightarrow l^2(K)$ injectief is.

Bewijs De tweede identiteit in (6.64) volgt uit (6.56) met f vervangen door $f - f'$. Uit $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(f')$ volgt nu dat $\|f - f'\| = 0$, dus $f = f'$. $\square$

De identiteit tussen het linker-en rechterlid in (6.64) zegt dat de afbeelding $\mathcal{F} : E \rightarrow l^2(K)$ *afstandsbehoudend* is, in de zin dat voor iedere $f, f' \in E$ de afstand tussen $\mathcal{F}(f)$ en $\mathcal{F}(f')$ in $l^2(K)$ gelijk is aan de afstand tussen f en f' in E . Men noemt een afstandsbehoudende afbeelding ook wel een *isometrie*. Omdat bij definitie $\mathcal{F}$ surjectief is van E naar $\mathcal{F}(E)$, concluderen we dat $\mathcal{F}$ een lineair en isometrisch isomorfisme definieert van E naar $\mathcal{F}(E)$.

Om nader te onderzoeken hoe $\mathcal{F}(E)$ zich verhoudt tot $l^2(K)$, maken we gebruik van de volgende begrippen.

Definitie 6.36 Zij (E, d) een metrische ruimte. Een rij $(f_n)_{n=1}^\infty$ in E heet een *Cauchy-rij* als er bij iedere $\delta > 0$ een rangnummer N is met de eigenschap dat voor alle $p, q \geq N$ geldt dat $d(f_p, f_q) \leq \delta$. Uit de driehoeksongelijkheid

$$d(f_p, f_q) \leq d(f_p, f) + d(f, f_q)$$

zien we meteen dat als de rij f_n convergeert naar een $f \in E$, dan is de rij f_n een Cauchy-rij.

Men noemt de metrische ruimte (E, d) *volledig*, als omgekeerd iedere Cauchy-rij in E convergeert naar een element van E .

Is E een complex-lineaire ruimte en is $\langle \cdot, \cdot \rangle$ daarin een Hermite's inproduct, dan noemt men het paar $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een *Hilbert-ruimte*, als E volledig is ten aanzien van de afstandsfunctie d in E , die is gedefinieerd als in (6.42) en (6.36). $\oslash$

Lemma 6.37 *De ruimte $l^2(K)$ is volledig.*

Bewijs Stel $c^{(i)}$ is een Cauchy-rij in $l^2(K)$. We gaan aantonen dat er een $c \in l^2(K)$ is, waarvoor $\|c - c^{(i)}\| \rightarrow 0$ als $i \rightarrow \infty$.

De Cauchy-rij eigenschap betekent dat er voor iedere $\delta > 0$ een rangnummer $N(\delta)$ is met de eigenschap dat $\|c^{(p)} - c^{(q)}\| \leq \delta$ als $p, q \geq N(\delta)$. Voor iedere $k \in K$ hebben we de schatting

$$|c_k^{(p)} - c_k^{(q)}|^2 \leq \|c^{(p)} - c^{(q)}\|^2 \leq \delta^2$$

als $p, q \geq N(\delta)$, waaruit we aflezen dat de $c_k^{(i)}$, $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ een Cauchy-rij in $\mathbb{C}$ vormen. Dit impliceert dat er een $c_k \in \mathbb{C}$ is, waarvoor $c_k^{(i)} \rightarrow c_k$ als $i \rightarrow \infty$.

Voor iedere eindige deelverzameling J van K en $d \in \mathbb{C}^K$ noteren we weer met $d_J \in \mathbb{C}^J$ de beperking van d tot J . Dan geldt dat

$$\|c_J^{(i)} - c_J\|^2 = \sum_{j \in J} |c_j^{(i)} - c_j|^2 \rightarrow 0, \quad i \rightarrow \infty.$$

Als $p, q \geq N(\delta)$, dan geldt dat

$$\|c_J - c_J^{(q)}\| \leq \|c_J - c_J^{(p)}\| + \|c_J^{(p)} - c_J^{(q)}\| \leq \|c_J - c_J^{(p)}\| + \delta.$$

Laten we hierin $p \rightarrow \infty$, dan volgt uit het behoud van het $\leq$ -teken onder het nemen van limieten dat $\|c_J - c_J^{(q)}\| \leq \delta$ zodra $q \geq N(\delta)$. Vanwege

$$\|c_J\| \leq \|c_J - c_J^{(q)}\| + \|c_J^{(q)}\| \leq \delta + \|c^{(q)}\|$$

voor iedere eindige $J \subset K$ concluderen we dat $\|c\| < \infty$, ofwel $c \in l^2(K)$. Verder geeft $\|c_J - c_J^{(q)}\| \leq \delta$ voor iedere eindige $J \subset K$ dat $\|c - c^{(q)}\| \leq \delta$, hetgeen geldig is voor iedere $q \geq N(\delta)$. De conclusie is dat $\|c - c^{(q)}\| \rightarrow 0$ als $q \rightarrow \infty$. $\square$

Stelling 6.38 *Zij ϵ_k , $k \in K$ een volledig orthonormaal stelsel in E . Dan geldt dat $\mathcal{F}(E) = l^2(K)$, dan en slechts dan als E een Hilbert-ruimte is.*

Bewijs Als $\mathcal{F}(E) = l^2(K)$, dan is $\mathcal{F}$ een isometrisch isomorfisme van E naar $l^2(K)$ en dan impliceert de volledigheid van $l^2(K)$ dat ook de ruimte E volledig is.

Omgekeerd, stel dat E volledig is en dat $c \in l^2(K)$. Dan is er een stijgende rij $J(n)$ van eindige deelverzamelingen van K met de eigenschap dat voor iedere n geldt dat

$$\sum_{k \in K \setminus J(n)} |c_k|^2 = \|c\|^2 - \sum_{j \in J(n)} |c_j|^2 \leq 1/n. \quad (6.65)$$

Definieer

$$f_n = \sum_{j \in J(n)} c_j \epsilon_j.$$

Uit de orthonormaliteit van de ϵ_j volgt meteen dat, als $p > q$, dan is

$$\|f_p - f_q\|^2 = \sum_{j \in J(p) \setminus J(q)} |c_j|^2 \leq \sum_{k \in K \setminus J(q)} |c_k|^2 \leq 1/q,$$

waaruit we aflezen dat de f_n een Cauchy-rij in E vormen. Vanwege de volledigheid van E is er een $f \in E$, waarvoor $\|f - f_n\| \rightarrow 0$ als $n \rightarrow \infty$. De Cauchy-Schwarz ongelijkheid impliceert dat voor iedere $k \in K$ geldt dat

$$|\langle f, \epsilon_k \rangle - \langle f_n, \epsilon_k \rangle| = |\langle f - f_n, \epsilon_k \rangle| \leq \|f - f_n\| \cdot \|\epsilon_k\| = \|f - f_n\|,$$

waaruit we aflezen dat $\langle f_n, \epsilon_k \rangle \rightarrow \langle f, \epsilon_k \rangle$ als $n \rightarrow \infty$. Nu is $\langle f_n, \epsilon_k \rangle = c_k$ zodra $k \in J(n)$ en $\langle f_n, \epsilon_k \rangle = 0$ als $k \notin J(n)$. Zij K' de vereniging der $J(n)$, $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Dan is $\langle f, \epsilon_k \rangle = c_k$ als $k \in K'$ en $\langle f, \epsilon_k \rangle = 0$ als $k \notin K'$. Anderzijds geeft (6.65) dat de som over de $k \in K \setminus K'$ der $|c_k|^2$ gelijk is aan 0, dus $c_k = 0$ als $k \notin K'$. De conclusie is dat voor iedere $k \in K$ geldt dat $\langle f, \epsilon_k \rangle = c_k$, ofwel $\mathcal{F}(f) = c$. $\square$

We gaan nu de voorgaande theorie van orthonormale stelsels in Hilbert-ruimten toepassen in het geval dat E gelijk is aan een geschikte ruimte van 2π -periodieke functies op $\mathbb{R}$. Hierbij doet zich het probleem voor dat de ruimte $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ van alle *continue* 2π -periodieke functies op $\mathbb{R}$. *geen* Hilbert-ruimte is met betrekking tot het integraalproduct. Immers, als dat wel zo zou zijn, dan had toepassing van Stelling 6.38 met $E = C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ opgeleverd dat $\mathcal{F}(C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})) = l^2(\mathbb{Z})$, terwijl we na (6.63) hebben gezien dat de Fourier-coëfficiënten van de zaagtandfunctie tot $l^2(\mathbb{Z})$ behoren, maar niet tot $\mathcal{F}(C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}))$.

