

Een Inleiding tot
HILBERTRUIMTEN
voor Fysici

(bij de cursus Wiskundige Technieken 3 (WISN203))

door

J. Stienstra

©Departement Wiskunde
Universiteit Utrecht

september 2013

Voorwoord.

Voor u ligt het dictaat bij de cursus WISKUNDIGE TECHNIEKEN 3 (WISN203), 2013.

Achtergrond. Invoering van het onderwijsmodel BaMa3.0 in het tweede jaar van de UU natuurkundestudie, per september 2013, maakte een grondige herbezinning op de rol van de wiskundecursussen binnen de natuurkundestudie noodzakelijk.

Resultaat van deze herbezinning was, dat delen van de vroegere cursussen *Fouriertheorie* (WISN201) en *Wiskundige Technieken 3* (WISN203) samen met een stuk *Lineaire Algebra* zijn samengevoegd tot een nieuwe cursus met de naam WISKUNDIGE TECHNIEKEN 3 (WISN203), die in deze vorm voor het eerst wordt gegeven in Periode 1 van 2013/2014.

Er zijn, echter, ook grote delen van de vroegere “Fouriertheorie” en “Wiskundige Technieken 3” uit het programma geschrapt, omdat ze voor de vervolgcursussen binnen de Natuurkundestudie minder relevant zijn dan wel minder prioriteit hebben.

Over dit dictaat. Veel *natuurwetten* beschrijven hoe bepaalde grootheden reageren op (kleine) veranderingen in andere grootheden en zijn daarom vaak geformuleerd in termen van *differentiaalvergelijkingen*. Om daaruit een globalere beschrijving te halen moeten de differentiaalvergelijkingen worden opgelost. De differentiaalvergelijkingen waar het in dit dictaat over gaat zijn

- Lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten, die klassieke mechanische en elektrische systemen beschrijven; zie Paragraaf 1.1.
- De warmtevergelijking, die de temperatuurontwikkeling in een staaf beschrijft; zie Hoofdstuk 3.
- De Schrödinger vergelijkingen uit de Quantum Mechanica; zie daarvoor de cursus Quantum Mechanica. De Hoofdstukken 4, 5 en 6 sluiten nauw daarbij aan.

Voor het oplossen van deze differentiaalvergelijkingen is het belangrijk dat er een structuur achter zit, die ook in de klassieke meetkunde (o.a. *Euclides*, *Pythagoras*, ruim tweeduizend jaar geleden dus) was onderkend. Een doel

van dit dictaat is deze structuur naar voren te halen. Daarvoor gebruiken we *lineaire ruimten met een inproduct* en *lineaire operatoren* daarop.

HILBERTRUIMTEN, genoemd naar de wiskundige David Hilbert, zijn dergelijke “lineaire ruimten met een inproduct”. Gewoonlijk veronderstelt men bij de term “Hilbertruimten” dat deze ruimten *oneindig dimensionaal* zijn. Wij bekijken in dit dictaat waar nodig ook eindig dimensionale lineaire ruimten met een inproduct. De oneindig-dimensionaliteit van Hilbertruimten maakt het noodzakelijk dat men daarbij ook veel aandacht besteedt aan *convergentie* wanneer men oneindig veel dingen bij elkaar moet optellen. Hoewel in dit dictaat de meest belangrijke – voor Quantum Mechanica en voor Fouriertheorie – lineaire ruimten met een inproduct oneindig dimensionaal zijn, kunnen we binnen de randvoorwaarden van deze cursus (m.b.t. tijd en prioriteit) slechts heel summier aandacht besteden aan convergentiekwesties.

Omdat HILBERTRUIMTEN een mooie korte naam is, die toch voor een belangrijk deel de lading van dit dictaat dekt, gebruiken we deze naam in de titel van dit dictaat, hoewel deze naam in de tekst verder niet meer wordt genoemd.

Inhoudsopgave

1	Lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten	1
1.1	Twee voorbeelden	1
1.1.1	Voorbeeld.	1
1.1.2	Voorbeeld.	2
1.2	Tweede orde homogene lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten	3
1.3	Homogene differentiaalvergelijkingen voor vectorwaardige functies	7
1.4	Inhomogene differentiaalvergelijkingen voor scalaire functies	8
1.5	Inhomogene differentiaalvergelijkingen voor vectorwaardige functies	14
2	Eigenwaarden en eigenvectoren van matrices	16
2.1	Definities van eigenwaarde en eigenvector	16
2.2	Voorbeelden van eigenwaarden en eigenvectoren	17
2.3	Definitie van diagonaliseerbaar	19
2.4	Voorbeelden van diagonaliseerbare matrices	19
2.5	Toepassing op differentiaalvergelijkingen	20
3	De warmtevergelijking op een interval	22
3.1	De warmtevergelijking en de oplosmethode	22
3.2	Opmerkelijke overeenkomsten	25
4	Lineaire ruimten met een inproduct	27
4.1	Meetkundige achtergrond van Inproduct	27
4.2	Definitie van lineaire ruimte	28
4.3	Voorbeelden van lineaire ruimten	29
4.4	Definitie van lineaire deelruimte	30
4.5	Voorbeelden van lineaire deelruimten	31
4.6	Definitie van inproduct op een lineaire ruimte	34
4.6.1	Lineaire ruimten over \mathbb{R}	34
4.6.2	Lineaire ruimten over \mathbb{C}	34
4.7	Voorbeelden van lineaire ruimten met inproduct	36

4.8	Projecties	38
4.9	Voorbeeld: orthogonale polynomen	43
5	Het spectrum van een lineaire operator op een lineaire ruimte	46
5.1	Definitie van een lineaire afbeelding/operator	46
5.2	Voorbeelden van lineaire afbeeldingen/operators	46
5.3	Definitie van spectrum van een lineaire operator	47
5.3.1	Definitie van eigenwaarde	47
5.3.2	Definitie van spectrum	48
5.4	Voorbeelden van eigenwaarden en spectrum	49
6	Symmetrische operatoren	54
6.1	Definitie van symmetrische, van orthogonale, van Hermitesee en van unitaire afbeeldingen	54
6.2	Voorbeelden van symmetrische, orthogonale, Hermitesee, unitaire operatoren	55
6.3	Voorbeeld: spectrum en eigenfuncties van D_{Leg}	56
7	Fouriertheorie van T-periodieke functies	59
7.1	Definitie van de ruimte $C_{T\text{-per}}^{sc}(\mathbb{C})$	59
7.2	Voorbeelden van elementen van $C_{T\text{-per}}^{sc}(\mathbb{C})$	59
7.3	Het inproduct op $C_{T\text{-per}}^{sc}(\mathbb{C})$	61
7.4	Fouriercoëfficiënten	62
7.4.1	Definitie van Fouriercoëfficiënten	62
7.4.2	Voorbeelden van Fouriercoëfficiënten	63
7.5	De Fourier inversie formule	65
7.6	Voorbeelden van Fourier inversie en Parseval	68
7.7	Fourierreeksen en differentiaalvergelijkingen	71
7.7.1	Lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten	71
7.7.2	De warmtevergelijking	72
8	De Fouriertransformatie	74
8.1	Intuïtieve inleiding.	74
8.2	Fouriertransformatie: definitie en eigenschappen	75
8.2.1	Definitie van stuksgewijs continue functie	75
8.2.2	Definitie van oneigenlijke integraal	75

8.2.3	Definitie van absoluut integreerbare functies.	77
8.2.4	Definitie van de Fouriertransformatie	77
8.2.5	Voorbeelden van Fouriergetransformeerden	78
8.2.6	De Fouriertransformatie als lineaire afbeelding	80
8.2.7	Fouriertransformatie en differentiatie	81
8.2.8	Een belangrijk voorbeeld	83
8.3	De Fourierinversie formule	84
8.4	Toepassing van Fouriertransformatie bij lineaire differentiaal- vergelijkingen	90
8.4.1	Oplossing m.b.v. Fourier inversie formule	90
8.4.2	Oplossing m.b.v. het convolutieproduct	92
8.4.3	De warmtevergelijking op \mathbb{R}	94
9	De Dirac deltafunctie	98
9.1	Inleiding tot de Dirac deltafunctie $\delta(x)$	98
9.2	Consequenties van $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0)$	100
9.3	Dirac's deltafunctie en differentiaalvergelijkingen	101
10	Appendix A: Complexe getallen en complexwaardige func- ties.	103
10.1	Complexe getallen	103
10.2	Functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$	109
11	Opgaven	113
11.0	Opgaven bij Appendix A	113
11.1	Opgaven bij Hoofdstuk 1	113
11.2	Opgaven bij Hoofdstuk 2	114
11.3	Opgaven bij Hoofdstuk 3	116
11.4	Opgaven bij Hoofdstuk 4	119
11.5	Opgaven bij Hoofdstukken 5 en 6	122
11.7	Opgaven bij Hoofdstuk 7	123
11.8	Opgaven bij Hoofdstuk 8	125
11.9	Opgaven bij Hoofdstuk 9	128

1 Lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten

1.1 Twee voorbeelden

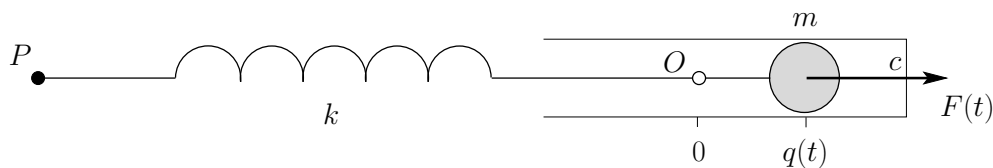
Sommige mechanische en elektrische systemen kunnen worden gemodelleerd met een differentiaalvergelijking

$$v''(t) + a_1v'(t) + a_0v(t) = u(t). \quad (1)$$

Daarbij is $v(t)$ een onbekende functie die de toestand van het systeem op tijd t bepaalt, is $u(t)$ een gegeven functie die de externe invloed op het systeem beschrijft en zijn a_0 en a_1 reële constanten die relevante eigenschappen van het systeem weergeven.

1.1.1 Voorbeeld.

Neem een voorwerp met massa m , bevestigd aan het uiteinde van een veer met veerconstante k . Het andere uiteinde van de veer is vast bevestigd in een punt P . Neem verder aan dat het voorwerp langs een rechte lijn kan bewegen en daarbij wrijving ondervindt door een demper met wrijvingscoëfficiënt c . Op het voorwerp oefenen we een tijdsafhankelijke kracht uit ter grootte $F(t)$. Zij tot slot $q(t)$ de afstand van het voorwerp tot het evenwichtspunt O .



Dan leidt de tweede wet van Newton

$$\text{massa} \times \text{versnelling} = \text{kracht}$$

tot de differentiaalvergelijking

$$mq''(t) = -kq(t) - cq'(t) + F(t)$$

oftewel

$$q''(t) + \frac{c}{m} q'(t) + \frac{k}{m} q(t) = \frac{F(t)}{m}.$$

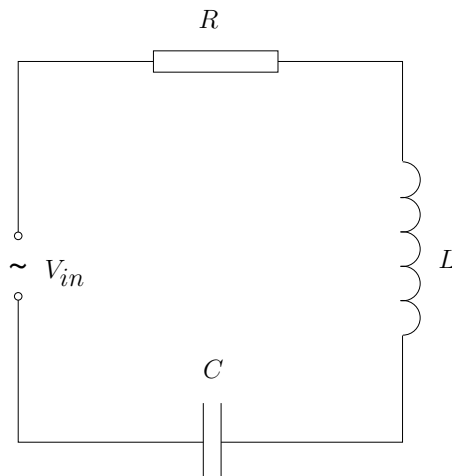
Dit is een differentiaalvergelijking van het type (1).

◇

1.1.2 Voorbeeld.

Electrische netwerken bestaan uit een aantal componenten die op verschillende manieren verbonden kunnen zijn. De twee hoofdwetten van Kirchhoff beschrijven hoe de stroom en spanning zich gedragen in een schakeling:

1. Op ieder punt is de inkomende stroom gelijk aan de uitgaande stroom.
2. Het spanningsverschil over iedere gesloten route door het netwerk is nul.



Neem de volgende componenten in een kring geschakeld:

- De spanningsbron (batterij), deze levert een *gegeven* tijdsafhankelijke spanning $V_{in}(t)$.
- De weerstand R is een component werkend volgens de wet van Ohm: $V_R = RI_R$. Hier is V_R de spanningsvermindering over R en I_R de stroom ter plekke van R .
- De spoel L legt de verhouding $V_L = LI'_L$ op.
- De condensator C induceert de afhankelijkheid $V'_C = \frac{1}{C}I_C$.

De eerste wet van Kirchhoff leert ons $I_V = I_R = I_C = I_L \equiv I$, waarin het \equiv -teken aangeeft dat we alle stromen met I zullen aanduiden. De tweede wet levert

$$V_{in} = V_R + V_C + V_L, \quad (2)$$

waarbij V_{in} tegengesteld teken heeft, de batterij levert immers voltage. Om nu de relaties tussen stroom en spanning per component te kunnen gebruiken differentiëren we (2) naar t . Dat geeft

$$V'_{in} = V'_L + V'_R + V'_C = LI'' + RI' + \frac{1}{C}I$$

en leidt tot de differentiaalvergelijking van het type (1)

$$I''(t) + \frac{R}{L} I'(t) + \frac{1}{LC} I(t) = \frac{V'_{in}(t)}{L}.$$

◇

In deze twee belangrijke voorbeelden van de differentiaalvergelijking (1) kunnen we u zien als het *ingangssignaal* en v als het *witgangssignaal*. Door de differentiaalvergelijking op te lossen zien we dan *hoe het witgangssignaal wordt bepaald door het ingangssignaal!*

1.2 Tweede orde homogene lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten

Een differentiaalvergelijking

$$f''(t) + a_1 f'(t) + a_0 f(t) = 0, \quad (3)$$

waarin $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de onbekende functie is en a_1 en a_0 reële getallen zijn, noemt men een *homogene lineaire differentiaalvergelijking van orde 2 met constante coëfficiënten*.

Een *oplossing van de differentiaalvergelijking* (3) is een functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die minstens tweemaal differentieerbaar is en die samen met zijn eerste en tweede afgeleide voldoet aan de relatie (3).

Wanneer f_1 en f_2 twee oplossingen van de differentiaalvergelijking (3) en c_1 en c_2 twee reële getallen zijn, dan is de functie f , die wordt gegeven door

$f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$, ook een oplossing van (3); immers:

$$\begin{aligned}
 & f''(t) + a_1 f'(t) + a_0 f(t) \\
 &= (c_1 f_1''(t) + c_2 f_2''(t)) + a_1 (c_1 f_1'(t) + c_2 f_2'(t)) + a_0 (c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) \\
 &= c_1 (f_1''(t) + a_1 f_1'(t) + a_0 f_1(t)) + c_2 (f_2''(t) + a_1 f_2'(t) + a_0 f_2(t)) \\
 &= c_1 0 + c_2 0 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Dit betekent dat *de oplossingen van de differentiaalvergelijking (3) een lineaire ruimte*¹ vormen. Men noemt dit de *oplossingsruimte* van de differentiaalvergelijking. De dimensie van de oplossingsruimte is 2.

Voorbeeld. Neem de differentiaalvergelijking $f''(t) + 6f'(t) + 5f(t) = 0$. Als $f(t) = e^{\lambda t}$ een oplossing is dan is $\lambda^2 e^{\lambda t} + 6\lambda e^{\lambda t} + 5e^{\lambda t} = (\lambda^2 + 6\lambda + 5)e^{\lambda t} = 0$. Die e -macht is ongelijk aan nul en dus moet $\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$ zijn. De oplossingen van deze vergelijking zijn $\lambda_1 = -1$ en $\lambda_2 = -5$. Controleer zelf dat de functies $f_1(t) = e^{-t}$ en $f_2(t) = e^{-5t}$ inderdaad oplossingen zijn.

Dus is ook iedere functie $f(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-5t}$, met reële coëfficiënten c_1, c_2 , een oplossing. Wanneer we voor de functie $f(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-5t}$ de functiewaarden $f(0)$ en $f'(0)$ bekijken, zien we dat $f(0) = c_1 + c_2$ en $f'(0) = -c_1 - 5c_2$ en dus $c_1 = \frac{1}{4}(5f(0) + f'(0))$ en $c_2 = -\frac{1}{4}(f(0) + f'(0))$; d.w.z. dat de coëfficiënten c_1 en c_2 door de functie $f(t)$ eenduidig worden vastgelegd. Sterker nog: c_1 en c_2 worden al eenduidig vastgelegd door de *beginwaarden* $f(0), f'(0)$.

Bekijk nu een functie $g(t)$, waarvan alleen is gegeven dat hij aan de differentiaalvergelijking voldoet, d.w.z. $g''(t) + 6g'(t) + 5g(t) = 0$. Bekijk vervolgens ook de functie $f(t) = d_1 e^{-t} + d_2 e^{-5t}$ waarbij de getallen d_1 en d_2 worden gegeven door

$$d_1 = \frac{1}{4}(5g(0) + g'(0)), \quad d_2 = -\frac{1}{4}(g(0) + g'(0)),$$

Dan is $f(0) = g(0)$ en $f'(0) = g'(0)$. We zullen zien dat dan $g(t) = f(t)$ geldt voor alle t . Daartoe nemen we de functie $h(t) = f'(t)g(t) - f(t)g'(t)$

¹voor de definitie en formele eigenschappen van lineaire ruimten zie paragraaf 4.2; een andere veel gebruikte naam voor lineaire ruimte is *vectorruimte*

en berekenen we de afgeleide $h'(t)$:

$$\begin{aligned}
 h'(t) &= f''(t)g(t) + f'(t)g'(t) - f'(t)g'(t) - f(t)g''(t) \\
 &= f''(t)g(t) - f(t)g''(t) \\
 &= (-6f'(t) - 5f(t))g(t) - f(t)(-6g'(t) - 5g(t)) \\
 &= -6f'(t)g(t) - 5f(t)g(t) + 6f(t)g'(t) + 5f(t)g(t) \\
 &= -6h(t).
 \end{aligned}$$

Hieruit volgt $h(t) = h(0)e^{-6t} = 0$. Vervolgens berekenen we

$$\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)' = \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{g(t)^2} = \frac{h(t)}{g(t)^2} = 0.$$

De functie $\frac{f(t)}{g(t)}$ is dus constant, gelijk aan $\frac{f(0)}{g(0)} = 1$. Zo zien we dat voor alle t geldt $g(t) = f(t)$.

CONCLUSIE: *Iedere oplossing van de differentiaalvergelijking*

$$f''(t) + 6f'(t) + 5f(t) = 0$$

is op precies één manier te schrijven als lineaire combinatie

$f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$ van de twee oplossingen $f_1(t) = e^{-t}$ en $f_2(t) = e^{-5t}$.

Men formuleert dit gewoonlijk abstracter als de functies $f_1(t)$ en $f_2(t)$ vormen een basis van de oplossingsruimte. \diamond

Dit geldt algemeen: Door in de differentiaalvergelijking (3) $f(t) = e^{\lambda t}$ te proberen vindt men dat deze functie een oplossing is precies dan als voldaan is aan de vergelijking $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$. De wortels (oplossingen) van deze vierkantsvergelijking zijn:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}.$$

Wanneer $a_1^2 - 4a_0 > 0$ is, dan leveren de overeenkomstige exponentiële functies een basis van de oplossingsruimte.

Wanneer $a_1^2 - 4a_0 < 0$ is, zijn λ_1 en λ_2 complexe getallen; preciezer:

$$\lambda_1 = \mu + i\nu, \quad \lambda_2 = \mu - i\nu \quad \text{met} \quad \mu = -\frac{1}{2}a_1, \quad \nu = \frac{1}{2}\sqrt{4a_0 - a_1^2}.$$

In dat geval worden alle *complexe* oplossingen nog steeds gegeven door $c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ met $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Daaruit kan men vervolgens eenvoudig afleiden dat de reële oplossingen precies de functies $k_1 e^{\mu t} \cos(\nu t) + k_2 e^{\mu t} \sin(\nu t)$ met $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ zijn.

Als $a_1^2 - 4a_0 = 0$ is, dan is $\lambda_1 = \lambda_2$. In dit geval kan men laten zien dat de twee functies $e^{\lambda_1 t}$ en $t e^{\lambda_1 t}$ een basis van de oplossingsruimte vormen.

Een en ander is samengevat in de onderstaande tabel.

λ_1 en λ_2	basis
$\lambda_1 \neq \lambda_2$, beide reëel	$f_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $f_2(t) = e^{\lambda_2 t}$
$\lambda_1 = \lambda_2$, reëel	$f_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $f_2(t) = t e^{\lambda_1 t}$
$\lambda_1 = \mu + i\nu$, $\lambda_2 = \mu - i\nu$ $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, $\nu \neq 0$	$f_1(t) = e^{\mu t} \cos \nu t$, $f_2(t) = e^{\mu t} \sin \nu t$

Tabel 1: Basisoplossingen van tweede orde lineaire homogene differentiaalvergelijkingen met constante reële coëfficiënten.

Voorbeeld. We zoeken de oplossing van $h''(y) + 2h'(y) + h(y) = 0$ die voldoet aan $h(1) = h(0) = 1$. De vergelijking $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ heeft een dubbele wortel -1 . Dus alle oplossingen hebben de vorm $h(y) = (c_1 + c_2 y) e^{-y}$. We vullen in $1 = h(1) = (c_1 + c_2) e^{-1}$ en $1 = h(0) = c_1 e^0$. Dus $c_1 = 1$ en $c_2 = e - 1$. De gevraagde oplossing is $h(y) = e^{-y} + (e - 1) y e^{-y}$. \diamond

Voorbeeld. De differentiaalvergelijking $\varphi''(t) = -\frac{g}{l} \varphi(t)$ leidt tot de vergelijking $\lambda^2 = -\frac{g}{l}$. Dus $\lambda_1 = i\sqrt{g/l}$ en $\lambda_2 = -i\sqrt{g/l}$. In de tabel hierboven is $\mu = 0$ en $\nu = \sqrt{g/l}$. Alle oplossingen worden gegeven door $\varphi(t) = c_1 \cos \nu t + c_2 \sin \nu t$ met $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Dat zijn periodieke bewegingen. De constanten c_1 en c_2 bepalen de amplitude en de fase. De periode $\frac{2\pi}{\nu} = 2\pi\sqrt{l/g}$ is onafhankelijk van de amplitude. \diamond

1.3 Homogene differentiaalvergelijkingen voor vectorwaardige functies

Neem nogmaals een oplossing $f(t)$ van differentiaalvergelijking (3). Dan is

$$\begin{pmatrix} f'(t) \\ f''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(t) \\ -a_0 f(t) - a_1 f'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{pmatrix}.$$

Oftewel

$$\frac{d}{dt} F(t) = A F(t) \quad (4)$$

waarbij $F(t)$ en A de volgende *vectorwaardige functie* en 2×2 -*matrix* zijn

$$F(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

We hebben gezien dat in geval $a_1^2 - 4a_0 \neq 0$ is, elke oplossing $f(t)$ van differentiaalvergelijking (3) te schrijven is als

$$f(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

waarbij c_1 en c_2 constanten zijn, en λ_1 en λ_2 de twee oplossingen zijn van de vergelijking $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$. Voor de bijbehorende vectorwaardige functie $F(t)$ betekent dit

$$F(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2$$

met

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Als $a_1^2 - 4a_0 > 0$ is, zijn λ_1 , λ_2 , c_1 , c_2 allemaal reële getallen. Als $a_1^2 - 4a_0 < 0$ is, zijn λ_1 , λ_2 , c_1 , c_2 allemaal complexe, niet reële getallen; in dat geval geldt bovendien $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ en $c_2 = \overline{c_1}$.

Merk nu op dat

$$A \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ -a_0 - a_1 \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1^2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \vec{v}_1.$$

Men omschrijft de hier gevonden relatie $A \vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1$ als: \vec{v}_1 is een *eigenvector* van de matrix A bij de *eigenwaarde* λ_1 . Net zo is \vec{v}_2 een *eigenvector* van A bij de *eigenwaarde* λ_2 . De algemene theorie van eigenwaarden en eigenvectoren van matrices wordt behandeld in Hoofdstuk 2. Wel is het nuttig

om hier nu al te wijzen op het feit dat de veelterm $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ waarvan λ_1 en λ_2 de nulpunten zijn, ook wordt verkregen als

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -a_0 & -\lambda - a_1 \end{pmatrix} = \det(A - \lambda I)$$

waarbij $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de zgn. 2×2 -eenheids matrix is. Dit laat zien dat λ_1 en λ_2 precies die waarden van λ zijn waarvoor de matrix $A - \lambda I$ niet inverteerbaar is.

1.4 Inhomogene differentiaalvergelijkingen voor scalaire functies

We gaan nu de differentiaalvergelijking (1) nader onderzoeken:

$$v''(t) + a_1v'(t) + a_0v(t) = u(t).$$

Hierin zijn a_0 en a_1 reële constanten en is $u(t)$ een gegeven functie. We zoeken daarbij dan functies $v(t)$ zodat voldaan is aan de vergelijking (1).

Als de gegeven functie $u(t)$ niet constant 0 is, zegt men dat (1) een *inhomogene differentiaalvergelijking* is.

De volgende stelling geeft een belangrijk resultaat over de structuur van de oplossingsverzameling van een inhomogene differentiaalvergelijking:

Stelling 1.1 Zij $v_0(t)$ een oplossing van de differentiaalvergelijking (1):

$$v_0''(t) + a_1v_0'(t) + a_0v_0(t) = u(t).$$

Dan geldt:

Een functie $v(t)$ is een oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking (1) precies dan als de functie $f(t) = v(t) - v_0(t)$ een oplossing is van de bijbehorende homogene differentiaalvergelijking (3):

$$f''(x) + a_1f'(x) + a_0f(x) = 0.$$

Bewijs: Uitgaande van $f(t) = v(t) - v_0(t)$ berekenen we:

$$\begin{aligned} f''(x) + a_1f'(x) + a_0f(x) &= \\ v''(t) - v_0''(t) + a_1v'(t) - a_1v_0'(t) + a_0v(t) - a_0v_0(t) &= \\ v''(t) + a_1v'(t) + a_0v(t) - (v_0''(t) + a_1v_0'(t) + a_0v_0(t)) &= \\ v''(t) + a_1v'(t) + a_0v(t) - u(t) & \end{aligned}$$

Dit laat zien dat $f''(x) + a_1f'(x) + a_0f(x) = 0$ is precies dan als $v''(t) + a_1v'(t) + a_0v(t) = u(t)$ is. ■

Deze stelling splitst het probleem om de inhomogene differentiaalvergelijking (1) op te lossen in twee delen:

- Zoek één oplossing $v_0(t)$ van (1).
- Bereken de algemene oplossing van (3).

Met de algemene theorie in Paragraaf 1.2 is het tweede probleem een peuleschil. Het eerste probleem - om überhaupt een oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking te vinden - is i.h.a. erg lastig. Gelukkig is er in het speciale geval waarin de functie $u(t)$ een e-macht is, wel één gemakkelijk te vinden oplossing:

Stelling 1.2 *Zij α een reëel of complex getal zodat $\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 \neq 0$ is. Dan voldoet de functie*

$$v_0(t) = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2 + a_1\alpha + a_0}$$

aan de inhomogene differentiaalvergelijking

$$v_0''(t) + a_1v_0'(t) + a_0v_0(t) = e^{\alpha t}. \quad (5)$$

Bewijs: Reken het linkerlid van (5) uit en constateer dat dit gelijk is aan het rechterlid. ■

We kunnen het arsenaal van inhomogene differentiaalvergelijkingen met gemakkelijk te vinden oplossingen eenvoudig uitbreiden door gebruik te maken van de volgende stelling:

Stelling 1.3 *Veronderstel dat de functie $v_1(t)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking*

$$v_1''(t) + a_1v_1'(t) + a_0v_1(t) = u_1(t)$$

en dat de functie $v_2(t)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$v_2''(t) + a_1v_2'(t) + a_0v_2(t) = u_2(t),$$

waarbij beide differentiaalvergelijkingen dezelfde (reële) coëfficiënten a_0 en a_1 hebben. Laat c_1 en c_2 twee (mogelijk complexe) getallen zijn. Definieer daarbij de functies $u(t)$ en $v(t)$ door:

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t), \quad v(t) = c_1 v_1(t) + c_2 v_2(t).$$

Dan voldoet de functie $v(t)$ aan de differentiaalvergelijking

$$v''(t) + a_1 v'(t) + a_0 v(t) = u(t).$$

Bewijs: Reken het linkerlid uit en constateer dat dit gelijk is aan $u(t)$. ■

Het in de voorgaande stelling beschreven resultaat noemt men *het superpositie principe*: we krijgen een oplossing van de laatste differentiaalvergelijking door eenvoudigweg de oplossingen van de eerdere vergelijkingen op elkaar te stapelen (superponeren).