Voor de constructie van een Hilbert-ruimte H van 2π -periodieke functies waarvoor wèl geldt dat $\mathcal{F}(H) = l^2(\mathbb{Z})$, maakt men gebruik van de theorie van Lebesgue-integratie, die later in een college Maat en Integratie aan de orde zal komen.

Men begint met de Lebesgue-meetbare 2π -periodieke functies f op $\mathbb{R}$ te beschouwen, die *kwadratisch integreerbaar* zijn over $[0, 2\pi]$, dat wil zeggen dat

$$\|f\|^2 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Er doet zich hierbij het lichtelijk irritante verschijnsel voor dat $\|f\| = 0$ niet impliceert dat $f = 0$. Zij $N(f)$ de verzameling der punten $x \in]0, 2\pi]$ waarvoor $f(x) \neq 0$. Dan impliceert $\|f\| = 0$ niet dat $N(f) = \emptyset$, maar slechts dat de Lebesgue-maat van $N(f)$ gelijk aan nul is. Dit maakt dat $f \mapsto \|f\|$ geen norm definieert op de ruimte van de kwadratisch integreerbare functies.

Om dit probleem te ondervangen, noemt men twee kwadratisch integreerbare functies f en g *equivalent* als $N(f - g)$, de verzameling der x waarvoor $f(x) \neq g(x)$, Lebesgue-maat gelijk aan nul heeft. De collectie der functies g die equivalent zijn met een gegeven functie f wordt genoteerd met $[f]$, men noemt dit de *equivalentieklasse* van de functie f . De verzameling van equivalentieklassen van kwadratisch integreerbare 2π -periodieke functies wordt met $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ aangeduid, dit is op een voor de hand liggende manier een lineaire ruimte over $\mathbb{C}$.

Omdat integralen niet veranderen als de integrand door een daarmee equivalente functie vervangen wordt, is het getal

$$\langle [f], [g] \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

onafhankelijk van de keuze van de elementen f , resp. g in de equivalentieklassen $[f]$, resp. $[g]$. Dit definieert een Hermite's inproduct in de ruimte $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. De continue 2π -periodieke functie f identificerend met zijn equivalentieklasse $[f] \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, krijgen we de voorgaande ruimte E van continue 2π -periodieke functies als een lineaire deelruimte van $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

De theorie van Lebesgue-integratie levert nu de volgende feiten

- i) Als f een 2π -periodieke functie is die Riemann-integreerbaar is over een interval met lengte 2π , dan is $[f] \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. (De ruimte $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ is echter veel groter en bevat bijvoorbeeld ook functies die niet begrensd zijn op een periodeninterval.)
- ii) $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ is een Hilbert-ruimte.
- iii) Bij iedere $[f] \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ en iedere $\delta > 0$ is er een continue 2π -periodieke functie g , waarvoor $\|[f] - [g]\| \leq \delta$.

Stelling 6.39 De lineaire afbeelding $\mathcal{F}$, die aan iedere $f \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ zijn rij c_k , $k \in \mathbb{Z}$ van Fourier-coëfficiënten toevoegt, is bijectief van $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ naar $l^2(\mathbb{Z})$. Het is bovendien een isometrie met betrekking tot de afstand

$$\|c - d\| = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k - d_k|^2 \right)^{1/2}$$

tussen rijtjes c_k en d_k , $k \in \mathbb{Z}$ van complexe getallen.

Bewijs Uit iii) en het feit dat de e_k , $k \in \mathbb{Z}$, een volledig orthonormaal stelsel in $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ vormen, zien we dat de $[e_k]$, $k \in \mathbb{Z}$, een volledig orthonormaal stelsel in $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ vormen. Lemma 6.35, toegepast op $E = L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, geeft daarmee dat de afbeelding $\mathcal{F}$ afstandsbehoudend en daarmee injectief is.

Uit ii) en Stelling 6.4 zien we dat $\mathcal{F}$ surjectief is. □

Het is nogal verrassend dat de ruimte $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, waarvan de definitie vrij veel voeten in de aarde heeft, blijkbaar isometrisch isomorf is met de veel simpeler ogende ruimte $l^2(\mathbb{Z})$ van de kwadratisch sommeerbare rijtjes.

6.5 Fourier-reeksen en Machtrekken

Zij $C(0; 1)$ de eenheidscirkel in het complexe vlak. Bij formule (6.10) is opgemerkt dat de substitutie $z = e^{ix}$ een bijectieve afbeelding oplevert van de ruimte van de continue functies ϕ op $C(0; 1)$ naar de ruimte van de continue 2π -periodieke functies f op $\mathbb{R}$. Verder is daarbij in concrete berekeningen herhaaldelijk gebruik gemaakt van de opmerking dat de basisfuncties $\epsilon_k(x)$, $k \in \mathbb{Z}$ bij deze substitutie corresponderen met de machten z^k , $k \in \mathbb{Z}$.

Zijn c_k , $k \in \mathbb{Z}$ de Fourier-coëfficiënten van f , dan kunnen we de Fourier-reeks van f splitsen in

$$\phi^+(z) := \sum_{k \geq 0} c_k z^k \quad (6.66)$$

en

$$\phi^-(z) := \sum_{k < 0} c_k z^k = \sum_{l > 0} c_{-l} (1/z)^l \quad (6.67)$$

Hierin is (6.66) een machtreeks in de variabele z die, op grond van de begrensdeheid der coëfficiënten, convergeert voor $|z| < 1$ en in de open eenheidsschijf $B(0; 1)$ een complex analytische functie definieert, die eveneens met ϕ^+ wordt aangeduid. Anderzijds is $\phi^-(z) = \chi(1/z)$, waarin χ een machtreeks is met convergentie-straal ≥ 1 en zonder constante term, deze definieert een complex analytische functie χ op $B(0; 1)$ met $\chi(0) = 0$. Hieruit volgt dat (6.67) een complex analytische functie ϕ^- in het complement $\mathbb{C} \setminus \overline{B(0; 1)}$ van de gesloten eenheidsschijf in het complexe vlak definieert. Omdat $|z| \rightarrow \infty$ dan en slechts dan als $1/z \rightarrow 0$, geeft $\phi^-(z) = \chi(1/z)$ en $\chi(0) = 0$ bovendien dat $\phi^-(z)$ naar nul convergeert als $|z| \rightarrow \infty$.

Vergelijking van (6.11) met (6.66) en (6.67) geeft

$$f_r(x) = \phi^+(r e^{ix}) + \phi^-(e^{ix}/r).$$

Definitie 6.40 Zij u een functie op de open eenheidsschijf $B(0; 1)$ en ϕ een functie op de eenheidscirkel $C(0; 1)$, de rand van $B(0; 1)$. Schrijf

$$f_r(x) := u(r e^{ix}), \quad f(x) := \phi(e^{ix}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

We zeggen dat u de functie ϕ als *uniforme randwaarde* heeft, indien de functies f_r op $\mathbb{R}$, gedefinieerd voor $0 \leq r < 1$, voor $r \uparrow 1$ uniform convergeren naar f . $\oslash$

Zij v de functie op $\overline{B(0; 1)}$, die gelijk is aan u op $B(0; 1)$ en gelijk is aan ϕ op $C(0; 1)$. Neem aan dat u , resp. ϕ continu is op $B(0; 1)$, resp. $C(0; 1)$ en dat ϕ de uniforme randwaarde is van u . Door voor $r < 1$ te schrijven

$$|v(r e^{iy}) - v(e^{ix})| = |f_r(y) - f(x)| \leq |f_r(y) - f(y)| + |f(y) - f(x)|,$$

zien we dat v continu is in ieder punt van $S(0; 1)$, dus dat v continu is op $\overline{B(0; 1)}$.

Omgekeerd, zij v continu op $\overline{B(0; 1)}$. Dan zijn u , resp. ϕ continu op $B(0; 1)$, resp. $C(0; 1)$. Verder is v uniform continu, volgens Lemma 2.6, toegepast op de functie $(r, x) \mapsto f_r(x)$. Dit impliceert dat ϕ de uniforme randwaarde is van u .

Lemma 6.8 leidt nu tot de volgende conclusies, waarvan de tweede zegt dat een continue functie ϕ op de eenheidscirkel alleen maar de uniforme randwaarde van een complex analytische functie op de open eenheidsschijf kan zijn, als de Fourier-coëfficiënten c_k van f met $k < 0$ allemaal gelijk aan nul zijn.

Stelling 6.41 Zij ϕ een continue functie op de eenheidscirkel $C(0; 1)$ in het complexe vlak. Dan zijn er eenduidig bepaalde functies ϕ^+ en ϕ^- , met de volgende eigenschappen.