Voorbeeld. Bekijk de differentiaalvergelijking

$$v''(t) + 2v(t) = \cos(3t). \quad (6)$$

Omdat $\cos(3t) = \frac{1}{2}(e^{3it} + e^{-3it})$ kunnen we een oplossing van deze differentiaalvergelijking vinden door superpositie van oplossingen van de twee differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{aligned} v_1''(t) + 2v_1(t) &= e^{3it} \\ v_2''(t) + 2v_2(t) &= e^{-3it} \end{aligned}$$

Stelling 1.2 levert oplossingen hiervoor de oplossingen:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= \frac{1}{(3i)^2 + 2} e^{3it} = -\frac{1}{7} e^{3it} \\ v_2(t) &= \frac{1}{(-3i)^2 + 2} e^{-3it} = -\frac{1}{7} e^{-3it} \end{aligned}$$

Samen met Stelling 1.3 geeft dit voor (6) de oplossing:

$$v(t) = -\frac{1}{7} \cos(3t).$$

◇

Voorbeeld. Bekijk de differentiaalvergelijking

$$v''(t) + v'(t) + v(t) = \cos t + \cos(2t). \quad (7)$$

Een speciale oplossing: Tewerkgaande als in het vorige voorbeeld vinden we nu de oplossing

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{e^{it}}{i^2 + i + 1} + \frac{e^{-it}}{(-i)^2 - i + 1} + \frac{e^{2it}}{(2i)^2 + 2i + 1} + \frac{e^{-2it}}{(-2i)^2 - 2i + 1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{it}}{i} + \frac{e^{-it}}{-i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2it}}{-3 + 2i} + \frac{e^{-2it}}{-3 - 2i} \right) \\ &= \frac{1}{2} (e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{it} + e^{i\frac{\pi}{2}} e^{-it}) + \frac{1}{2\sqrt{13}} (e^{i\phi} e^{2it} + e^{-i\phi} e^{-2it}) \\ &= \cos(t - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{\sqrt{13}} \cos(2t + \phi), \end{aligned}$$

waarbij ϕ wordt gegeven door

$$\frac{1}{-3 + 2i} = \frac{1}{\sqrt{13}} e^{i\phi} \quad (\text{en bijgevolg } \frac{1}{-3 - 2i} = \frac{1}{\sqrt{13}} e^{-i\phi}).$$

De algemene oplossing: Om de algemene oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking (7) te vinden moeten we bij de zojuist gevonden speciale oplossing nog een (algemene) oplossing van de bijbehorende homogene vergelijking optellen. De algemene oplossing van de homogene differentiaalvergelijking

$$f''(t) + f'(t) + f(t) = 0$$

is $c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ met c_1, c_2 (mogelijk complexe) constanten en λ_1, λ_2 de twee oplossingen van de vergelijking $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$; dus $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i$. De algemene reële oplossing van de homogene differentiaalvergelijking is derhalve

$$e^{-\frac{1}{2}t} (k_1 \cos(\frac{1}{2}\sqrt{3}t) + k_2 \sin(\frac{1}{2}\sqrt{3}t)) \quad \text{met } k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Zo vinden we dat de algemene oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking (7) is:

$$\cos(t - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{\sqrt{13}} \cos(2t + \phi) + e^{-\frac{1}{2}t} (k_1 \cos(\frac{1}{2}\sqrt{3}t) + k_2 \sin(\frac{1}{2}\sqrt{3}t)).$$

Vanwege de exponentieel dalende factor $e^{-\frac{1}{2}t}$ wordt de oplossing van de homogene differentiaalvergelijking op den duur verwaarloosbaar klein t.o.v. de speciale oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking. Daarom is iedere oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking op den duur vrijwel gelijk aan die speciale oplossing. \diamond

Dit roept de vraag op: *Wat is de oorzaak van het uitdempen van de oplossingen van de homogene differentiaalvergelijking?*

We weten dat, als $a_1^2 - 4a_0 \neq 0$ is, een basis van de oplossingsruimte van de homogene differentiaalvergelijking

$$f''(t) + a_1 f'(t) + a_0 f(t) = 0$$

wordt gegeven door de twee exponentiële functies $e^{\lambda_1 t}$ en $e^{\lambda_2 t}$ met

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0})$$

Als $a_1^2 - 4a_0 > 0$ is, zijn λ_1 en λ_2 reële getallen. Als bovendien $a_1 > 0$ en $a_0 > 0$, dan zijn λ_1 en λ_2 negatieve reële getallen en zijn de twee basisoplossingen $e^{\lambda_1 t}$ en $e^{\lambda_2 t}$ exponentieel dalende functies. Wanneer daarentegen $a_1 < 0$ of $a_0 < 0$ is, dan is minstens een van de basisoplossingen exponentieel stijgend en dempt dus niet uit.

Als $a_1^2 - 4a_0 < 0$ is, zijn λ_1 en λ_2 complexe getallen: $\lambda_1 = \mu + \nu i$ en $\lambda_2 = \mu - \nu i$ met $\mu = -\frac{1}{2}a_1$ en $\nu = \frac{1}{2}\sqrt{4a_0 - a_1^2}$. Een basis van de oplossingsruimte wordt gegeven door de functies $e^{\mu t} \cos(\nu t)$ en $e^{\mu t} \sin(\nu t)$. Als $a_1 > 0$ is, daalt de functie $e^{\mu t}$ exponentieel naar 0, en dus gaan ook de genoemde basisoplossingen (golvend) naar 0. Wanneer daarentegen $a_1 < 0$ is, dan is $e^{\mu t}$ exponentieel stijgend en dempen de basisoplossingen dus niet uit.

We weten ook dat, als $a_1^2 - 4a_0 = 0$ is, een basis van de oplossingsruimte van de bovenstaande homogene differentiaalvergelijking wordt gegeven door de twee functies $e^{\lambda t}$ en $te^{\lambda t}$ met $\lambda = -\frac{1}{2}a_1$. Als $a_1 > 0$ is, gaan beide basisfuncties op den duur naar 0. Wanneer daarentegen $a_1 < 0$ is, zijn de basisoplossingen exponentieel stijgend en dempen dus niet uit.

Hoewel we in deze analyse drie gevallen hebben onderscheiden, blijkt er als je goed kijkt toch een uniform antwoord uit te komen:

De oplossingen van de homogene differentiaalvergelijking

$$f''(t) + a_1 f'(t) + a_0 f(t) = 0$$

dempen op den duur allemaal uit precies dan als a_0 en a_1 beide positief zijn.

We vatten het voorgaande samen:

Als de coëfficiënten a_0 , a_1 van de inhomogene differentiaalvergelijking

$$v''(t) + a_1v'(t) + a_0v(t) = u(t) \quad (1)$$

positieve reële getallen zijn, zijn alle oplossingen op den duur vrijwel gelijk.

Om één speciale oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking (1) te vinden is het bijzonder nuttig het ingangssignaal $u(t)$ uit te splitsen naar componenten $e^{i\omega t}$ met verschillende frequenties. Elk van deze componenten komt terug in het uitgangssignaal $v(t)$, maar met een *faseverschuiving* en een herschaalde *amplitude*, die afhankelijk zijn van de ω van die component.

De schalingsfactor voor de component $e^{i\omega t}$ (met frequentie $|\omega|/2\pi$) is $|a_0 - \omega^2 + ia_1\omega|^{-1} = 1/\sqrt{(a_0 - \omega^2)^2 + a_1^2\omega^2}$. Deze frequentie afhankelijke herschaling van de amplitude betekent dat sommige componenten van het ingangssignaal bij passage door het systeem versterkt worden, terwijl andere componenten juist verzwakt worden.

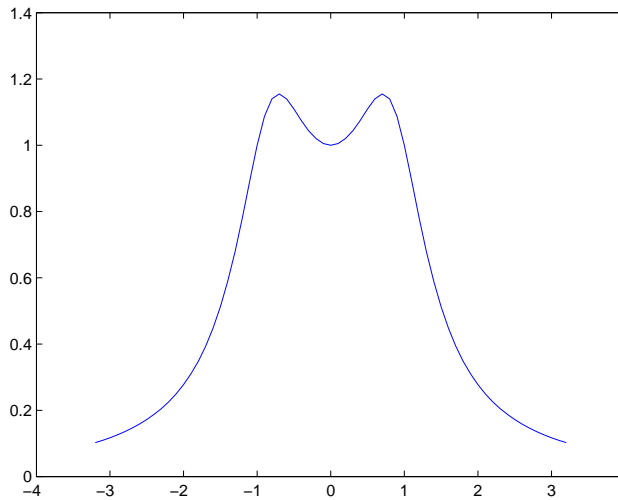
In mechanische systemen (zoals het eerste voorbeeld in paragraaf 1.1) zijn de coëfficiënten a_0 en a_1 positief omdat de richtingen van de wrijvingskracht en de veerkracht tegengesteld zijn aan, respectievelijk, de snelheid en de uitwijking. Wrijving is essentieel voor het uitdempen van de oplossingen van de homogene differentiaalvergelijking. Herschaling van de amplitude betekent fysisch dat het systeem in bepaalde frequenties *resonantie* vertoont.

Electrische systemen (zoals het tweede voorbeeld in paragraaf 1.1) werken door de herschaling van de amplitude als *filters* die slechts bepaalde frequenties doorlaten. De aanwezigheid van de weerstand R is essentieel voor het uitdempen van de oplossingen van de homogene differentiaalvergelijking.

Voorbeeld. Bekijk een systeem dat wordt beschreven door de inhomogene differentiaalvergelijking

$$v''(t) + v'(t) + v(t) = u(t).$$

De amplitude van de component met frequentie $|\omega|/2\pi$ in hetingangssignaal wordt door het systeem vermenigvuldigd met $\frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2+\omega^2}}$. Figuur 1 geeft de grafiek van de functie $\frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2+\omega^2}}$. We zien dat componenten met $|\omega| \leq 1$ iets worden versterkt, met een maximale versterkingsfactor $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ bij $|\omega| = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Daarentegen worden componenten met $|\omega| > 1$ afgezwakt en al gauw bijna volledig onderdrukt.



Figuur 1: *Grafiek van $1/\sqrt{(1-\omega^2)^2 + \omega^2}$.*

1.5 Inhomogene differentiaalvergelijkingen voor vectorwaardige functies

Laten we nu ook de differentiaalvergelijking (1),

$$v''(t) + a_1 v'(t) + a_0 v(t) = u(t),$$

eens omzetten in een eerste orde differentiaalvergelijking voor een vectorwaardige functie. Daartoe schrijven we

$$F(t) = \begin{pmatrix} v(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}, \quad G(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ u(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Dan is

$$\frac{d}{dt}F(t) - AF(t) = \begin{pmatrix} v'(t) - v'(t) \\ v''(t) + a_1v'(t) + a_0v(t) \end{pmatrix} = G(t).$$

We zien dat de differentiaalvergelijking (1) equivalent is met

$$\frac{d}{dt}F(t) - AF(t) = G(t). \quad (8)$$

Neem, als in Paragraaf 1.3, aan dat $a_1^2 - 4a_0 \neq 0$ is en laat λ_1 en λ_2 de eigenwaarden van A zijn en \vec{v}_1 en \vec{v}_2 de bijbehorende eigenvectoren. Dan kan men gemakkelijk nagaan dat

$$G(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} u(t) (\vec{v}_1 - \vec{v}_2).$$

Merk nu op dat voor elk complex getal α geldt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{\alpha t} \vec{v}_1) - A(e^{\alpha t} \vec{v}_1) &= \left(\frac{d}{dt}e^{\alpha t}\right)\vec{v}_1 - e^{\alpha t}A\vec{v}_1 \\ &= \alpha e^{\alpha t} \vec{v}_1 - \lambda_1 e^{\alpha t} \vec{v}_1 = (\alpha - \lambda_1)e^{\alpha t} \vec{v}_1 \end{aligned}$$

Dit laat zien dat, als $\alpha \neq \lambda_1$ is, de vectorwaardige functie $V(t) = \frac{1}{\alpha - \lambda_1} e^{\alpha t} \vec{v}_1$ voldoet aan

$$\frac{d}{dt}V(t) - AV(t) = e^{\alpha t} \vec{v}_1.$$

Natuurlijk geldt er net zo'n resultaat voor de eigenwaarde λ_2 en de bijbehorende eigenvector \vec{v}_2 .

Hieruit volgt dat als $u(t) = e^{\alpha t}$ met $\alpha \neq \lambda_1$ en $\alpha \neq \lambda_2$, dan is de vectorwaardige functie

$$F(t) = \frac{1}{(\alpha - \lambda_1)(\lambda_1 - \lambda_2)} e^{\alpha t} \vec{v}_1 - \frac{1}{(\alpha - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)} e^{\alpha t} \vec{v}_2$$

een speciale oplossing van (8). Ga na dat dit eigenlijk gewoon hetzelfde resultaat is als in Stelling 1.2.

2 Eigenwaarden en eigenvectoren van matrices

2.1 Definities van eigenwaarde en eigenvector

In deze paragraaf is n een positief geheel getal en is A een $n \times n$ -matrix van complexe getallen.

Men zegt dat een complex getal λ een *eigenwaarde van A* is als er een vector $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ is zodat

$$\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \quad \text{en} \quad A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \quad (9)$$

De vector \mathbf{v} noemt men dan een *eigenvector van A bij de eigenwaarde λ* . Merk op: *als \mathbf{v} een eigenvector is bij de eigenwaarde λ , dan is voor elk complex getal $z \neq 0$ de vector $z\mathbf{v}$ ook een eigenvector bij de dezelfde eigenwaarde.*

De vergelijking $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ is ook te schrijven als

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (10)$$

waarbij I de $n \times n$ -eenheidsmatrix is (d.w.z. I heeft n 1'en op de diagonaal en buiten de diagonaal alleen maar 0'en). Als λ een eigenwaarde is van de matrix A noemt men de verzameling van oplossingen \mathbf{v} van de vergelijking (10), inclusief de oplossing $\mathbf{0}$, de *eigenruimte van A bij de eigenwaarde λ* . De eigenvectoren zijn dus de vectoren $\neq \mathbf{0}$ in de eigenruimte.

Men kan de vergelijking (10) zien als een stelsel van n homogene lineaire vergelijkingen in n onbekenden (nl. de componenten van \mathbf{v}). Dit stelsel heeft een oplossing $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ precies dan als de matrix $A - \lambda I$ *niet inverteerbaar* is; en dat op zijn beurt geldt precies dan als de determinant van die matrix 0 is. Zo zien we

$$\lambda \text{ is een eigenwaarde van } A \quad \Leftrightarrow \quad \det(A - \lambda I) = 0 \quad (11)$$

Men noemt $\det(A - \lambda I)$ het *karakteristieke polynoom* van A , en de vergelijking $\det(A - \lambda I) = 0$ de *karakteristieke vergelijking*.

Dit leidt ertoe dat men in de praktijk vaak eerst de eigenwaarden bepaalt door de vergelijking in (11) op te lossen, en dan vervolgens per eigenwaarde de eigenvectoren bepaalt door het stelsel lineaire vergelijking (10) op te lossen.

2.2 Voorbeelden van eigenwaarden en eigenvectoren

1. Neem de 2×2 -matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Dan is

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (1 - \lambda)(3 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 4\lambda - 1. \end{aligned}$$

Het karakteristieke polynoom is dus $\lambda^2 - 4\lambda - 1$. De oplossingen van de karakteristieke vergelijking $\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0$ zijn $\frac{1}{2}(4 \pm \sqrt{4^2 + 4})$. De eigenwaarden zijn $\lambda_1 = 2 + \sqrt{5}$ en $\lambda_2 = 2 - \sqrt{5}$.

De eigenvectoren bij de eigenwaarde λ_1 vindt men door op te lossen

$$\begin{pmatrix} -1 - \sqrt{5} & 2 \\ 2 & 1 - \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d.w.z.

$$\begin{aligned} (-1 - \sqrt{5})v_1 + 2v_2 &= 0 \\ 2v_1 + (1 - \sqrt{5})v_2 &= 0 \end{aligned}$$

Dus

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \end{pmatrix},$$

met c een willekeurige complexe constante $\neq 0$; d.w.z. elke waarde van c geeft één eigenvector bij de eigenwaarde λ_1 .

Op dezelfde manier vindt men voor de eigenvectoren bij de eigenwaarde λ_2

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \end{pmatrix}, \quad \text{met } c \in \mathbb{C}, c \neq 0.$$

Tot slot kan men nog opmerken dat voor $\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2$ de matrix $A - \lambda I$ wel inverteerbaar is:

$$(A - \lambda I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 3 - \lambda \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\lambda^2 - 4\lambda - 1} \begin{pmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ -2 & 1 - \lambda \end{pmatrix}.$$

2. Het karakteristieke polynoom van de matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ is $\lambda^2 - 4\lambda + 7$. De eigenwaarden zijn $\lambda_1 = 2 + i\sqrt{3}$ en $\lambda_2 = 2 - i\sqrt{3}$. De eigenvectoren bij de eigenwaarde λ_1 resp. λ_2 zijn $c \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) \end{pmatrix}$ resp. $c \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) \end{pmatrix}$ met c een complex getal $\neq 0$.

Opmerking. Zoals dit voorbeeld laat zien hoeven de eigenwaarden van een matrix met reële componenten niet noodzakelijkerwijs reële getallen te zijn. *Voor een algemeen bruikbare theorie van eigenwaarden en eigenvectoren is het noodzakelijk dat men complexe getallen toelaat en gebruikt!*

3. Voor de 3×3 -matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ is het karakteristieke polynoom

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 & 3 \\ 2 & 3 - \lambda & 1 \\ 3 & 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (1 - \lambda)(3 - \lambda)(2 - \lambda) + 6 + 6 - 9(3 - \lambda) - 4(2 - \lambda) - (1 - \lambda) \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 3\lambda - 18. \end{aligned}$$

Het is in het algemeen vrij moeilijk om zonder een computer de nulpunten van een derdegraads polynoom te berekenen. In dit geval hebben we echter geluk: als je goed naar de matrix A kijkt zie je dat in elke rij de som van de getallen 6 is. Dat betekent dat de vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ een eigenvector is bij de eigenwaarde 6. Dus is 6 een nulpunt van het karakteristieke polynoom. Als je dit eenmaal weet, kun je gemakkelijk verder rekenen:

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 + 3\lambda - 18 = -(\lambda - 6)(\lambda^2 - 3) = -(\lambda - 6)(\lambda - \sqrt{3})(\lambda + \sqrt{3})$$

De eigenwaarden zijn dus $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = \sqrt{3}$, $\lambda_3 = -\sqrt{3}$. De eigenvector(en) bij de eigenwaarde λ_1 kennen we al. Het berekenen van de eigenvectoren bij de eigenwaarden λ_2 en λ_3 wordt als een instructieve opgave overgelaten aan de lezer. \diamond

2.3 Definitie van diagonaliseerbaar

In deze paragraaf is n een positief geheel getal en is A een $n \times n$ -matrix van complexe getallen.

Men zegt dat de matrix A *diagonaliseerbaar* is als er zijn een *inverteerbare* $n \times n$ -matrix S en een *diagonaalmatrix* D zodat

$$A = SDS^{-1}. \quad (12)$$

Met

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} s_{11} & \dots & \dots & s_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ s_{n1} & \dots & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}$$

komt vergelijking (12) – of beter gezegd de daarmee equivalente vergelijking $AS = SD$ – neer op

$$A \begin{pmatrix} s_{1j} \\ \vdots \\ s_{nj} \end{pmatrix} = \lambda_j \begin{pmatrix} s_{1j} \\ \vdots \\ s_{nj} \end{pmatrix} \quad \text{voor } j = 1, \dots, n. \quad (13)$$

Dit betekent dat $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de eigenwaarden van A zijn en dat de j -de kolom van de matrix S een eigenvector bij de eigenwaarde λ_j is.

Opmerking. *Diagonaliseerbaarheid is een serieuze voorwaarde voor A ; niet iedere $n \times n$ -matrix is diagonaliseerbaar*

2.4 Voorbeelden van diagonaliseerbare matrices

1. Het karakteristieke polynoom van de 2×2 -matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ is $(1 - \lambda)^2$. Dit betekent dat 1 de enige eigenwaarde is, maar die heeft dan wel *multipliciteit* 2. De eigenvectoren worden berekend met

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De eigenvectoren zijn dus $\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ met c een complex getal $\neq 0$. Dit kunnen nooit de kolommen zijn van een *inverteerbare* 2×2 -matrix S !

Dus is deze matrix A *niet-diagonaliseerbaar*.

2. In voorbeeld 1 in paragraaf 2.2 hebben we de eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ berekend. Het resultaat van die berekening kan men ook schrijven als

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) & \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) & \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2 - \sqrt{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

oftewel $A = SDS^{-1}$ met

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) & \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2 - \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Dus is de matrix A in dit voorbeeld diagonaliseerbaar.

3. In voorbeeld 2 in paragraaf 2.2 hebben we de eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ berekend. Het resultaat van die berekening kunnen we ook schrijven als $A = SDS^{-1}$ met

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) & \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 + i\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 - i\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Dus is de matrix A in dit voorbeeld diagonaliseerbaar. \diamond

2.5 Toepassing op differentiaalvergelijkingen

In deze paragraaf onderzoeken we, analoog aan (4), de differentiaalvergelijking

$$\frac{d}{dt}F(t) = AF(t) \tag{14}$$

met A een *diagonaliseerbare* $n \times n$ -matrix, mogelijk met componenten in \mathbb{C} , en $F(t)$ een vectorwaardige functie met n , mogelijk complexwaardige, componenten.

Omdat A diagonaliseerbaar is, zijn er een inverteerbare $n \times n$ -matrix S en een diagonaalmatrix D zo dat

$$A = S D S^{-1}.$$

Wanneer we nu beide leden van Vergelijking (14) van links vermenigvuldigen met de matrix S^{-1} en gebruiken dat de componenten van de matrix S^{-1} constant zijn (d.w.z. niet afhangen van t), dan vinden we

$$\frac{d}{dt}G(t) = D G(t) \quad \text{met} \quad G(t) = S^{-1}F(t). \quad (15)$$

D is een diagonaalmatrix en $G(t)$ is een vectorwaardige functie met n componenten, zeg

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad G(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}.$$

Differentiaalvergelijking (15) blijkt gewoon neer te komen op

$$\frac{d}{dt}g_j(t) = \lambda_j g_j(t) \quad \text{voor} \quad j = 1, \dots, n,$$

en is dus eenvoudig op te lossen:

$$g_j(t) = g_j(0)e^{\lambda_j t} \quad \text{voor} \quad j = 1, \dots, n.$$

Schrijf nu $\mathbf{v}^{(j)}$ voor de j -de kolom van de matrix S . Dan is $\mathbf{v}^{(j)}$ een eigenvector van A bij de eigenwaarde λ_j . Verder is $F(t) = S G(t)$ en dus

$$F(t) = g_1(0)e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}^{(1)} + g_2(0)e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}^{(2)} + \dots + g_n(0)e^{\lambda_n t}\mathbf{v}^{(n)}. \quad (16)$$

Hiermee is de differentiaalvergelijking (14) dus opgelost. Bovendien zien we

$$F(0) = g_1(0)\mathbf{v}^{(1)} + g_2(0)\mathbf{v}^{(2)} + \dots + g_n(0)\mathbf{v}^{(n)};$$

d.w.z.: de constanten $g_1(0), \dots, g_n(0)$ zijn de coëfficiënten wanneer de vector $F(0)$ geschreven wordt als een lineaire combinatie van de eigenvectoren $\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(n)}$ van A . Om deze constanten te berekenen moeten we een stelsel van n lineaire vergelijkingen in n onbekenden oplossen.

Dit is onmiskenbaar een goede generalisatie van het werk in Paragraaf 1.3.

3 De warmtevergelijking op een interval

3.1 De warmtevergelijking en de oplosmethode

Een *partiële differentiaalvergelijking* voor een functie $u(x, t)$ van 2 variabelen, x en t , is een relatie tussen de functie en z'n partiële afgeleiden. In deze paragraaf bekijken we de partiële differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (17)$$

waarin a een positief reëel getal is. Vaak schrijft men deze vergelijking als

$$u_t = au_{xx},$$

waarbij het subscript aangeeft naar welke variabele en hoe vaak men differentieert.

Vergelijking (17) wordt de *warmtevergelijking* genoemd omdat hij de temperatuurontwikkeling in een 1-dimensionale staaf beschrijft. Daarbij is dan x de plaatscoördinaat, t is de tijdcoördinaat, a is een materiaalconstante en $u(x, t)$ is de temperatuur op plaats x en tijdstip t . We zijn geïnteresseerd in een staaf met lengte L en nemen daarom $0 \leq x \leq L$. Ook nemen we $t \geq 0$.

We zijn alleen geïnteresseerd oplossingen die aan de zgn. *randvoorwaarden* en *beginvoorwaarden* voldoen. De randvoorwaarden hebben betrekking op $u(0, t)$ en $u(L, t)$ voor alle $t \geq 0$. De beginvoorwaarden hebben betrekking op $u(x, 0)$ voor alle x in het interval $[0, L]$. In deze paragraaf bestuderen we de warmtevergelijking (17) met de rand- en beginvoorwaarden

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \text{voor alle } t \geq 0, \quad (18)$$

$$u(x, 0) = g(x) \quad \text{voor alle } 0 \leq x \leq L. \quad (19)$$

Hierin is $g(x)$ een gegeven functie die de initiële temperatuurverdeling aangeeft. We nemen aan dat $g(x)$ een “voldoende nette functie” is.

Eerst onderzoeken we of er oplossingen zijn van (17) van de vorm

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (20)$$

d.w.z. oplossingen waarbij u het product is van een functie van x alleen en een functie van t alleen. Men noemt deze werkwijze wel de *methode van scheiding van variabelen*.

Omdat, met de notaties $\dot{T} := \frac{d}{dt}T$ en $X'' := \frac{d^2}{dx^2}X$,

$$\frac{\partial}{\partial t}(X(x)T(t)) = X(x)\dot{T}(t), \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}(X(x)T(t)) = X''(x)T(t),$$

wordt de warmtevergelijking in dit geval

$$X(x)\dot{T}(t) = aX''(x)T(t), \quad \text{oftewel} \quad \frac{\dot{T}(t)}{aT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Het rechterlid van deze laatste vergelijking hangt alleen af van x maar niet van t , terwijl het linkerlid alleen afhangt van t en niet van x . Dit kan slechts als beide leden constant zijn, d.w.z. als voor een zekere (reële) constante λ

$$\dot{T}(t) = \lambda aT(t), \quad (21)$$

$$X''(x) = \lambda X(x). \quad (22)$$

Hiermee is het probleem teruggebracht tot twee differentiaalvergelijkingen van elk één variabele, die aan elkaar gekoppeld zijn door de constante λ .

Zoals bekend worden de oplossingen van (21) voor elke λ gegeven door

$$T(t) = c_1 e^{a\lambda t}$$

met een constante $c_1 \in \mathbb{R}$, en worden de oplossingen van (22) voor $\lambda \neq 0$ gegeven door

$$X(x) = c_2 e^{x\sqrt{\lambda}} + c_3 e^{-x\sqrt{\lambda}} \quad (23)$$

voor zekere constanten c_2 en c_3 . Als $\lambda < 0$ is, is $\sqrt{\lambda}$ een complex getal en zijn ook c_2 en c_3 complex. Als $\lambda = 0$ worden de oplossingen van (22) gegeven door

$$X(x) = c_2 + c_3 x \quad (24)$$

met $c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Zo krijgen we talrijke oplossingen (afhankelijk van de keuze van λ en van de constanten c_1, c_2, c_3) voor de differentiaalvergelijking (17). *Welke van deze oplossingen voldoen aan de randvoorwaarde (18)?*

Dan moet dus

$$X(0)T(t) = X(L)T(t) = 0 \quad \text{voor alle } t \geq 0.$$

Dit betekent dat óf $T(t) = 0$ voor alle $t \geq 0$ óf $X(0) = X(L) = 0$.

Het geval $T(t) = 0$ voor alle $t \geq 0$ leidt tot de *triviale oplossing*, waarbij $u(x, t) = 0$ voor alle x, t . Daarom richten we onze aandacht op de andere mogelijkheid: $X(0) = X(L) = 0$.

Als $\lambda = 0$ leert (24) dat $c_2 = X(0) = 0$ en $c_2 + c_3L = X(L) = 0$. Dus $c_2 = c_3 = 0$ en $X(x) = 0$ voor alle x . Dit leidt weer tot de triviale oplossing.