- i) ϕ^+ is complex analytisch op de open eenheidsschijf $B(0; 1)$ in het complexe vlak.
- ii) ϕ^- is complex analytisch op het complement $\mathbb{C} \setminus \overline{B(0; 1)}$ in het complexe vlak van de gesloten eenheidsschijf en $\phi^-(z)$ convergeert naar nul als $|z| \rightarrow \infty$.
- iii) De functies $z \mapsto \phi^+(rz) + \phi^-(z/r)$ op $C(0; 1)$ convergeren uniform op $C(0; 1)$ naar ϕ als $r \uparrow 1$.

Noteer met

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(e^{ix}) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z},$$

de Fourier-coëfficiënten van de functie $f : x \mapsto \phi(e^{ix})$. Dan is de functie ϕ de uniforme randwaarde van een analytische functie op $B(0; 1)$, dan en slechts dan als voor iedere $k < 0$ geldt dat $c_k = 0$.

Bewijs Definieren we ϕ^+ , resp. ϕ^- als in (6.66), resp (6.67), dan gelden i), ii) en iii), waarbij iii) volgt uit Lemma 6.8. Geldt daarbij voor iedere $k < 0$ dat $c_k = 0$, dan is $\phi^- = 0$ en krijgen we dat ϕ de uniforme randwaarde is van ϕ^+ .

Neem nu aan dat ϕ^+ en ϕ^- voldoen aan i), ii), iii). Als ϕ de uniforme randwaarde is van een complex analytische functie ϕ^+ op $B(0; 1)$, dan voldoen ϕ^+ en $\phi^- := 0$ aan i), ii) en iii). We krijgen nu op grond van de Cauchy-integraalstelling, Stelling 4.31, dat voor iedere $k \in \mathbb{Z}$ en $0 < r < 1$ de functies

$$c_k^+(r) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \phi^+(z) z^{-k} \frac{dz}{z} = \frac{r^{-k}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi^+(r e^{ix}) e^{-ikx} dx$$

en

$$c_k^-(r) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1/r} \phi^-(z) z^{-k} \frac{dz}{z} = \frac{r^k}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi^-(e^{ix}/r) e^{-ikx} dx$$

constant zijn als functie van $r \in]0, 1[$. We schrijven daarom $c_k^\pm(r) = c_k^\pm$. Uit iii) volgt dat

$$c_k = \lim_{r \uparrow 1} (r^k c_k^+ + r^{-k} c_k^-) = c_k^+ + c_k^-.$$

Als $k < 0$, dan geeft limietnemen voor $r \downarrow 0$ in de definitie van $c_k^+(r)$ dat $c_k^+ = 0$, dus $c_k = c_k^-$. Is anderzijds $k \geq 0$, dan geeft limietnemen voor $r \downarrow 0$ in de definitie van $c_k^-(r)$ dat $c_k^- = 0$, waarbij we in het geval dat $k = 0$ ook nog gebruiken dat $\phi^-(\infty) = 0$. Dit impliceert dat $c_k = c_k^+$ als $k \geq 0$. Omdat de $r^k c_k^+(r)$, resp. $r^{-k} c_k^-(r)$ de Fourier-coëfficiënten zijn van $x \mapsto \phi^+(r e^{ix})$, resp. $x \mapsto \phi^-(e^{ikx}/r)$, krijgen we dat ϕ^+ , resp. ϕ^- gegeven worden door (6.66), resp. (6.67). Hiermee is de eenduidigheid van de functies ϕ^+ en ϕ^- aangetoond.

ϕ is gelijk aan de uniforme randwaarde van een analytisch functie op $B(0; 1)$, dan en slechts dan als we in het bovenstaande $\phi^- \equiv 0$ kunnen nemen. Omdat we voor iedere $k < 0$ hadden dat $c_k = c_k^-$, is deze voorwaarde equivalent met de voorwaarde dat $c_k = 0$ voor iedere strikt negatieve k . $\square$

Er is nog een andere interessante interpretatie van Lemma 6.8. De voorwaarde $|z| = 1$ is equivalent met $1/z = \bar{z}$. Definieer de functie ψ^- op $B(0; 1)$ door middel van

$$\psi^-(z) = \sum_{l=1}^{\infty} c_{-l} \bar{z}^l, \quad |z| < 1. \quad (6.68)$$

Definieer vervolgens de functie u op $B(0; 1)$ door middel van

$$u(z) := \phi^+(z) + \psi^-(z), \quad |z| < 1.$$

Vergelijking van (6.11) met (6.66) en (6.67) geeft nu dat

$$f_r(x) = u\left(r e^{ix}\right), \quad 0 \leq r < 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

en Lemma 6.8 laat zien dat ϕ de uniforme randwaarde is van u .

Beschouw nu alle functies op $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ als functies van twee reële variabelen. De Laplace-operator

$$\Delta := D_1^2 + D_2^2$$

kan dan gefactoriseerd worden als

$$\Delta = (D_2 + iD_1) \circ (D_2 - iD_1) = (D_2 - iD_1) \circ (D_2 + iD_1). \quad (6.69)$$

Omdat ϕ^+ complex-differentieerbaar is, geldt de Cauchy-Riemann-vergelijking

$$D_2 \phi^+ = iD_1 \phi^+,$$

zoals besproken is in Stelling 4.16. In combinatie met de eerste factorisering van Δ in (6.69) leidt dit tot $\Delta \phi^+ = 0$, ofwel ϕ^+ is een *harmonische functie*.

Anderzijds is $\psi^-(z) = \chi(\bar{z})$, waarin χ een complex analytische functie is in $B(0; 1)$. (Er geldt dat $\chi(z) = \phi^-(1/z)$ als $0 < |z| < 1$, maar dit zullen we verder niet gebruiken.) Omdat χ complex differentieerbaar is, leidt de Cauchy-Riemann-vergelijking voor χ tot de ‘geconjugeerde Cauchy-Riemann-vergelijking’

$$D_2 \psi^- = -iD_1 \psi^-$$

voor ψ^- . Nu geeft de tweede factorisering van Δ in (6.69) dat $\Delta \psi^- = 0$, dus ook ψ^- is harmonisch. De conclusie is dat $u = \phi^+ + \psi^-$ harmonisch is in $B(0; 1)$, met uniforme randwaarde gelijk aan ϕ .

Uit (6.14) lezen we af dat

$$u\left(r e^{ix}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi\left(e^{i(x-y)}\right) \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos y} dy, \quad (6.70)$$

welke de *Poisson-integraal* van de functie ϕ genoemd wordt. Samenvattend hebben we het volgende resultaat bewezen.

Stelling 6.42 *Bij iedere continue functie ϕ op $C(0; 1)$ definieert de formule (6.70) een harmonische functie u op $B(0; 1)$, waarvan ϕ de uniforme randwaarde is.*

6.6 Fourier-integralen

Er is ook een Fourier-analyse voor niet-periodieke functies, waarbij Fourier-reeksen worden vervangen door integralen. De n -dimensionale versie hiervan is van groot nut bij de bestudering van partiële differentiaalvergelijkingen. In deze paragraaf geven we een korte beschrijving van de voornaamste eigenschappen, met niet meer dan aanduidingen van de bewijzen.

Men definieert van een absoluut integreerbare functie u op $\mathbb{R}$ de Fourier-getransformeerde $\mathcal{F}u$, in de literatuur ook vaak genoteerd als $\hat{u}$, door middel van de formule

$$\mathcal{F}u(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i x \xi} u(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (6.71)$$

Dit definieert een continue functie $\mathcal{F}u$ op $\mathbb{R}$.

Opmerking 6.43 De Fourier-getransformeerde (6.71) wordt gedefinieerd door middel van een integraal over de hele reële as en van dergelijke oneigenlijke integralen is de theorie nog niet zover ontwikkeld als van integralen van continue functies over begrensde gesloten segmenten. Wij geven in kort bestek aan hoe analoge resultaten voor oneigenlijke integralen verkregen kunnen worden.

Een functie $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heet *absoluut integreerbaar* indien

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)| dx := \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N |u(x)| dx < \infty.$$

Is $f = f(x, \xi)$ een functie van $(x, \xi) \in \mathbb{R} \times A$, dan definieert

$$I(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \xi) dx$$

een continue functie van ξ als aan de volgende voorwaarden is voldaan.

- i) Er is voor iedere $\xi_0 \in A$ en iedere $\eta > 0$ een omgeving U van ξ_0 in A en een $N > 0$, met de eigenschap dat voor iedere $\xi \in U$ geldt dat

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} |f(x, \xi)| dx \leq \eta.$$

- ii) f is continu op $\mathbb{R} \times A$.

Bewijs Schrijf

$$I(\xi) - I(\xi_0) = \int_{-N}^N f(x, \xi) dx - \int_{-N}^N f(x, \xi_0) dx \quad (6.72)$$

$$+ \int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} f(x, \xi) dx - \int_{\mathbb{R} \setminus [-N, N]} f(x, \xi_0) dx. \quad (6.73)$$

Zij $\epsilon > 0$. Kies daarbij $0 < \eta < \epsilon/2$ en daarbij A en N als in i). Dit geeft dat als $\xi \in A$, dan is de absolute waarde van (6.73) kleiner of gelijk aan 2η .