Als $\lambda \neq 0$ leert (23) dat $c_2 + c_3 = X(0) = 0$ en $c_2e^{L\sqrt{\lambda}} + c_3e^{-L\sqrt{\lambda}} = X(L) = 0$. Dus $c_3 = -c_2$ en

$$c_2(e^{L\sqrt{\lambda}} - e^{-L\sqrt{\lambda}}) = 0.$$

Uit deze laatste gelijkheid volgt óf $c_2 = 0$ (hetgeen weer leidt tot de triviale oplossing) óf

$$e^{L\sqrt{\lambda}} = e^{-L\sqrt{\lambda}}, \quad \text{m.a.w.} \quad e^{2L\sqrt{\lambda}} = 1.$$

Uit de theorie van complexe getallen weten we dit impliceert dat

$$2L\sqrt{\lambda} = 2\pi ik \quad \text{met} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dus

$$\lambda = -\frac{\pi^2 k^2}{L^2} \quad \text{voor een geheel getal } k \neq 0. \quad (25)$$

Met deze λ , hebben we

$$\begin{aligned} T(t) &= c_1 e^{-\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 at} \\ X(x) &= c_2 \left(e^{i\frac{\pi k}{L}x} - e^{-i\frac{\pi k}{L}x} \right) = 2ic_2 \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right). \end{aligned}$$

Dus voldoet de functie

$$u_k(x, t) = e^{-\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 at} \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) \quad (26)$$

zowel aan de differentiaalvergelijking (17) als aan de randvoorwaarde (18). Merk op dat $u_0(x, t) = 0$ en $u_{-k}(x, t) = -u_k(x, t)$ voor alle x, t, k . Het is daarom voldoende om verder alleen te werken met de functies $u_k(x, t)$ voor positieve gehele getallen k .

We krijgen nog meer oplossingen van de differentiaalvergelijking (17) die ook voldoen aan de randvoorwaarde (18) door *superposities* (d.w.z. lineaire combinaties) te nemen van de functies $u_k(x, t)$ met $k \geq 1$:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 at} \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) \quad (27)$$

Zo'n lineaire combinatie voldoet ook nog aan beginvoorwaarde (19) precies dan als

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) \quad \text{voor alle } 0 \leq x \leq L.$$

Het probleem is hiermee teruggebracht tot de vragen:

- Hoe moeten we omgaan met sommen waarbij oneindig veel termen moeten worden opgeteld?
- Aan welke voorwaarden moet de functie $g(x)$ voldoen opdat $g(x)$ inderdaad zo'n lineaire combinatie is van de functies $\sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right)$ met $k \geq 1$?
- Hoe kunnen we de coëfficiënten b_k berekenen?

We zullen deze vragen beantwoorden met *Fouriertheorie*; zie Paragraaf 7.7.2.

3.2 Opmerkelijke overeenkomsten

$\frac{d}{dt}F(t) = AF(t) \quad (14)$	
$\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) = a\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t) \quad (17)$	
$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad (9)$	
$\frac{d^2}{dx^2}X(x) = \lambda X(x) \quad (22)$	
$F(t) = \sum_{k=1}^n g_k(0)e^{\lambda_k t \mathbf{v}^{(k)}} \quad (16)$	
$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-\left(\frac{\pi k}{L}\right)^2 at} \sin\left(\frac{\pi k}{L}x\right) \quad (27)$	

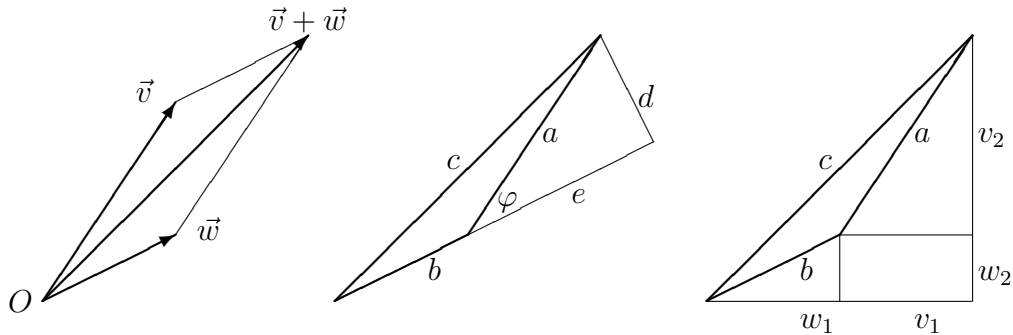
Tabel 2: Overeenkomsten tussen Paragraaf 2.5 en Paragraaf 3.1.

Tabel 2 toont enkele opmerkelijke overeenkomsten tussen de paragrafen 2.5 en 3.1. Dit laat zien dat achter de oplosmethode voor de warmtevergelijking ook een verhaal over eigenwaarden en eigenvectoren zit. Bij nader inzien is er echter een verschil in de manier waarop men de eigenwaarden en eigenvectoren berekent.

4 Lineaire ruimten met een inproduct

4.1 Meetkundige achtergrond van Inproduct

In eerste intuïtieve benadering kan men zeggen dat een *vector* iets is met *grootte en richting*. Men komt vectoren tegen in de natuur(-kunde) als krachten, snelheden, verschuivingen. Vectoren neemt men vooral waar doordat ze iets doen met objecten: een kracht werkt op een object; een object heeft snelheid; een object is verschoven. Het was een belangrijke ontdekking, toen men begreep hoe twee vectoren \vec{v} en \vec{w} (van dezelfde soort) die beide gelijktijdig op een object O werken, gezamenlijk hetzelfde effect hebben als één vector, die men noteert als $\vec{v} + \vec{w}$ en die eenvoudig kan worden beschreven wanneer men \vec{v} en \vec{w} modelleert als pijlen uitgaande van O ; zie Figuur 2.



Figuur 2: De som $\vec{v} + \vec{w}$ van de vectoren \vec{v} en \vec{w} is de diagonaal in het parallellogram met zijden \vec{v} en \vec{w} .

Laat nu $a = \|\vec{v}\|$, $b = \|\vec{w}\|$, $c = \|\vec{v} + \vec{w}\|$ de lengtes zijn van respectievelijk de vectoren \vec{v} , \vec{w} en $\vec{v} + \vec{w}$. Dan leert de *Stelling van Pythagoras*, toegepast in het middelste plaatje in Figuur 2:

$$c^2 = d^2 + (e + b)^2 = d^2 + e^2 + b^2 + 2eb = a^2 + b^2 + 2ab \cos \varphi.$$

De *Stelling van Pythagoras*, toegepast in het rechter plaatje in Figuur 2 geeft:

$$\begin{aligned} c^2 &= (v_1 + w_1)^2 + (v_2 + w_2)^2 = v_1^2 + 2v_1w_1 + w_1^2 + v_2^2 + 2v_2w_2 + w_2^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2(v_1w_1 + v_2w_2). \end{aligned}$$

We definiëren nu het *inproduct* $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ van de vectoren \vec{v} en \vec{w} door:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \frac{1}{2}(\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2). \quad (28)$$

Dan laten de bovenstaande berekeningen bij Figuur 2 zien dat

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos \varphi, \quad (29)$$

$$= v_1 w_1 + v_2 w_2. \quad (30)$$

Wanneer men Formule (28) toepast voor twee vectoren \vec{v} en \vec{w} in \mathbb{R}^3 die worden gegeven door hun coördinaten t.o.v. een Cartesisch coördinatenstelsel, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ en $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, dan vindt men voor het inproduct

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3. \quad (31)$$

Uit Formules (28), (29), (30) en (31) leidt men gemakkelijk de volgende eigenschappen af voor het inproduct tussen vectoren in \mathbb{R}^2 (resp \mathbb{R}^3):

voor alle vectoren $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}$ en reële getallen r geldt

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle &= \|\vec{v}\|^2 \\ \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle &> 0 \quad \text{als } \vec{v} \neq \vec{0} && \text{(positiviteit)} \\ \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0 &\Leftrightarrow \vec{v} \text{ en } \vec{w} \text{ staan loodrecht op elkaar} \\ |\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| &\leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| && \text{(ongelijkheid van Cauchy-Schwarz)} \\ \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle &= \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle && \text{(symmetrie)} \\ \langle \vec{v}, \vec{u} + \vec{w} \rangle &= \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle && \text{(additiviteit)} \\ \langle r\vec{v}, \vec{w} \rangle &= r \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle && \text{(homogeniteit)} \end{aligned}$$

4.2 Definitie van lineaire ruimte

Zoals gebruikelijk schrijven we \mathbb{R} voor de verzameling van de reële getallen en \mathbb{C} voor de verzameling van de complexe getallen.

Een *lineaire ruimte over* \mathbb{R} (respectievelijk, *over* \mathbb{C}) is een verzameling V voorzien van de volgende structuren

- een regel ‘optelling’ om aan ieder tweetal elementen $v, w \in V$ een element $v + w \in V$ (de *som* van v en w) toe te voegen
- een regel ‘scalarvermenigvuldiging’ om aan iedere $v \in V$ en $r \in \mathbb{R}$ (respectievelijk $r \in \mathbb{C}$) een element $rv \in V$ (het *product* van r en v) toe te voegen
- een regel ‘tegengestelde’ die aan iedere $v \in V$ een element $-v \in V$ (de *tegengestelde* van v) toevoegt

- een element $0 \in V$ (het *nulelement*)

zodat voor alle $u, v, w \in V$ en alle $r, s \in \mathbb{R}$ (respectievelijk $r, s \in \mathbb{C}$) de onderstaande gelijkheden gelden

$$\begin{array}{ll}
 (u + v) + w = u + (v + w) & \text{(associativiteit optelling)} \\
 u + v = v + u & \text{(commutativiteit optelling)} \\
 0 + v = v & \text{(neutraal element optelling)} \\
 v + (-v) = 0 & \text{(inverse voor optelling)} \\
 r(u + v) = ru + rv & \text{(distributiviteit)} \\
 (r + s)u = ru + su & \text{(distributiviteit)} \\
 r(sv) = (rs)v & \text{(associativiteit vermenigvuldiging)} \\
 1v = v & \text{(neutraal element vermenigvuldiging)}
 \end{array}$$

Opmerking. Vaak wordt de term *vectorruimte* (*vector space*) gebruikt voor wat wij hier een *lineaire ruimte* noemen. De elementen van zo'n vectorruimte worden dan *vectoren* genoemd. Wij geven hier de voorkeur aan de iets neutralere term *lineaire ruimte* omdat we vooral geïnteresseerd zijn in ruimten waarvan de elementen van nature functies zijn. Afhankelijk van de context zullen we de elementen van een lineaire ruimte “vector” of “functie” noemen.

4.3 Voorbeelden van lineaire ruimten

1. In het eerste jaar spelen de vectorruimten \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n een hoofdrol. De elementen van \mathbb{R}^3 zijn drietallen (a_1, a_2, a_3) van reële getallen, die men componentsgewijs optelt en met een reële scalar vermenigvuldigt:

$$\begin{aligned}
 (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\
 r(a_1, a_2, a_3) &= (ra_1, ra_2, ra_3)
 \end{aligned}$$

2. In de Quantummechanica kijkt men naar lineaire ruimten waarvan de elementen reëelwaardige functies zijn op een verzameling U , die men puntsgewijs optelt en met een reële scalar vermenigvuldigt:

Voor twee functies $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ en een scalar $r \in \mathbb{R}$ definiëren we de functies $f + g$ en $rf : U \rightarrow \mathbb{R}$ door

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (rf)(x) = r f(x) \quad \text{voor elke } x \in U.$$

We zullen vaak kijken naar het geval waarin U een interval is in \mathbb{R} , mogelijk links of/en rechts onbegrensd.

Zo nu en dan zullen we ook complexwaardige functies bekijken op een reëel open interval U . Die vormen dan een lineaire ruimte over \mathbb{C} .

In andere voorbeelden, waar we hier weinig aandacht aan besteden, maar die in de natuurkunde toch ook heel belangrijk zijn, is U een deelverzameling van \mathbb{R}^2 of \mathbb{R}^3 .

3. Wanneer men in het vorige voorbeeld voor U neemt de verzameling $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, dan vindt men in feite gewoon de lineaire ruimte \mathbb{R}^n .
4. Neemt men voor U de verzameling $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ van alle niet-negatieve gehele getallen, dan zijn de elementen van de bijbehorende lineaire ruimte precies de (oneindige) rijen $\{a_n\}_{n \geq 0}$ van reële (c.q. complexe) getallen.

4.4 Definitie van lineaire deelruimte

Zij V een lineaire ruimte over \mathbb{R} (resp. over \mathbb{C}) en W een deelverzameling van V . Dan is W een *lineaire deelruimte van V* als voldaan is aan de volgende drie voorwaarden

1. De verzameling W is *niet leeg*.
2. Als v en w elementen zijn van W dan is ook $v + w \in W$.
3. Als $v \in W$ is en $r \in \mathbb{R}$ (resp. $r \in \mathbb{C}$) dan is $rv \in W$.

Opmerkingen.

1. Per definitie bevat V een element 0 . Men kan de eis dat W niet leeg mag zijn, vervangen door de eis dat dit element 0 in W moet liggen.
2. In de bovenstaande definitie zijn $v + w$ en rv a priori elementen van V . De extra eis is dat ze in feite in W liggen.
3. Als W een lineaire deelruimte is van een lineaire ruimte V dan is W zelf ook een lineaire ruimte, met de van V geërfde regels voor optelling, scalarvermenigvuldiging, tegengestelde en nulelement.

4.5 Voorbeelden van lineaire deelruimten

Een lineaire deelruimte van V bestaat uit elementen van V die een aantal extra eigenschappen hebben. Hieronder staan voorbeelden van lineaire deelruimten voor het geval dat V de lineaire ruimte is van alle reëelwaardige functies op een open interval $U \subset \mathbb{R}$

1. De verzameling van alle *continue functies* op U is een lineaire deelruimte van V ; immers, de nulfunctie is continu, de som van twee continue functies is continu en ieder veelvoud van een continue functie is continu.
2. De verzameling van alle *differentieerbare functies* op U is een lineaire deelruimte van V ; immers, de nulfunctie is differentieerbaar, de som van twee differentieerbare functies is differentieerbaar en ieder veelvoud van een differentieerbare functie is differentieerbaar.
3. Voor ieder positief geheel getal k is de verzameling van alle *k -maal continu differentieerbare functies* op U een lineaire deelruimte van V ; immers, Deze ruimte noteert men vaak als $C^k(U)$.
4. De verzameling van alle *willekeurig vaak differentieerbare functies* op U is een lineaire deelruimte van V ; immers, Deze ruimte noteert men vaak als $C^\infty(U)$.
5. Als $a \in U$ een gegeven punt is, dan is de verzameling van alle functies $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ die in a nul zijn (d.w.z. $f(a) = 0$) een lineaire deelruimte van V ; immers,

Daarentegen is de verzameling van alle functies $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ die in a de waarde 1 hebben (d.w.z. $f(a) = 1$) *niet* een lineaire deelruimte van V ; bijvoorbeeld omdat de nulfunctie in a niet de waarde 1 heeft.

6. Men zegt dat een functie $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ *begrensd* is, als er een constante $M \in \mathbb{R}$ is zodat voor elke $x \in U$ geldt $|f(x)| < M$; merk op dat hier de constante M van de functie f afhangt.

De verzameling van alle *begrensde functies* op U is een lineaire deelruimte van V ; immers, de nulfunctie is begrensd; als f en g begrensde functies zijn, zeg $|f(x)| < M_1$ en $|g(x)| < M_2$ voor elke $x \in U$, dan is $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| < M_1 + M_2$ voor elke $x \in U$, d.w.z.

$f + g$ is een begrensde functie. Net zo bewijst men: als f een begrensde functie is en $r \in \mathbb{R}$, dan is de functie rf begrensd.

7. Als U het open interval $(p, q) = \{x \in \mathbb{R} \mid p < x < q\}$, dan is de verzameling van alle functies $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ waarvoor $\lim_{x \uparrow q} f(x)$ bestaat als reëel getal, een lineaire deelruimte van V .

De verzameling van alle functies $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ waarvoor $\lim_{x \uparrow q} f(x) = 0$ is, is eveneens een lineaire deelruimte van V .

Daarentegen, is de verzameling van alle functies $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ waarvoor $\lim_{x \uparrow q} f(x) = 1$ is, niet een lineaire deelruimte van V .

8. Drie varianten op het vorige voorbeeld:

- q mag ∞ zijn;
- bekijk $\lim_{x \downarrow p} f(x)$ i.p.v. $\lim_{x \uparrow q} f(x)$;
- ook $p = -\infty$ mag.

9. Zij T een positief reëel getal. Men zegt dat een functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *periodiek is met periode T* (of kortweg T -periodiek) als voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt $f(x + T) = f(x)$.

De T -periodieke functies vormen een lineaire deelruimte van V (in dit geval is $U = \mathbb{R}$).

10. Zij $U = \mathbb{R}$ of $U = \{x \in \mathbb{R} \mid -a < x < a\}$ of $U = \{x \in \mathbb{R} \mid -a \leq x \leq a\}$ met $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Men zegt dat een functie f op U een *even functie* is als voor alle $x \in U$ geldt $f(-x) = f(x)$. De even functies vormen een lineaire deelruimte van V .

Men zegt dat een functie f op U een *oneven functie* is als voor alle $x \in U$ geldt $f(-x) = -f(x)$. De oneven functies vormen een lineaire deelruimte van V .

11. Zij n een geheel getal ≥ 0 . Een *polynoom² van graad $\leq n$* is een functie $P(x)$ waarvan de waarde in x kan worden berekend met een formule van de vorm

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

²in het Nederlands wordt een polynoom ook vaak *veelterm* genoemd

waarbij a_n, \dots, a_0 gegeven reële getallen zijn, die men de *coëfficiënten van het polynoom* $P(x)$ noemt. Een polynoom wordt dus volledig vastgelegd door zijn coëfficiënten. Als $a_n \neq 0$ is zegt men dat het polynoom *graad* n heeft.

Er is een kleine merkwaardigheid in deze terminologie omdat het *nulpolynoom*, waarvan alle coëfficiënten 0 zijn, geen graad heeft, maar wel een polynoom met graad $\leq n$ is.

We noteren de verzameling van alle polynomen met graad $\leq n$ als Pol_n . Deze bestaat dus uit het nulpolynoom en alle polynomen met graden $0, 1, \dots, n-1, n$. We noteren de verzameling van alle polynomen zonder beperking op hun graad als Pol_∞ ; dus:

$$\text{Pol}_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} \text{Pol}_n.$$

Merk op dat ieder element van Pol_∞ een polynoom is met toch maar eindig veel termen; we laten ons er alleen niet over uit hoeveel dat er zijn.

Voor elk geheel getal $n \geq 0$ is Pol_n is een lineaire deelruimte van de lineaire ruimte Pol_{n+1} . Ook is Pol_n een lineaire deelruimte van de lineaire ruimte $C^\infty(U)$ uit Voorbeeld 4 hierboven. Ook Pol_∞ is een lineaire deelruimte van $C^\infty(U)$.

Omdat een polynoom van graad $\leq n$ volledig wordt vastgelegd door zijn coëfficiënten a_n, \dots, a_0 en de enige beperking op de coëfficiënten is dat het reële getallen moeten zijn, is de lineaire ruimte Pol_n “hetzelfde” als \mathbb{R}^{n+1} . De juiste terminologie i.p.v. “hetzelfde” is:

de lineaire ruimte Pol_n is *isomorf* met de lineaire ruimte \mathbb{R}^{n+1} .

Pol_∞ is *niet isomorf* met de lineaire ruimte van alle rijen $\{a_j\}_{j \geq 0}$ van reële getallen uit Voorbeeld 4 in Paragraaf 4.3. Pol_∞ is isomorf met de lineaire ruimte van alle rijen $\{a_j\}_{j \geq 0}$, die voldoen aan de beperking dat er een getal n is zodat $a_j = 0$ voor $j > n$.

12. De doorsnede $W_1 \cap W_2$ van twee lineaire deelruimten W_1 en W_2 is ook weer een lineaire deelruimte van V .

Dit betekent dat men deelruimten van V kan maken waarvan de elementen voldoen aan een aantal van de voorwaarden uit de voorgaande voorbeelden.

Zo is de verzameling van alle begrensde tweemaal continu differentieerbare functies $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ die voldoen aan $f(1) = 0$ en $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, een lineaire deelruimte van V .

4.6 Definitie van inproduct op een lineaire ruimte

4.6.1 Lineaire ruimten over \mathbb{R}

Zij V een lineaire ruimte over \mathbb{R} . Een *inproduct* op V is een functie

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

d.w.z. een regel om aan ieder tweetal elementen $v, w \in V$ een reëel getal $\langle v, w \rangle$ toe te voegen, zodat voor alle $u, v, w \in V$ en $r \in \mathbb{R}$ is voldaan aan de volgende eisen

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \langle w, v \rangle && \text{(symmetrie)} \\ \langle v, u + w \rangle &= \langle v, u \rangle + \langle v, w \rangle && \text{(additiviteit)} \\ \langle rv, w \rangle &= r \langle v, w \rangle && \text{(homogeniteit)} \\ \langle v, v \rangle &> 0 \quad \text{als } v \neq 0 && \text{(positiviteit)} \end{aligned}$$

4.6.2 Lineaire ruimten over \mathbb{C}

Zij V een lineaire ruimte over \mathbb{C} . Een *inproduct* op V is een functie

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C},$$

d.w.z. een regel om aan ieder tweetal elementen $v, w \in V$ een complex getal $\langle v, w \rangle$ toe te voegen, zodat voor alle $u, v, w \in V$ en $r \in \mathbb{C}$ is voldaan aan de volgende eisen

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \overline{\langle w, v \rangle} && \text{(symmetrie)} \\ \langle v, u + w \rangle &= \langle v, u \rangle + \langle v, w \rangle && \text{(additiviteit)} \\ \langle rv, w \rangle &= r \langle v, w \rangle && \text{(homogeniteit)} \\ \langle v, v \rangle &> 0 \quad \text{als } v \neq 0 && \text{(positiviteit)} \end{aligned}$$

Symmetrie impliceert in het bijzonder dat $\langle v, v \rangle = \overline{\langle v, v \rangle}$ en dus dat $\langle v, v \rangle$ een reëel getal is. Bij de positiviteitseis gaat het dus om het positief zijn van een reëel getal!

Opmerkingen.

1. Uit de homogeniteit volgt, zowel in het reële als in complexe geval, dat

$$\langle 0, 0 \rangle = 0.$$

Omgekeerd betekent de positiviteitseis dat als voor een vector v geldt $\langle v, v \rangle = 0$, dan moet $v = 0$ zijn.

2. Uit de symmetrie en additiviteit volgt, zowel in het reële als in complexe geval, dat

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle \quad \text{voor alle } u, v, w \in V$$

3. Uit de symmetrie en homogeniteit volgt in het reële geval dat

$$\langle v, rw \rangle = r \langle v, w \rangle \quad \text{voor alle } v, w \in V, r \in \mathbb{R},$$

en in het complexe geval dat

$$\langle v, rw \rangle = \bar{r} \langle v, w \rangle \quad \text{voor alle } v, w \in V, r \in \mathbb{C}.$$

4. **Waarschuwing:** In plaats van de bovengegeven definitie van “homogeniteit” wordt ook vaak in het complexe geval de *alternatieve definitie*

$$\langle v, rw \rangle = r \langle v, w \rangle \quad \text{voor alle } v, w \in V, r \in \mathbb{C}$$

genomen. In dat geval is dan vanwege de symmetrie-eis

$$\langle rv, w \rangle = \bar{r} \langle v, w \rangle \quad \text{voor alle } v, w \in V, r \in \mathbb{C}.$$

Men mag de beide definities beslist niet door elkaar gebruiken! Bij het vergelijken of combineren van resultaten uit verschillende boeken moet men altijd controleren dat ze dezelfde definitie van “homogeniteit van het inproduct” gebruiken!

Aanvullende definities en resultaten.

De hierna gedefinieerde begrippen *norm* en *loodrechte stand* worden in het reële en het complexe geval door dezelfde formules gegeven. Vandaar dat in

deze definitie niet apart wordt gerefereerd aan \mathbb{R} of \mathbb{C} . Voor de meetkundige achtergrond van de gebruikte termen zie Paragraaf 4.1.

Zij V een lineaire ruimte met een inproduct $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dan wordt de *norm* $\|v\|$ van een element $v \in V$ gedefinieerd door

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}. \quad (32)$$

Merk op dat $\langle v, v \rangle$ een reëel getal ≥ 0 is en we ook de wortel ≥ 0 kiezen. Een andere veel gebruikte naam voor norm is *lengte*.

Men zegt dat twee elementen $v, w \in V$ *loodrecht op elkaar staan* als

$$\langle v, w \rangle = 0. \quad (33)$$

In elke ruimte met inproduct geldt de *ongelijkheid van Cauchy-Schwarz*:

$$|\langle w, v \rangle| \leq \|w\| \|v\| \quad \text{voor alle } w, v \in V. \quad (34)$$

De afleiding van de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz is in feite eenvoudig en geeft bovendien extra inzicht. Laten we daarom die afleiding hier eens bekijken. Gegeven zijn twee vectoren $v, w \in V$. Als een van hen de nulvector is, is de ongelijkheid triviaalwijze correct. Daarom kunnen we nu aannemen $v \neq 0$. Laat

$$t = \frac{\langle w, v \rangle}{\langle v, v \rangle}.$$

Het getal t is zo gekozen dat

$$\langle w - tv, v \rangle = \langle w, v \rangle - t\langle v, v \rangle = 0.$$

Dan is $w = tv + (w - tv)$ en dus

$$\begin{aligned} \langle w, w \rangle &= \langle tv, tv \rangle + \langle w - tv, tv \rangle + \langle tv, w - tv \rangle + \langle w - tv, w - tv \rangle \\ &= \langle tv, tv \rangle + 0 + 0 + \langle w - tv, w - tv \rangle \\ &\geq |t|^2 \langle v, v \rangle. \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\|w\|^2 \|v\|^2 = \langle w, w \rangle \langle v, v \rangle \geq |\langle w, v \rangle|^2.$$

4.7 Voorbeelden van lineaire ruimten met inproduct

In de opgaven zal worden nagegaan dat de hiernavolgende voorbeelden inderdaad inproducten geven.

1. Het *standaard inproduct* op \mathbb{R}^2 wordt gegeven door

$$\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2.$$

2. Het *standaard inproduct* op \mathbb{C}^2 wordt gegeven door

$$\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle = v_1 \overline{w_1} + v_2 \overline{w_2}.$$

3. Definieer voor $(v_1, v_2), (w_1, w_2) \in \mathbb{R}$

$$\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle = 2v_1 w_1 + 3v_2 w_2 - v_1 w_2 - v_2 w_1.$$

Dit is een inproduct op \mathbb{R}^2 .

4. Neem de lineaire ruimte $C^0([-1, 1])$ van alle continue reëelwaardige functies op het gesloten interval $[-1, 1]$. Definieer voor $f, g \in C^0([-1, 1])$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

Dit is een inproduct op $C^0([-1, 1])$.

5. Neem de lineaire ruimte $C^0([-1, 1])$ van alle continue reëelwaardige functies op het interval $[-1, 1]$. Definieer voor $f, g \in C^0([-1, 1])$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\sqrt{1-x^2}dx.$$

Dit is een inproduct op $C^0([-1, 1])$.

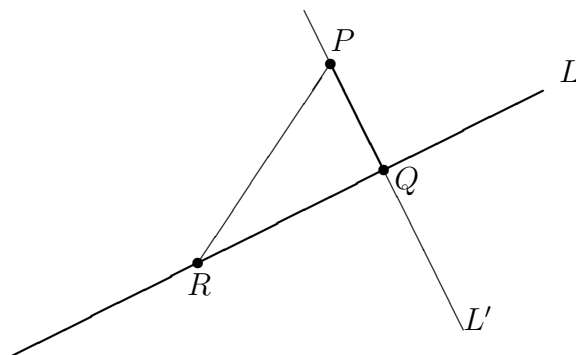
6. Neem de lineaire ruimte Pol_∞ bestaande uit alle polynomen. Definieer voor twee polynomen f en g

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}dx.$$

Dit is een inproduct op Pol_∞ .

4.8 Projecties

Het is een welbekend klassiek meetkundig feit, dat wanneer men bij een gegeven lijn L in een vlak V en gegeven punt P in V de afstand van P tot L moet bepalen, men een lijn L' door P moet nemen die loodrecht staat op L . Als Q het snijpunt van L en L' is, dan is de afstand van P tot Q kleiner dan de afstand van P tot enig ander punt R van L . Voor het geval dat het punt P niet op de lijn L ligt, wordt dit geïllustreerd in Figuur 3. Maak zelf een tekening voor het geval dat P wel op L ligt.