Vanwege ii) en de stelling over het verwisselen van limieten met integralen over begrensde gesloten intervallen, Stelling 2.5, is er een omgeving B van ξ_0 in U met de eigenschap dat voor iedere $\xi \in B$ geldt dat de absolute waarde van het rechterlid in (6.72) kleiner of gelijk is aan $\epsilon - 2\eta$. Dit

levert dat $|I(\xi) - I(\xi_0)| \leq \epsilon$ als $\xi \in A \cap B$, waarmee de continuïteit van $\xi \mapsto I(\xi)$ in het punt ξ_0 is aangetoond. $\square$

Zij nu $f(x, \xi) = e^{-i x \xi} u(x)$. Dan is $|f(x, \xi)| = |u(x)|$, onafhankelijk van ξ en we zien dat i) geldt als de functie u absoluut integreerbaar is. Verder is duidelijk dat f continu is op $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ als u continu is. Daarmee is bewezen dat de Fourier-getransformeerde van u een continue functie definieert als u een continue en absoluut integreerbare functie op $\mathbb{R}$ is. $\oslash$

Omdat we graag zowel van u als van $\mathcal{F}u$ de afgeleiden willen onderzoeken, maken we vooreerst zulke sterke aannamen over u , dat alle bewerkingen zonder enig probleem met betrekking tot de convergentie van de oneigenlijke integraal kunnen worden uitgevoerd.

Definitie 6.44 Een functie u op $\mathbb{R}$ heet *snel afnemend* als voor iedere $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ de functie $x^N u(x)$ begrensd is op $\mathbb{R}$. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ is de ruimte van alle $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ met de eigenschap dat voor iedere $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ de k -de orde afgeleide $u^{(k)}$ snel afnemend is. De ruimte $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ heet de *Schwartz-ruimte van testfuncties*. $\oslash$

Lemma 6.45 De Fourier-transformatie $\mathcal{F} : u \mapsto \mathcal{F}u$ definieert een lineaire afbeelding van $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ naar $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Noteer $(Pu)(x) = \frac{1}{i} du(x)/dx$ en $(Qu)(x) = x u(x)$. Dan definiëren P en Q lineaire afbeeldingen van $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ naar $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ en er geldt voor iedere $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ dat

$$\mathcal{F}(Pu) = Q(\mathcal{F}u) \quad \text{en} \quad (6.74)$$

$$P(\mathcal{F}u) = -\mathcal{F}(Qu). \quad (6.75)$$

Bewijs De eerste formule volgt door een partiële integratie toe te passen, terwijl de tweede formule volgt door differentiatie onder het integraalteken.

De partiële integratie wordt toegepast op de integraal over $\{-N, N\}$, gevolgd door limietnemen voor $N \rightarrow \infty$. De differentiatie onder het integraalteken voor de oneigenlijke integraal wordt gerechtvaardigd door middel van argumenten als in Opmerking 6.43, toegepast op de differentiequotienten $\frac{(\mathcal{F}u)(\xi) - (\mathcal{F}u)(\eta)}{\xi - \eta}$. Het uitwerken van alle details maakt het bewijs nog vrij bewerkelijk. $\square$

De operator P , resp. Q wordt in de quantummechanica de *impulsoperator*, resp. de *positie-operator* genoemd. Lemma 6.45 zegt dat de Fourier-transformatie deze twee operatoren onderling verwisselt, waarbij opgelet moet worden dat er in (6.75) een minteken optreedt.

Voorbeeld 6.46 Voor iedere $a \in \mathbb{R}$ met $a > 0$ definieert

$$u_a(x) = e^{-a x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

een functie $u_a \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Dus $\mathcal{F}u_a \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Er geldt

$$(Pu_a)(x) = i a x u_a(x).$$

Het linker- en rechterlid hiervan Fourier-transformerend, krijgen we met het oog op (6.74) en (6.75), dat

$$\xi (\mathcal{F}u_a)(\xi) = -a \frac{d}{d\xi} (\mathcal{F}u_a)(\xi).$$

Hieruit volgt dat de afgeleide van $(\mathcal{F}u_a)/u_{1/a}$ gelijk aan nul is, dus $(\mathcal{F}u_a)/u_{1/a}$ is constant, ofwel

$$\mathcal{F}u_a = c(a) \cdot u_{1/a}, \quad \text{met} \quad c(a) = (\mathcal{F}u_a)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x^2/2} dx.$$

De substitutie van variabelen $x = (2/a)^{1/2} y$ geeft dat

$$c(a) = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6.76)$$

Hierbij hebben we ook gebruikt dat $\int e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$, een bekende formule van Gauss, zie bijvoorbeeld Vraagstuk 2.7 voor een bewijs. De conclusie is daarmee dat

$$(\mathcal{F}u_a)(\xi) = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^{1/2} e^{-\xi^2/(2a)}. \quad \xi \in \mathbb{R} \quad (6.77)$$

Anders gezegd, de Fourier-transformatie voert Gauss-functies in Gauss-functies over, daarbij gaan ‘wijde’ over in ‘smalle’ en vice versa. $\oslash$

Een interessant verband tussen de Fourier-integraal en Fourier-reeksen wordt gegeven door de volgende *sommatieformule van Poisson*.

Lemma 6.47 *Zij $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Dan geldt voor iedere $x \in \mathbb{R}$ en $T > 0$ dat*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} u(x + kT) = \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}u)\left(\frac{2\pi l}{T}\right) e^{i \frac{2\pi l x}{T}}. \quad (6.78)$$

Bewijs Het linkerlid in (6.78) definieert een C^∞ functie $v(x)$, die voldoet aan $v(x + T) = v(x)$, d.w.z. v is periodiek is met periode gelijk aan T . Dientengevolge wordt v gegeven door de Fourier-reeks

$$v(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} v_l e^{i \frac{2\pi l x}{T}},$$

waarin

$$\begin{aligned} v_l &= \frac{1}{T} \int_0^T v(y) e^{-i \frac{2\pi l y}{T}} dy = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^T u(y + kT) e^{-i \frac{2\pi l y}{T}} dy \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^T u(y + kT) e^{-i \frac{2\pi l (y+kT)}{T}} dy = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{kT}^{(k+1)T} u(z) e^{-i \frac{2\pi l z}{T}} dz \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} u(z) e^{-i \frac{2\pi l z}{T}} dz = \frac{1}{T} (\mathcal{F}u)\left(\frac{2\pi l}{T}\right). \end{aligned}$$

Hiermee is (6.78) bewezen. $\square$

Het rechterlid in (6.78) kan opgevat worden als een Riemann-som voor de integraal

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}u)(\xi) e^{i \xi x} d\xi, \quad (6.79)$$

waarbij als tussenpunten zijn genomen

$$\xi = \frac{2\pi l}{T}, \quad l \in \mathbb{Z},$$

welke op onderlinge afstand $\frac{2\pi}{T}$ liggen. Men kan bewijzen, gebruikmakend van het feit dat $\mathcal{F}u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, dat het rechterlid in (6.78) naar de integraal (6.79) convergeert als $T \rightarrow \infty$. Anderzijds volgt uit het snelle afnemen van u dat het linkerlid in (6.78) naar $u(x)$ convergeert, als $T \rightarrow \infty$. Hieruit concluderen we de geldigheid van de volgende *Fourier-inversieformule*

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}u)(\xi) e^{i\xi x} d\xi, \quad (6.80)$$

voor iedere $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Als we met S de spiegelingoperator noteren die is gedefinieerd door $(Su)(x) = u(-x)$, $x \in \mathbb{R}$, dan kunnen we (6.80) noteren als

$$2\pi I = (S \circ \mathcal{F}) \circ \mathcal{F} = (\mathcal{F} \circ S) \circ F = \mathcal{F} \circ (S \circ \mathcal{F}).$$

Hieruit volgt dat de afbeelding $\frac{1}{2\pi} S \circ \mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ zowel een links- als rechtsinverse is van $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Met andere woorden, de Fourier-transformatie $\mathcal{F}$ is een bijectieve afbeelding van $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ naar $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, met $\frac{1}{2\pi} S \circ \mathcal{F}$ als zijn inverse.