Figuur 3:

Algemener, laat V een lineaire ruimte (over \mathbb{R}) zijn met een inproduct. In V zijn gegeven een vector \mathbf{p} en een lineaire deelruimte L . Zij \mathbf{q} de vector in L , zodanig dat de vector $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ loodrecht staat op alle vectoren in L . Voor iedere vector \mathbf{r} in L ligt dan ook de vector $\mathbf{q} - \mathbf{r}$ in L (omdat L een lineaire ruimte is) en is dus $\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{q} - \mathbf{r} \rangle = 0$. Als bovendien $\mathbf{r} \neq \mathbf{q}$ is, dan is $\|\mathbf{q} - \mathbf{r}\|^2 > 0$ en is dus (zie ook Figuur 3)

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{r}\|^2 = \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|^2 + \|\mathbf{q} - \mathbf{r}\|^2 + 2\langle \mathbf{p} - \mathbf{q}, \mathbf{q} - \mathbf{r} \rangle > \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|^2,$$

d.w.z.

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{r}\| > \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|.$$

CONCLUSIE: *De beste benadering van \mathbf{p} door een element van L is uniek bepaald en wordt gegeven door de oplossing \mathbf{q} van de volgende vergelijkingen*

$$\mathbf{q} \in L \quad \text{en} \quad \langle \mathbf{q} - \mathbf{p}, \mathbf{w} \rangle = 0 \quad \text{voor alle} \quad \mathbf{w} \in L. \quad (35)$$

Om verder te gaan hebben we een (efficiënte) beschrijving nodig van de elementen van L . We veronderstellen daarom dat we beschikken over de volgende gegevens:

Gegeven zijn vectoren $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ in L zo dat elke vector \mathbf{w} in L op precies één manier te schrijven is als een lineaire combinatie van $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$; d.w.z. er zijn getallen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ zodat

$$\mathbf{w} = a_1 \mathbf{w}_1 + a_2 \mathbf{w}_2 + \dots + a_n \mathbf{w}_n \quad (36)$$

en als $\mathbf{w} = a'_1 \mathbf{w}_1 + a'_2 \mathbf{w}_2 + \dots + a'_n \mathbf{w}_n$ is dan is $a'_j = a_j$ voor $j = 1, \dots, n$.

Het (geordende) stel vectoren $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ in L is dan een (geordende) *basis van de lineaire ruimte L* . En L is een lineaire ruimte van *dimensie n* .

Wanneer we de vector \mathbf{w} in (35) schrijven als in (36), dan vinden we dat voor alle n -tallen reële getallen a_1, \dots, a_n moet gelden

$$a_1 \langle \mathbf{q} - \mathbf{p}, \mathbf{w}_1 \rangle + a_2 \langle \mathbf{q} - \mathbf{p}, \mathbf{w}_2 \rangle + \dots + a_n \langle \mathbf{q} - \mathbf{p}, \mathbf{w}_n \rangle = 0.$$

Daarvoor is het noodzakelijk en voldoende dat

$$\langle \mathbf{q}, \mathbf{w}_j \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{w}_j \rangle \quad \text{voor } j = 1, \dots, n. \quad (37)$$

Daarmee is het stelsel vergelijkingen (35), dat één vergelijking heeft bij elke vector in L , vervangen door een equivalent stelsel met slechts n vergelijkingen. De onbekende in deze vergelijkingen is \mathbf{q} . Omdat de gezochte \mathbf{q} in L moet zitten kunnen we hem schrijven als in (36):

$$\mathbf{q} = x_1 \mathbf{w}_1 + x_2 \mathbf{w}_2 + \dots + x_n \mathbf{w}_n.$$

Het stelsel vergelijkingen (37) voor de onbekende vector \mathbf{q} gaat nu over in een stelsel vergelijkingen (38) in de n onbekende getallen x_1, \dots, x_n :

$$x_1 \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_j \rangle + \dots + x_n \langle \mathbf{w}_n, \mathbf{w}_j \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{w}_j \rangle \quad \text{voor } j = 1, \dots, n. \quad (38)$$

Geschreven in matrixvorm ziet dat zo uit:

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{w}_n, \mathbf{w}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{w}_n, \mathbf{w}_n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{p}, \mathbf{w}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{p}, \mathbf{w}_n \rangle \end{pmatrix} \quad (39)$$

We zullen dit stelsel vergelijkingen oplossen door de matrix

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{w}_n, \mathbf{w}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{w}_n, \mathbf{w}_n \rangle \end{pmatrix} \quad (40)$$

in het linker lid van (39) te inverteren. Deze matrix \mathbf{G} noemt men de *Gram matrix* van het inproduct $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ten opzichte van de geordende basis $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$.

Stelling 4.1 *De inverse van de Gram matrix \mathbf{G} is*

$$\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{L}^t \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L} \quad (41)$$

waarbij de matrices \mathbf{D} en \mathbf{L} worden gegeven in Formules (46) resp. (45). Zoals gebruikelijk is \mathbf{L}^t de gespiegelde (= getransponeerde = transpose) van de matrix \mathbf{L} .

Bewijs: Om de matrix (40) te inverteren gebruiken we een gesymmetriseerde versie van de bekende *Gauss eliminatie methode*. We beginnen met de matrix in (40) en trekken $\frac{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}$ maal de eerste rij af van de tweede rij. Voor $j = 1, \dots, n$ is het j -de element in de tweede rij van de nieuwe matrix dan

$$\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_j \rangle - \frac{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_j \rangle = \langle \mathbf{w}_2 - \frac{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_j \rangle = \langle \mathbf{w}_2^*, \mathbf{w}_j \rangle$$

waarbij

$$\mathbf{w}_2^* = \mathbf{w}_2 - \frac{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1.$$

Vervolgens trekken $\frac{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}$ maal de eerste kolom af van de tweede kolom. Voor $j \neq 2$ is het j -de element in de tweede kolom van de nieuwe matrix dan

$$\langle \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_2^* \rangle$$

met \mathbf{w}_2^* als boven. Het (2,2)-element in deze matrix is $\langle \mathbf{w}_2^*, \mathbf{w}_2^* \rangle$. De (1,2)- en (2,1)-elementen zijn $\langle \mathbf{w}_2^*, \mathbf{w}_1 \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2^* \rangle = 0$. De matrixelementen buiten de tweede rij en de tweede kolom zijn nog hetzelfde als in (40).

In de volgende stap trekken we $\frac{\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}$ maal de eerste rij en $\frac{\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_2^* \rangle}{\langle \mathbf{w}_2^*, \mathbf{w}_2^* \rangle}$ maal de tweede rij af van de derde rij. Voor $j \geq 4$ is het j -de element in de derde rij van de nieuwe matrix dan $\langle \mathbf{w}_3^*, \mathbf{w}_j \rangle$ met

$$\mathbf{w}_3^* = \mathbf{w}_3 - \frac{\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_2^* \rangle}{\langle \mathbf{w}_2^*, \mathbf{w}_2^* \rangle} \mathbf{w}_2^*.$$

De derde rij begint nu met $0, 0, \langle \mathbf{w}_3^*, \mathbf{w}_3^* \rangle$ omdat $\langle \mathbf{w}_3^*, \mathbf{w}_1 \rangle = \langle \mathbf{w}_3^*, \mathbf{w}_2 \rangle = 0$. Vervolgens trekken we $\frac{\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}$ maal de eerste kolom en $\frac{\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle}$ maal de tweede kolom af van de derde kolom. Voor $j \geq 4$ is het j -de element in de derde rij van de nieuwe matrix dan $\langle \mathbf{w}_j, \mathbf{w}_3^* \rangle$ met \mathbf{w}_3^* als boven. *En zo voort.*

We kunnen het voorgaande samenvatten als we een (recursief) algoritme waarbij we het (geordende) n -tal vectoren $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ omzetten in het (geordende) n -tal vectoren $\mathbf{w}_1^*, \dots, \mathbf{w}_n^*$ volgens het algoritme

$$\begin{cases} \mathbf{w}_1^* = \mathbf{w}_1, & \text{en voor } k \geq 2 \\ \mathbf{w}_k^* = \mathbf{w}_k - \frac{\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_1^* \rangle}{\langle \mathbf{w}_1^*, \mathbf{w}_1^* \rangle} \mathbf{w}_1^* - \dots - \frac{\langle \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k-1}^* \rangle}{\langle \mathbf{w}_{k-1}^*, \mathbf{w}_{k-1}^* \rangle} \mathbf{w}_{k-1}^*. \end{cases} \quad (42)$$

Men noemt dit het *Gram-Schmidt orthogonalisatie algoritme*. Daarbij slaat “orthogonalisatie” (loodrecht zetten) op de eigenschap

$$\langle \mathbf{w}_k^*, \mathbf{w}_j^* \rangle = 0 \quad \text{als } k \neq j. \quad (43)$$

Het Gram-Schmidt orthogonalisatie algoritme is in feite een symmetrische vorm van de Gauss eliminatie methode voor de Gram matrix \mathbf{G} in (40) gebruikmakend van de speciale structuur van \mathbf{G} . We kunnen het resultaat samenvatten als

$$\mathbf{LGL}^t = \mathbf{D} \quad (44)$$

met

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1^* \rangle}{\langle \mathbf{w}_1^*, \mathbf{w}_1^* \rangle} & 1 & \dots & 0 \\ -\frac{\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_1^* \rangle}{\langle \mathbf{w}_1^*, \mathbf{w}_1^* \rangle} & -\frac{\langle \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_2^* \rangle}{\langle \mathbf{w}_2^*, \mathbf{w}_2^* \rangle} & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ -\frac{\langle \mathbf{w}_n, \mathbf{w}_1^* \rangle}{\langle \mathbf{w}_1^*, \mathbf{w}_1^* \rangle} & -\frac{\langle \mathbf{w}_n, \mathbf{w}_2^* \rangle}{\langle \mathbf{w}_2^*, \mathbf{w}_2^* \rangle} & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (45)$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{w}_1^*, \mathbf{w}_1^* \rangle & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \langle \mathbf{w}_2^*, \mathbf{w}_2^* \rangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \langle \mathbf{w}_3^*, \mathbf{w}_3^* \rangle & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \langle \mathbf{w}_n^*, \mathbf{w}_n^* \rangle \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Uit (44) volgt de gezochte formule (41) voor de inverse van \mathbf{G} . ■

We keren terug naar het probleem uit het begin van deze paragraaf:

Stelling 4.2 *Bij gegeven \mathbf{p} en L wordt de vector \mathbf{q} die voldoet aan*

$$\mathbf{q} \in L \quad \text{en} \quad \langle \mathbf{q}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{w} \rangle \quad \text{voor alle} \quad \mathbf{w} \in L \quad (47)$$

gegeven door

$$\mathbf{q} = \frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{w}_1^* \rangle}{\langle \mathbf{w}_1^*, \mathbf{w}_1^* \rangle} \mathbf{w}_1^* + \frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{w}_2^* \rangle}{\langle \mathbf{w}_2^*, \mathbf{w}_2^* \rangle} \mathbf{w}_2^* + \dots + \frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{w}_n^* \rangle}{\langle \mathbf{w}_n^*, \mathbf{w}_n^* \rangle} \mathbf{w}_n^*. \quad (48)$$

Hier is $\{\mathbf{w}_1^*, \dots, \mathbf{w}_n^*\}$ de basis van L die we hebben gemaakt m.b.v. het Gram-Schmidt orthogonalisatie algoritme.

Bewijs: Het is noodzakelijk en voldoende dat

$$\langle \mathbf{q}, \mathbf{w}_j^* \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{w}_j^* \rangle \quad \text{voor} \quad j = 1, \dots, n. \quad (49)$$

Schrijf \mathbf{q} als een lineaire combinatie van de basisvectoren $\mathbf{w}_1^*, \dots, \mathbf{w}_n^*$:

$$\mathbf{q} = x_1^* \mathbf{w}_1^* + x_2^* \mathbf{w}_2^* + \dots + x_n^* \mathbf{w}_n^*. \quad (50)$$

Omdat

$$\langle \mathbf{w}_k^*, \mathbf{w}_j^* \rangle = 0 \quad \text{als} \quad k \neq j.$$

volgt hieruit voor $j = 1, \dots, n$;

$$\langle \mathbf{q}, \mathbf{w}_j^* \rangle = x_j^* \langle \mathbf{w}_j^*, \mathbf{w}_j^* \rangle,$$

en dus

$$x_j^* = \frac{\langle \mathbf{q}, \mathbf{w}_j^* \rangle}{\langle \mathbf{w}_j^*, \mathbf{w}_j^* \rangle} = \frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{w}_j^* \rangle}{\langle \mathbf{w}_j^*, \mathbf{w}_j^* \rangle}.$$

Dit invullen in (50) levert (48). ■

Neem

$$\mathbf{w}_j^{**} = \frac{\mathbf{w}_j^*}{\|\mathbf{w}_j^*\|} \quad \text{voor} \quad j = 1, \dots, n. \quad (51)$$

Dan vormen de vectoren $\mathbf{w}_1^{**}, \dots, \mathbf{w}_n^{**}$ een *orthonormale basis* van de lineaire ruimte L . Daarbij betekent “orthonormaal” dat voor $j, k = 1, \dots, n$ geldt

$$\langle \mathbf{w}_j^{**}, \mathbf{w}_j^{**} \rangle = 1 \quad \text{en} \quad \langle \mathbf{w}_k^{**}, \mathbf{w}_j^{**} \rangle = 0 \quad \text{als} \quad k \neq j. \quad (52)$$

Uit Formule (48) volgt dan, in het geval dat \mathbf{p} een vector in de lineaire ruimte L is,

$$\mathbf{p} = \langle \mathbf{p}, \mathbf{w}_1^{**} \rangle \mathbf{w}_1^{**} + \langle \mathbf{p}, \mathbf{w}_2^{**} \rangle \mathbf{w}_2^{**} + \dots + \langle \mathbf{p}, \mathbf{w}_n^{**} \rangle \mathbf{w}_n^{**}. \quad (53)$$

Om deze reden noemt men $\mathbf{w}_1^{**}, \dots, \mathbf{w}_n^{**}$ ook wel een *Cartesisch coördinatenstelsel*.

4.9 Voorbeeld: orthogonale polynomen

In deze paragraaf bekijken we een voorbeeld van het Gram-Schmidt orthogonalisatie algoritme (42) dat van belang is in o.a. de Quantum Mechanica.