In de ruimte van de complexwaardige functies op $\mathbb{R}$ gebruikt men het Hermite'se inproduct dat is gedefinieerd door

$$(u, v) := \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \overline{v(x)} dx.$$

De integratievolgorde verwisselend, krijgen we voor iedere u, v dat

$$(\mathcal{F}u, v) = (u, S\mathcal{F}v).$$

Hierin v vervangend door $\mathcal{F}v$, krijgen we in combinatie met $S \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F} = 2\pi I$ de *integraalformule van Parseval*

$$(\mathcal{F}u, \mathcal{F}v) = 2\pi (u, v), \quad (6.81)$$

geldig voor alle $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Een belangrijke ruimte van functies is de ruimte $L^2(\mathbb{R})$ van alle equivalentieklassen van complexwaardige meetbare functies u op $\mathbb{R}$, waarvoor

$$(u, u) = \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx < \infty.$$

$L^2(\mathbb{R})$ is een Hilbert-ruimte met betrekking tot het bovengenoemde Hermite'se inproduct; dit betekent dat iedere Cauchy-rij in $L^2(\mathbb{R})$ met betrekking tot de norm $\|u\| := (u, u)^{1/2}$ convergeert. De integraalformule van Parseval kan nu gebruikt worden om de Fourier-transformatie als volgt uit te breiden tot een lineaire afbeelding $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$. Het is een feit dat er voor iedere functie $u \in L^2(\mathbb{R})$ een rij $u_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ bestaat, waarvoor $\|u_k - u\| \rightarrow 0$ als $k \rightarrow \infty$. Dit impliceert dat de rij u_k een Cauchy-rij is in $L^2(\mathbb{R})$. Uit (6.81) lezen we af dat dan ook $\mathcal{F}u_k$ een Cauchy-rij is in $L^2(\mathbb{R})$. Omdat $L^2(\mathbb{R})$ een Hilbert-ruimte is, is er een $v \in L^2(\mathbb{R})$ waarvoor $\mathcal{F}u_k \rightarrow v$ als $k \rightarrow \infty$. Men definieert nu $\mathcal{F}u = v$ en gaat vervolgens na dat dit een continue lineaire afbeelding $\mathcal{F}$ van $L^2(\mathbb{R})$ naar $L^2(\mathbb{R})$ definieert. Het is duidelijk dat iedere uitbreiding van $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tot een continue lineaire

afbeelding $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ hieraan gelijk moet zijn. De integraalformule van Parseval (6.81) geldt voor iedere $u, v \in L^2(\mathbb{R})$.

Het nadeel van de ruimte $L^2(\mathbb{R})$ is dat niet voor iedere $u \in L^2(\mathbb{R})$ geldt dat $Pu \in L^2(\mathbb{R})$, terwijl ook $Qu \in L^2(\mathbb{R})$ niet meer op hoeft te gaan. Een natuurlijk kader voor Fourier-transformatie is de ruimte $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ van *gematigde distributies op $\mathbb{R}$* . Deze ruimte bevat $L^2(\mathbb{R})$, terwijl verder voor iedere $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ geldt dat $Pu \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ en $Qu \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. De Fourier-transformatie is een bijectieve lineaire afbeelding van $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ naar $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, met $\frac{1}{2\pi} \mathcal{S} \circ \mathcal{F}$ als inverse. De identiteiten (6.74) en (6.75) gelden voor iedere $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. De integraalformule van Parseval (6.81) is niet zinvol gedefinieerd voor iedere $u, v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, maar is wel bijvoorbeeld geldig voor $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ en $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Voor meer details verwijzen we naar het college Distributies.

Voorbeeld 6.48 Als $f(x) = 1/(x^2 + 1)$, dan is $f \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$, maar wel $f \in L^2(\mathbb{R})$. Uit (4.33) lezen we af dat $(\mathcal{F}f)(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$. Gebruik makend van de Fourier-inversieformule (6.80) kunnen we dit ook afleiden uit de gemakkelijker te bepalen integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} e^{-|\xi|} d\xi = \int_{-\infty}^0 e^{(ix+1)\xi} d\xi + \int_0^{\infty} e^{(ix-1)\xi} d\xi = \frac{1}{ix+1} - \frac{1}{ix-1} = \frac{2}{x^2+1}.$$

⊗

De uitbreiding van de theorie naar functies op $\mathbb{R}^n$ is voor de hand liggend, al vergen sommige bewijzen in dit algemenere kader wat meer werk. Met de notatie

$$\langle x, \xi \rangle := \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$$

definieert men de Fourier-getransformeerde $\mathcal{F}u$ van een functie u op $\mathbb{R}^n$ door middel van

$$\mathcal{F}u(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(x) d_n x, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (6.82)$$

Hierin geeft het symbool $d_n x$ aan dat het om n -dimensionale integratie gaat, ofwel herhaalde integratie over de n reële variabelen x_1 tot en met x_n .

Definitie 6.49 Een functie u op $\mathbb{R}^n$ heet *snel afnemend* als voor iedere $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ de functie $(1 + \|x\|)^N u(x)$ begreind is op $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ is de ruimte van alle $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ met de eigenschap dat alle partiële afgeleiden van u , van willekeurig hoge orde, snel afnemend zijn. De ruimte $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ heet de *Schwartz-ruimte van testfuncties op $\mathbb{R}^n$* . ⊗

We vatten de feiten over Fourier-transformatie in $\mathbb{R}^n$ samen in de volgende stelling.

Stelling 6.50 De Fourier-transformatie $\mathcal{F} : u \mapsto \mathcal{F}u$ definieert een lineaire afbeelding van $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ naar $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Noteer, voor iedere $1 \leq j \leq n$,

$$(P_j u)(x) = \frac{1}{i} \partial u(x) / \partial x_j \quad \text{en} \quad (Q_j u)(x) = x_j u(x).$$

Dan definiëren P_j en Q_j lineaire afbeeldingen van $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ naar $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en er geldt voor iedere $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dat

$$\mathcal{F}(P_j u) = Q_j(\mathcal{F}u) \quad \text{en} \quad (6.83)$$

$$P_j(\mathcal{F}u) = -\mathcal{F}(Q_j u). \quad (6.84)$$

Verder geldt voor iedere $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de Fourier-inversieformule

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{F}u)(\xi) e^{i\langle \xi, x \rangle} d_n \xi, \quad (6.85)$$

en voor iedere $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de integraalformule van Parseval

$$(\mathcal{F}u, \mathcal{F}v) = (2\pi)^n (u, v), \quad (6.86)$$

waarin het Hermite'se inproduct is gedefinieerd door

$$(u, v) := \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \overline{v(x)} d_n x. \quad (6.87)$$

Definieer $L^2(\mathbb{R}^n)$ als de ruimte van alle equivalentieklassen van complexwaardige meetbare functies u op $\mathbb{R}$ waarvoor $(u, u) < \infty$. Dan is $L^2(\mathbb{R}^n)$ een Hilbert-ruimte met betrekking tot het Hermite'se inproduct (6.87). Er is een eenduidig bepaalde continue lineaire uitbreiding $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ van de Fourier-transformatie $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De afbeelding $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ is bijectief, met $(2\pi)^{-n} \mathcal{S} \circ \mathcal{F}$ als inverse. Verder geldt (6.86) voor alle $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Net als in het ééndimensionale geval wordt een natuurlijk kader voor Fourier-transformatie in $\mathbb{R}^n$ gevormd door de ruimte $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ van gematigde distributies op $\mathbb{R}^n$. Deze ruimte bevat $L^2(\mathbb{R}^n)$, terwijl verder voor iedere $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ en iedere $1 \leq j \leq n$ geldt dat $P_j u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ en $Q_j u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. De Fourier-transformatie is een bijectieve lineaire afbeelding van $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ naar $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, met $(2\pi)^{-n} \mathcal{S} \circ \mathcal{F}$ als inverse. De identiteiten (6.83) en (6.84) gelden voor iedere $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. De integraalformule van Parseval (6.86) is niet zinvol gedefinieerd voor iedere $u, v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, maar is wel bijvoorbeeld geldig voor $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Ook hier verwijzen we voor meer details naar het college Distributies.

6.7 Vraagstukken bij Hoofdstuk 6

Vraagstuk 6.1 Beschouw de Fourier-reeks

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} e^{i k x},$$

waarbij $c_k = 0$ als $k < 0$. Bewijs dat deze Fourier-reeks absoluut uniform convergeert en bereken de som. Bewijs dat

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(k x)}{k!} = e^{\cos x} \cos(\sin x), \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(k x)}{k!} = e^{\cos x} \sin(\sin x).$$

⊗

Vraagstuk 6.2 Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ die is gegeven door de Fourier-reeks

$$a_0 + \sum_{k \geq 1} a_k \cos kx + \sum_{k \geq 1} b_k \sin kx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{i k x},$$

waarbij de convergentie uniform is. Bewijs dat

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad k \geq 1, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Bewijs dat f symmetrisch is in de zin dat $f(-x) = f(x)$ voor iedere $x \in \mathbb{R}$, dan en slechts dan als f gegeven is door een cosinusreeks, dat wil zeggen, voor iedere $k \geq 1$ geldt dat $b_k = 0$. En dat f antisymmetrisch is in de zin dat $f(-x) = -f(x)$ voor iedere $x \in \mathbb{R}$, dan en slechts dan als f gegeven is door een sinusreeks, dat wil zeggen, voor iedere $k \geq 0$ geldt dat $a_k = 0$. ⊗

Vraagstuk 6.3 Schrijf $(\cos x)^3$ als een eindige Fourier-reeks. Bewijs dat

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos x)^3 e^{-i k x} dx = \begin{cases} 1/8 & \text{als } k = \pm 3, \\ 3/8 & \text{als } k = \pm 1, \\ 0 & \text{in alle andere gevallen.} \end{cases}$$

Het *binomium van Newton* luidt:

$$(a + b)^n = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} a^{n-l} b^l \quad \text{waarin} \quad \binom{n}{l} = \frac{n!}{(n-l)! l!}.$$

Bewijs voor iedere $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ dat

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos x)^n e^{-i k x} dx = \begin{cases} 2^{-n} \binom{n}{l} & \text{als } k = n - 2l, l \in \mathbb{Z}, 0 \leq l \leq n, \\ 0 & \text{in alle andere gevallen.} \end{cases}$$

Bewijs dat als $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, dan is het gemiddelde van de functie $(\cos x)^{2l}$ gelijk aan $(2l)! / ((l!)^2 2^{2l})$. $\oslash$

Vraagstuk 6.4 Zij f de 2π -periodieke functie op $\mathbb{R}$, waarvoor $f(x) = x^2$ als $-\pi \leq x \leq \pi$. Maak een schets!

Bereken de Fourier-coëfficiënten van f . Bereken de symmetrische partiële sommen van de Fourier-reeks van f . Onderzoek de convergentie van de Fourier-reeks van f .

Bewijs dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}, \quad -\pi \leq x \leq \pi,$$

waarbij de convergentie uniform is. Bewijs dat deze identiteit *niet* geldt als $|x| > \pi$. Ga na dat invullen van $x = 0$, resp. $x = \pi$ leidt tot

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \text{resp.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

waarbij we de laatste identiteit al eens eerder hebben gezien. Probeer nog wat meer waarden van x , waarvoor u voor iedere positieve gehele n de waarde van $\cos(nx)$ expliciet kent. $\oslash$

Vraagstuk 6.5 Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door: $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$ als $0 \leq x \leq \pi$, $f(x) = f(-x)$ als $-\pi \leq x \leq 0$ en f is 2π -periodiek. Maak een schets van f . Is f continu?

- a) Bereken de Fourier-coëfficiënten van f . Bewijs dat de Fourier-reeks van f absoluut uniform convergent is. Bewijs dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)x) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Wat geeft dit voor $x = 0$?

- b) Wat is, voor een willekeurige 2π -periodieke continue functie, de identiteit van Parseval? Bewijs dat

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

- c) Leid uit a) af dat, voor iedere $0 \leq x \leq \pi$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \sin((2n+1)x) = \frac{\pi^2}{8}x - \frac{\pi}{8}x^2.$$

Bewijs vervolgens dat, voor iedere $0 \leq x \leq \pi$,

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} \cos((2n+1)x) = \frac{\pi^2}{16} \left[x^2 - \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \right] - \frac{\pi}{24} \left[x^3 - \left(\frac{\pi}{2} \right)^3 \right].$$

$\oslash$

Vraagstuk 6.6 Zij c een gegeven strikt positief reëel getal. Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door: $f(x) = e^{cx} + e^{-cx}$ als $-\pi < x \leq \pi$, en f is 2π -periodiek.

a) Maak een schets van f op het interval $[-2\pi, 2\pi]$. Is f continu? Merk op dat $f(x) = f(-x)$ als $-\pi < x < \pi$.

b) Bereken de Fourier-coëfficiënten van f . Gebruik daarbij dat voor iedere $k \in \mathbb{Z}$ geldt dat

$$e^{-ik\pi} = e^{ik\pi} = (-1)^k.$$

Bewijs dat de Fourier-reeks van f absoluut uniform convergent is. Bewijs dat

$$\frac{1}{c^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{c^2 + k^2} \cdot \cos(kx) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{c^2 + k^2} \cdot e^{ikx} = \frac{\pi}{c} \cdot \frac{e^{cx} + e^{-cx}}{e^{c\pi} - e^{-c\pi}}, \quad -\pi < x \leq \pi.$$

c) Bewijs dat

$$\frac{1}{c^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{c^2 + k^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{c^2 + k^2} = \frac{\pi}{c} \cdot \frac{e^{c\pi} + e^{-c\pi}}{e^{c\pi} - e^{-c\pi}}.$$

Formuleer een voorwaarde waaronder een reeks van functies een continue functie definieert. Bewijs daarmee dat de functie

$$c \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{c^2 + k^2}$$

continu is op $\mathbb{R}$. Bewijs hiermee vervolgens dat

$$\lim_{c \downarrow 0} \left[\frac{\pi}{c} \cdot \frac{e^{c\pi} + e^{-c\pi}}{e^{c\pi} - e^{-c\pi}} - \frac{1}{c^2} \right] = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Bewijs met behulp van Taylor-ontwikkeling dat het linkerlid gelijk is aan $\frac{\pi^2}{3}$.

d) Wat is, voor een willekeurige 2π -periodieke continue functie, de identiteit van Parseval? Pas de identiteit van Parseval toe op de in dit vraagstuk gegeven functie f en bereken hiermee

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(c^2 + k^2)^2}.$$

e) Leid uit b) af dat, voor iedere $0 \leq x \leq \pi$,

$$\frac{x}{c^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{c^2 k + k^3} \cdot \sin(kx) = \frac{\pi}{c^2} \cdot \frac{e^{cx} - e^{-cx}}{e^{c\pi} - e^{-c\pi}}.$$

⊗

Vraagstuk 6.7 Zij f de 2π -periodieke functie op $\mathbb{R}$, waarvoor $f(x) = 1$ als $0 < x < \pi$ en $f(x) = 0$ als $-\pi < x < 0$. Voor $x = 0$ en $x = \pi$ mag u aan $f(x)$ iedere waarde geven die u wilt. Maak een schets!

Bereken de Fourier-coëfficiënten van f . Bereken de symmetrische partiële sommen van de Fourier-reeks van f . Onderzoek de convergentie van de Fourier-reeks van f . Wat gebeurt er voor $x = 0$ en voor $x = \pi$?

Bewijs dat

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin((2l-1)x)}{2l-1} = \frac{\pi}{4} \quad \text{als } 0 < x < \pi.$$

Wat gebeurt er als $-\pi < x < 0$, als $x = 0$ en als $x = \pi$? Op wat voor intervallen is de convergentie uniform? $\oslash$

Vraagstuk 6.8 Zij $c_k, k \in \mathbb{Z}$, een rij van complexe getallen waarvoor

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k c_k| < \infty.$$

Bewijs dat de Fourier-reeksen

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}, \quad \text{resp.} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} i k c_k e^{ikx}$$

uniform absoluut convergent zijn. Noteer de som met $f(x)$, resp. $g(x)$. Bewijs, gebruik makend van Vraagstuk 5.1, dat f continu differentieerbaar is en dat $f' = g$. Anders gezegd,

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} i k c_k e^{ikx},$$

ofwel de Fourier-reeks mag termsgewijs gedifferentieerd worden.

Gebruik Vraagstuk 6.4 om $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nx)$ te berekenen. Wat wordt dit voor $x = \frac{\pi}{2}$? $\oslash$

Vraagstuk 6.9 Zij f een continue 2π -periodieke functie op $\mathbb{R}$, waarvan de Fourier-coëfficiënten $c_k, k \in \mathbb{Z}$, absoluut sommeerbaar zijn. Zij I de integraal van f over het interval $[0, 2\pi]$. Definieer, voor iedere $N \in \mathbb{Z}_{>0}$, de Riemann-som

$$R_N := \frac{2\pi}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f\left(\frac{2\pi n}{N}\right).$$

Bewijs dat $I = 2\pi c_0$ en dat

$$R_N = 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{lN}.$$

Hint: substitueer de Fourier-reeks van f in de definitie van R_N . Onderscheid bij de berekening het geval dat k een geheel veelvoud van N is en het geval dat k geen geheel veelvoud is van N . Bewijs dat $R_N \rightarrow I$ als $N \rightarrow \infty$.

Neem nu aan dat $f \in C^m, m \geq 2$. Bewijs dat voor iedere $k \in \mathbb{Z}$ met $k \neq 0$ geldt dat

$$|c_k| \leq C_m(f) |k|^{-m},$$

waarin

$$C_m(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^{(m)}(x)| dx.$$

Bewijs hiermee dat

$$|R_N - I| \leq 4\pi C_m(f) \beta_m N^{-m},$$

waarin

$$\beta_m := \sum_{l=1}^{\infty} l^{-m}.$$

Dit betekent dat voor $N \rightarrow \infty$ de Riemann-sommen R_N des te sneller convergeren naar de integraal I van f over een periodeninterval, naarmate de functie f een gladdere periodieke functie is.

Opmerking Men noemt een numerieke integratiemethode met N tussenpunten van de orde m als de fout in de benadering van de integraal van iedere voldoende gladde functie geschat kan worden op een constante maal N^{-m} . Voor willekeurige gladde functies op een gegeven interval is de benadering met Riemann-sommen van de orde één, en niet beter. Om een benadering van hogere orde te krijgen moeten men andere lineaire combinaties van de waarden van de functie in de tussenpunten gebruiken dan de Riemann-sommen. Als geldt dat $f^{(j)}(2\pi) = f^{(j)}(0)$ voor alle $0 \leq j \leq m$, dan is de 2π -periodieke uitbreiding van f tot $\mathbb{R}$ een m keer continue differentieerbare functie. In dit geval doet zich het opmerkelijke verschijnsel voor dat de Riemann-som toch een benadering van de orde m oplevert. Men kan dit ook bewijzen zonder gebruik te maken van Fourier-reeksen, maar het is vrij natuurlijk om aan Fourier-reeksen te denken als men zich realiseert dat de voorwaarde $f^{(j)}(2\pi) = f^{(j)}(0)$ voor alle $0 \leq j \leq m$ betekent dat f een m keer continu differentieerbare uitbreiding heeft tot een 2π -periodieke functie.

Men zegt dat de Riemann-sommen R_N exponentieel snel naar I convergeren voor $N \rightarrow \infty$ als er constanten $C > 0$ en $0 < \rho < 1$ zijn, met de eigenschap dat voor iedere N geldt dat $|R_N - I| < C \rho^{-N}$. Men kan bewijzen dat dit het geval is indien $f(x) = \varphi(e^{ix})$, $x \in \mathbb{R}$, voor een complex analytische functie φ die gedefinieerd is op een open omgeving U van de eenheidscirkel in het complexe vlak.

◊

Vraagstuk 6.10 In dit vraagstuk bekijken we hoe Fourier de naar hem vernoemde reeksen toepaste in zijn theorie van warmte. Is $u(x, t)$ de warmtedichtheid, die afhangt van één positiecoördinaat $x \in \mathbb{R}$ en van de tijd t , dan wordt de diffusie van de warmte beschreven door de partiële differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}. \quad (6.88)$$

a) We maken de volgende veronderstellingen.

- i) $0 < T \leq \infty$ en u is een continue functie op $\mathbb{R} \times [0, T[$.
- ii) Voor iedere $x \in \mathbb{R}$ is $t \mapsto u(x, t)$ differentieerbaar. De functie $(x, t) \mapsto \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ is continu op $\mathbb{R} \times]0, T[$.
- iii) Voor iedere $t \in]0, T[$ is de functie $u(t) : x \mapsto u(x, t)$ een tweemaal continu differentieerbare en 2π -periodieke functie op $\mathbb{R}$.
- iv) u voldoet op $\mathbb{R} \times]0, T[$ aan de warmtediffusievergelijking (6.88).

Noteer, voor iedere $k \in \mathbb{Z}$, de k -de Fourier-coëfficiënt van de functie $u(t)$ met $c_k(t)$. Bewijs dat c_k continu is op $[0, T[$, differentieerbaar op $]0, T[$ en dat voor iedere $t \in]0, T[$ geldt dat

$c_k'(t) = -k^2 c_k(t)$. Bewijs dat voor iedere $k \in \mathbb{Z}$ en $t \in]0, T[$ geldt dat $c_k(t) = c_k(0) e^{-k^2 t}$.
Bewijs dat voor iedere $x \in \mathbb{R}$ en $t \in]0, T[$ geldt dat

$$u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(0) e^{-k^2 t} e^{ikx}. \quad (6.89)$$

- b) Zij nu u_0 een continue 2π -periodieke functie op $\mathbb{R}$, waarvan de Fourier-coëfficiënten $c_k(0)$ absoluut sommeerbaar zijn. Definieer de functie u op $\mathbb{R} \times [0, \infty[$ door middel van de formule (6.89). Bewijs dat u continu is op $\mathbb{R} \times [0, \infty[$ en dat voor iedere $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $u(x, 0) = u_0(x)$. Bewijs, gebruikmakend van Vraagstuk 6.8, dat op $\mathbb{R} \times]0, \infty[$ de functie u willekeurig vaak differentieerbaar is en voldoet aan de warmtediffusievergelijking (6.88). $\oslash$

Vraagstuk 6.11 Bereken de integraal $\int_0^{2\pi} (\cos x)^6 dx$ door de functie $(\cos x)^3$ met behulp van (4.19) als een Fourier-reeks te schrijven en vervolgens daarop de identiteit van Parseval voor Fourier-reeksen toe te passen. $\oslash$

Vraagstuk 6.12 Pas de identiteit van Parseval voor Fourier-reeksen toe op de functie f in Voorbeeld 6.16, resp. Voorbeeld 6.19, resp. Vraagstuk 6.4, resp. Vraagstuk 6.7. Laat zien dat hieruit de volgende identiteiten volgen:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

$\oslash$

Vraagstuk 6.13 Pas Poisson's sommatieformule (6.78) in Lemma 6.47 toe op de functie $u = u_a$ in Voorbeeld 6.46. Definieer de *thetafunctie* door middel van

$$\theta(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\pi t k^2}, \quad t \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Bewijs dat voor iedere $t \in \mathbb{R}_{>0}$ geldt dat $\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right)$. $\oslash$

Vraagstuk 6.14 Men kan bewijzen dat als $|q| < 1$, dan heeft de vergelijking van Kepler

$$x = p + q \sin x$$

precies één oplossing $x = \psi(p, q)$, die willekeurig vaak differentieerbaar van (p, q) afhangt.

Bewijs dat de eenduidigheid impliceert dat $\psi(p + 2\pi, q) = \psi(p, q) + 2\pi$ en dat $\psi(-p, q) = -\psi(p, q)$. Hieruit volgt dat de functie $p \mapsto f(p, q) := \psi(p, q) - p$ periodiek is met periode 2π en dat $f(-p, q) = -f(p, q)$. Bewijs dat

$$\psi(p, q) = p + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(q) \sin(n p)$$

waarin de Fourier-coëfficiënten

$$b_n(q) := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (\psi(p, q) - p) \sin(n p) \, dp \quad (6.90)$$

snel afnemend zijn, in de zin dat er voor iedere $N > 0$ een constante $C = C(N, q)$ is met de eigenschap dat $|b_n(q)| \leq C n^{-N}$ voor alle positieve gehele getallen n .

Het probleem is dat de integraal (6.90) gedefinieerd is in termen van de functie $\psi(p, q)$, die niet expliciet bekend is. Om dit te verbeteren schrijven we $\sin(n p) = -n^{-1} d \cos(n p)/dp$ en passen een partiële integratie toe in (6.90). Ga na dat dit leidt tot

$$\begin{aligned} b_n(q) &= \frac{1}{n \pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \psi(p, q)}{\partial p} \cos(n p) \, dp \\ &= \frac{1}{n \pi} \int_0^{2\pi} \cos(n(x - q \sin x)) \, dx, \end{aligned}$$

waarbij in de tweede identiteit de substitutie van variabelen $\psi(p, q) = x$ is gebruikt. Op deze manier is $b_n(q)$ als de integraal van een expliciet gegeven functie verkregen.

Voor ieder geheel getal $n \geq 0$ is de *Bessel-functie van de orde n* gegeven door de formule

$$J_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n x - r \sin x) \, dx. \quad (6.91)$$

In termen hiervan is dus $b_n(q) = \frac{2}{n} J_n(n q)$, voor iedere $n \geq 1$.

Ga na dat

$$\begin{aligned} \cos(n x - r \sin x) &= \operatorname{Re} \left(e^{i n x} e^{-i r \sin x} \right), \\ -i r \sin x &= \frac{r}{2} \left(-e^{i x} + e^{-i x} \right), \\ e^{-i r \sin x} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^k \frac{k!}{l! (k-l)!} (-1)^l e^{i(2l-k)x} \right) \frac{(r/2)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Bewijs hiermee de machtreeksvoorstelling

$$J_n(r) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (r/2)^{n+2l}}{l! (n+l)!} \quad (6.92)$$

voor de Bessel-functie van de orde n . Merk op dat de machtreeks (6.92) begint met de term $\frac{1}{n!} (r/2)^n$, dus $J_n(r)$ heeft een nulpunt van de orde n in $r = 0$.

In een artikel uit 1824 ging de astronoom Bessel uit van de integraal (6.91), die hij tegen was gekomen in zijn berekeningen aan planetenbewegingen, en leidde daaruit een hele rij eigenschappen af, waaronder de machtreeksvoorstelling (6.92). Tegenwoordig gaat men uit van (6.92) en wordt (6.91) soms niet eens meer vermeld.

Voor degenen die de gammafunctie $\Gamma(z)$ kennen als complex analytische functie op $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$, vermelden we nog dat als n een willekeurig complex getal is, niet gelijk aan een negatief geheel getal, dan wordt de Bessel-functie $J_n(r)$ van de orde n gedefinieerd door middel van (6.92), met $(n+l)!$ vervangen door $\Gamma(n+l+1)$. $\odot$

Index

Symbolen

$a \times b$, 52
 $B(a; r)$, 49, 102
 $\overline{B}(a; r)$, 76
 $C(a; r)$, 102
 $\cosh z$, 84
 $d(a, V)$, 106
 $Df(x)$, 7
 $\operatorname{div} v$, 15
 $D_j f(x)$, 1
 $\int_Y \sum_{j=1}^n f_j(x) \, dx_j$, 36
 e^z , 67
 $\partial f(x)/\partial x_j$, 1
 $\mathcal{F}u$ en $\widehat{u}$, 152
 $\operatorname{grad} f$, 3, 33
 $\operatorname{GL}(n, \mathbb{R})$, 19
 $\operatorname{Im} z$, 61
 $l^1(\mathbb{Z})$, 126
 $l^2(K)$, 145
 $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, 148
 $l^2(\mathbb{Z})$, 144
 $l(p, q)$, 49
 $\omega = \sum_{j=1}^n f_j(x) \, dx_j$, 36
 $\log w$, 68
 $\operatorname{Res}_a(f)$, 90
 $\operatorname{Re} z$, 61
 $\operatorname{rot} g$, 52
 sgn , 93
 $\sinh z$, 84
 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, 153
 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 156
 $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, 156
 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, 157
 ∂U , 106
 $W_p(\gamma)$, 40
 $|z|$, 61
 $\overline{z}$, 61
 z^w , 72

A

Abel-Poisson-benadering, 122
Abel-sommatie, 117
absolute waarde, 61
absoluut convergent, uniform, 97

afstand bij norm, 138
afstandsfunctie, 139
afstand tot verzameling, 106
algemene lineaire groep, 19
analytische functie, 105
argumentfunctie, 51
associativiteit, 59

B

Bessel, ongelijkheid van, 142
betafunctie van Euler, 26
beweging, 12
binomium van Newton, 158
boogsamenhangend, 44

C

Cauchy's integraalformule, 76
Cauchy's integraalstelling, 75
Cauchy-Riemann-vergelijkingen, 70
Cauchy-rij, uniforme, 95
centrum van ster, 49
cirkel, 101
coëfficiënten, 63
commutatieve groep, 59
commutativiteit, 59
complex analytische functie, 105
complex antilineair, 138
complexe afgeleide, 69
complexe cosinus, 84
complex differentieerbaar, 69
complex geconjugeerde, 61
complexe getallen, 59
complexe logaritme, 68
complexe machten, 72
complexe primitieve, 74
complexe sinus, 84
complexe vlak, 61
conforme afbeelding, 70
conservatief krachtveld, 46
constante kromme, 49
continu differentieerbaar, 9
convergent, puntsgewijs, 97
convergent, uniform absoluut, 97
convergente Fourier-reeks, 119

convergente machtreeks, 101
convergentiecirkel, 105
convergentieschijf, 105
convergentiestraal, 102
convex, 17
coördinaatsfunctie, 5
cosinushyperbolicus, 84, 84
Cramer, formule van, 19

D

deellichaam, 61
delingslemma, 28, 109
de Moivre, 66
differentiaal, 36
differentiaalquotiënt, 36
differentiaalvorm, 36
differentiatie onder het integraalteken, 28
Dini's test, 136
Dirichlet-kern, 129
distributieve wet, 60
divergente machtreeks, 101
divergentie van een vectorveld, 33, 15
draaiing, 70
driehoeksongelijkheid voor norm, 138

E

eenheidscirkel in $\mathbb{C}$, 65
eenheidswortels (n -de machts), 67
energie, 46
enkelvoudig samenhangend, 49
Euler's differentiaalvergelijking, 15
Euler's formule, 65
exacte differentiaalvorm, 46
exponentiële functie, 67

F

familie van krommen, 48
Fourier-coëfficiënten, 119
Fourier-getransformeerde, 119
Fourier-inversieformule, 155, 157
Fourier-reeks, 119, 120
Fourier-transformatie, 144
functie langs kromme, 12

G

gammafunctie van Euler, 27
gematigde distributies, 156, 157

gemiddelde van functie, 121
georiënteerde lijnintegraal, 41
gesloten differentiaalvorm, 47
gesloten keten van krommen, 43
gesloten kromme, 40
gesloten schijf, 76
Gibbs-verschijnsel, 136
Goursat, stelling van, 79
graad, 63
gradiënt van een functie, 3, 33

H

harmonische functie, 151
Hermite's inproduct, 137
Hilbert-ruimte, 146
Hölder-continu, 136
hoekfunctie, 51
hoektoename langs kromme, 39
homogene functie, 15
homotoop, homotopie 48
hoogstegraadscoëfficiënt 63
hoofdstelling van de analyse 46
hoofdstelling van de algebra 64

I

imaginair deel, 61
imaginaire $\sqrt{-1}$, 59
imaginaire as, 61
impulsoperator, 153
infinitesimaal, 36
infinitesimale hoektoename, 41
inproduct, 137
integraal, 36
integraalinproduct, 137
inverse-functiestelling, 114
isometrie, 145

J

Jacobi-matrix, 9

K

keten van krommen, 43
kettinregel voor afbeeldingen, 12
kinetische energie, 46
kritiek punt, 3
kromme, 12
kromme in U , 36

kwadraatintegraalnorm, 142
kwadratisch sommeerbaar, 145, 144
kwart slag, 61

L

lacunaire reeks, 120
Lagrange's restterm, 100
lichaam, 60
lichaamsuitbreiding, 61
lijnintegraal, 36
lijnintegraal over keten, 43
lijnstuk, 16, 49
limes superior, limsup, 103
limes inferior, limsup, 103
lineaire vorm, 37
logaritme (complexe), 68

M

machtreeks, 101
matrixnorm, 6
meetkundige reeks, 99
metriek, 139
metrische ruimte, 139
multipliciteit van nulpunt, 64

N

Newton, binomium van, 158
norm, 138
norm bij inproduct, 137
nulpunt, 63

O

oneigenlijke integralen, 27
open schijf, 101
orde van nulpunt, 109
orde van pool, 90
orientatie, 41

P

parameters in een integraal, 25
Parseval, identiteit van, 142
Parseval, voor Fourier-reeksen, 143
Parseval, integraalformule van, 155, 157
partieel differentieerbaar, 1
partiële afgeleide, 1
partiële sommatie, 117
periodiek met periode ω , 120

Poisson-integraal, 151
Poisson-kern, 123
Poisson's sommatieformule, 154
pool, 90
poolcoördinaten, 68
positie, 12
positie-operator, 153
potentiële energie, 46
puntsgewijze convergentie, 93, 97
Pythagoras, 138

R

rand, 106
rationale functie, 64
reëel analytische functie, 105
reeks, 97
reeksen van functies, 93
reële as, 61
regelmatige n -hoek, 67
residu, 90
residuformule, 90
richtingsafgeleide, 10
rotatie van een vectorveld, 33, 52

S

samenhangend, 44
samentrekbare kromme, 49
schakelgetal, 58
Schwartz-ruimte van testfuncties, 153, 156
sinushyperbolicus, 84, 84
snel afnemende functie, 153, 156
snelheidsvector, 12
som van de Fourier-reeks, 119
somregel voor differentiatie, 13
standaardkeuze voor de hoek, 51
stationair punt, 3
stervormige verzameling, 49
Stokes, stelling van 52

T

Taylor-formule, 100
Taylor-reeks, 100, 105
Taylor-veelterm, 100
tekenfunctie, 93
tijd, 12
totaal differentieerbaar, 7
totale afgeleide, 7

totale energie, 46

U

uitwendig product, 52
uniform absoluut convergent, 97
uniforme convergentie, 93
uniforme Cauchy-rij, 95

V

variatieprincipe, 3
vectorveld, 38
vectorproduct, 52
veeltermfunctie, 63
vermenigvuldigingsoperator, 60
volledig orthonormaal stelsel, 142

W

windingsgetal, 40
wenteltrap, 22

Z

zaagtandfunctie, 132
zadelpunt, 3