Voor L nemen we de lineaire ruimte Pol_n uit Voorbeeld 11 in Paragraaf 4.5. De elementen van Pol_n zijn polynomen van graad $\leq n$. Zo'n polynoom $f(x)$ is op precies één manier te schrijven als

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n.$$

Dit betekent dat Pol_n van nature al komt met een geordende basis gevormd door de $n+1$ polynomen $x^0, x^1, x^2, \dots, x^n$. De dimensie van Pol_n is dus $n+1$.

Op Pol_n nemen we het inproduct uit Voorbeeld 4 in Paragraaf 4.7³

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

Dan is

$$\langle x^i, x^j \rangle = \int_{-1}^1 x^{i+j}dx = \frac{1 - (-1)^{i+j+1}}{i+j+1} = \begin{cases} 0 & \text{als } i+j \text{ oneven} \\ \frac{2}{i+j+1} & \text{als } i+j \text{ even} \end{cases}$$

Zo vinden we voor $n = 4$ de Gram matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{1} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} & 0 & \frac{2}{9} \end{pmatrix}.$$

³Voorbeelden met andere inproducten worden uitgewerkt in de opgaven.

Het Gram-Schmidt orthogonalisatie algoritme (42) levert polynomen $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x) \dots$ met $p_0(x) = 1$ en voor $k \geq 2$

$$p_k(x) = x^k - \frac{\langle x^k, p_0(x) \rangle}{\langle p_0(x), p_0(x) \rangle} p_0(x) - \dots - \frac{\langle x^k, p_{k-1}(x) \rangle}{\langle p_{k-1}(x), p_{k-1}(x) \rangle} p_{k-1}(x)$$

Dus

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1 \\ p_1(x) &= x \\ p_2(x) &= x^2 - \frac{1}{3} \\ p_3(x) &= x^3 - \frac{3}{5}x \\ p_4(x) &= x^4 - \frac{1}{5} - \frac{\langle x^4, p_2(x) \rangle}{\langle p_2(x), p_2(x) \rangle} p_2(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35} \end{aligned}$$

want

$$\begin{aligned} \langle x^4, p_2(x) \rangle &= \frac{2}{7} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{16}{105}, \\ \langle p_2(x), p_2(x) \rangle &= \int_{-1}^1 (x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}) dx = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}. \end{aligned}$$

En zo voort.

Men vermenigvuldigt de aldus verkregen polynomen $p_k(x)$ nog met normaliserende factoren en definieert dan het k -de *Legendre polynoom* $P_k(x)$ door

$$P_k(x) = \frac{(2k)!}{2^k k! k!} p_k(x). \quad (54)$$

Deze Legendre polynomen zijn erg klassiek en veel bestudeerd. Zo heeft men gevonden dat

$$\begin{aligned} P_k(x) &= \frac{1}{2^k k!} \left(\frac{d}{dx} \right)^k ((x^2 - 1)^k) \\ &= \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^j (2k - 2j)!}{j! (k - j)! (k - 2j)!} x^{k-2j} \end{aligned} \quad (55)$$

waarbij $[k/2] = \frac{1}{2}k$ als k even is en $[k/2] = \frac{1}{2}(k - 1)$ als k oneven is. Formule (55) staat bekend als de *formule van Rodrigues*.

Men kan laten zien dat de formule van Rodrigues correct is door het inproduct van het rechterlid in (55) met de polynomen x^0, x^1, \dots, x^{k-1} te berekenen en te constateren dat dat steeds 0 is.

Men kan ook nog laten zien dat voor de Legendre polynomen geldt

$$\langle P_k(x), P_k(x) \rangle = \frac{2}{2k+1}.$$

5 Het spectrum van een lineaire operator op een lineaire ruimte

5.1 Definitie van een lineaire afbeelding/operator

Laat V_1 en V_2 twee lineaire ruimtes zijn over \mathbb{R} (respectievelijk over \mathbb{C}). Men zegt dat een afbeelding $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ een *lineaire afbeelding* is als geldt

$$\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w), \quad \varphi(rv) = r\varphi(v)$$

voor alle $v, w \in V_1$ en $r \in \mathbb{R}$ (respectievelijk $r \in \mathbb{C}$).

Een lineaire afbeelding $\varphi : V \rightarrow V$ van een lineaire ruimte V naar dezelfde lineaire ruimte V noemt men vaak een *lineaire operator*.

Laat $\varphi, \psi : V_1 \rightarrow V_2$ twee lineaire afbeeldingen zijn en laat $a, b \in \mathbb{R}$ (resp. $a, b \in \mathbb{C}$). Definieer de afbeelding $a\varphi + b\psi : V_1 \rightarrow V_2$ door: voor elke $v \in V$ is

$$(a\varphi + b\psi)(v) = a\varphi(v) + b\psi(v).$$

Dan is $a\varphi + b\psi$ ook weer een lineaire afbeelding.

Laat $\psi : V_1 \rightarrow V_2$ en $\varphi : V_2 \rightarrow V_3$ twee lineaire afbeeldingen zijn. Definieer de afbeelding $\varphi\psi : V_1 \rightarrow V_3$ door

$$(\varphi\psi)(v) = \varphi(\psi(v)).$$

Dan is $\varphi\psi$ ook weer een lineaire afbeelding. Men noemt $\varphi\psi$ de *samenstelling* of het *product* van de operatoren φ en ψ . In plaats van $\varphi\psi$ gebruikt men ook vaak de notatie $\varphi \circ \psi$.

Waarschuwing: Als $V_1 = V_2 = V_3$ dan is zowel de lineaire operator $\varphi\psi$ als de lineaire operator $\psi\varphi$ gedefinieerd. In het algemeen zijn $\varphi\psi$ en $\psi\varphi$ dan niet aan elkaar gelijk. In het bijzondere geval dat wel geldt $\varphi\psi = \psi\varphi$ zegt men dat de operatoren φ en ψ *commuteren*.

5.2 Voorbeelden van lineaire afbeeldingen/operators

1. $k \times n$ -matrices met reële componenten geven lineaire afbeeldingen van \mathbb{R}^n naar \mathbb{R}^k . Laten we voor de duidelijkheid nemen $k = 2$, $n = 3$. Een 2×3 -matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

definieert dan een lineaire afbeelding die aan een (kolom)vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^t$ toevoegt de vector

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3 \end{pmatrix}.$$

De samenstelling van twee van dit soort lineaire afbeeldingen wordt gegeven door het product van de bijbehorende matrices.

- Zij $C^0(U)$ de lineaire ruimte van alle continue functies op een interval $U \subset \mathbb{R}$. Voor een vaste $a \in U$ is de afbeelding

$$C^0(U) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto f(a)$$

die aan een functie z'n waarde in a toevoegt, een lineaire afbeelding.

- Laat $C^1(U)$ resp. $C^2(U)$ de ruimte zijn van de functies op een open interval $U \subset \mathbb{R}$ die eenmaal resp. tweemaal continu differentieerbaar zijn. Dan is de afbeelding

$$C^2(U) \rightarrow C^1(U), \quad f \mapsto f'$$

die aan een functie z'n afgeleide toevoegt, een lineaire afbeelding.

- Laat $C^\infty(U)$ de ruimte zijn van de functies op een open interval $U \subset \mathbb{R}$ die willekeurig vaak differentieerbaar zijn. Definieer de afbeelding $\varphi : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$ door aan een functie f toe te voegen de functie $\varphi(f)$ gegeven door

$$(\varphi(f))(x) = x^2 f''(x) + x f'(x) + 3f(x).$$

Dan geeft dit een lineaire operator $\varphi : C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$. ◇

5.3 Definitie van spectrum van een lineaire operator

5.3.1 Definitie van eigenwaarde

Eerst generaliseren we de definitie van eigenwaarde en eigenvector die in Paragraaf 2.1 zijn gegeven voor een $n \times n$ -matrix A naar een lineaire operator φ op een lineaire ruimte V over \mathbb{R} (resp. over \mathbb{C}).

Een getal $\lambda \in \mathbb{R}$ (resp. $\lambda \in \mathbb{C}$) is een *eigenwaarde* van de lineaire operator $\varphi : V \rightarrow V$ als er een element $v \in V$ is zodat

$$v \neq 0 \quad \text{en} \quad \varphi(v) = \lambda v. \quad (56)$$

Afhankelijk van de context noemt men deze v een *eigenvector* of een *eigenfunctie* van φ . De verzameling

$$V_\lambda := \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\} \quad (57)$$

noemt men de *eigenruimte* van φ bij de eigenwaarde λ .

Opmerkingen:

1. De vector 0 is nooit een eigenvector, maar zit wel altijd in de eigenruimte. Iedere vector in V_λ die niet 0 is, is een eigenvector van φ bij de eigenwaarde λ .
2. Voor elk getal λ is de verzameling $V_\lambda := \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$ een lineaire deelruimte van V . Deze deelruimte bestaat uit meer dan alleen het nulelement precies dan als λ een eigenwaarde van φ is.

5.3.2 Definitie van spectrum

De verzameling van alle eigenwaarden van de lineaire operator $\varphi : V \rightarrow V$ noemen we het *spectrum* van φ .

Opmerking: We zijn hier, vergeleken met de literatuur, een beetje slordig met de terminologie. De definitie die men in de literatuur vindt is: *het spectrum van φ is de verzameling van die complexe getallen λ waarvoor de operator $\varphi - \lambda I$ geen begrensde inverse heeft*. Hier is $I : V \rightarrow V$ de identieke afbeelding, d.w.z. $I(v) = v$ voor elke $v \in V$.

Als λ een eigenwaarde is van φ heeft $\varphi - \lambda I$ überhaupt geen inverse. Wat wij hier het spectrum van φ noemen is dus een deelverzameling van wat in de literatuur het spectrum van φ wordt genoemd. Het laatste kan echter meer getallen bevatten. De subtiliteit zit in het woordje “begrensde”. Op deze subtiliteit willen we in deze cursus niet ingaan. De bovenstaande definitie is voor de ons voor ogen staande voorbeelden voldoende.

5.4 Voorbeelden van eigenwaarden en spectrum

1. Voorbeelden van eigenwaarden en eigenvectoren voor 2×2 - en 3×3 -matrices, alsmede een methode voor de berekening daarvan, zijn besproken in Paragraaf 2.2.
2. Neem de lineaire ruimte $C^0(\mathbb{R})$ van alle continue reële functies op \mathbb{R} en bekijk de lineaire operator $J : C^0(\mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R})$ gegeven door aan een functie $f \in C^0(\mathbb{R})$ toe te voegen de functie $J(f)$ gegeven door $(J(f))(x) = f(-x)$.

Laat λ een eigenwaarde zijn van J en f een bijbehorende eigenfunctie. Dan is enerzijds

$$(J^2(f))(x) = (J(J(f)))(x) = (J(f))(-x) = f(-(-x)) = f(x),$$

dus $J^2(f) = f$, en anderzijds

$$J^2(f) = J(\lambda f) = \lambda J(f) = \lambda^2 f.$$

Dus $\lambda^2 f = f$. Omdat f niet de nulfunctie is, moet $\lambda^2 = 1$ zijn. We zien dat getallen anders dan 1 en -1 geen eigenwaarden kunnen zijn.

Om te laten zien dat 1 en -1 ook werkelijk eigenwaarden zijn, geven we expliciete voorbeelden van eigenfuncties: $\cos x$ is een eigenfunctie bij de eigenwaarde 1 en $\sin x$ is een eigenfunctie bij de eigenwaarde -1 .

Conclusie: *Het spectrum van de lineaire operator J op de lineaire ruimte $C^0(\mathbb{R})$ is $\{-1, 1\}$. De eigenruimte bij de eigenwaarde 1 is de ruimte van alle even continue functies en de eigenruimte bij de eigenwaarde -1 is de ruimte van alle oneven continue functies. Beide eigenruimtes zijn oneindig dimensionaal.*

3. Neem de lineaire ruimte $C^\infty(\mathbb{R})$ van alle willekeurig vaak differentieerbare reële functies op \mathbb{R} en de lineaire operator $D : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ gegeven door $Df = f'$, de afgeleide van de functie f . Om te zien of een reëel getal λ een eigenwaarde van D is moeten we een oplossing, anders dan de nulfunctie, vinden voor de differentiaalvergelijking

$$f' = \lambda f.$$

Het is bekend dat de oplossingen van deze differentiaalvergelijking zijn $ce^{\lambda x}$ met c een reële constante.

Conclusie: *Het spectrum van de lineaire operator D op de lineaire ruimte $C^\infty(\mathbb{R})$ is \mathbb{R} . De eigenruimte bij de eigenwaarde λ is 1-dimensionaal, met $e^{\lambda x}$ als basis.*

4. Neem weer de lineaire ruimte $C^\infty(\mathbb{R})$ van alle willekeurig vaak differentieerbare reële functies op \mathbb{R} en bekijk nu de lineaire operator $D^2 : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ gegeven door $D^2 f = f''$, de tweede afgeleide van de functie f . Om te zien of een reëel getal λ een eigenwaarde van D^2 is moeten we een oplossing, anders dan de nulfunctie, vinden voor de differentiaalvergelijking

$$f'' = \lambda f.$$

Het is bekend dat de oplossingen van deze differentiaalvergelijking zijn

$$\begin{array}{lll} c_1 e^{x\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-x\sqrt{\lambda}} & \text{als} & \lambda > 0 \\ c_1 + c_2 x & \text{als} & \lambda = 0 \\ c_1 \cos(x\sqrt{-\lambda}) + c_2 \sin(x\sqrt{-\lambda}) & \text{als} & \lambda < 0 \end{array}$$

met c_1 en c_2 reële constanten.

Conclusie: *Het spectrum van de lineaire operator D^2 op de lineaire ruimte $C^\infty(\mathbb{R})$ is \mathbb{R} . De eigenruimte bij de eigenwaarde λ is 2-dimensionaal, met basis $\{e^{x\sqrt{\lambda}}, e^{-x\sqrt{\lambda}}\}$ als $\lambda > 0$, respectievelijk $\{1, x\}$ als $\lambda = 0$, respectievelijk $\{\cos(x\sqrt{-\lambda}), \sin(x\sqrt{-\lambda})\}$ als $\lambda < 0$.*

5. Neem nu de lineaire ruimte $C_{\text{even}}^\infty(\mathbb{R})$ van alle even reëelwaardige functies op \mathbb{R} , die willekeurig vaak differentieerbaar zijn. Met de kettingregel kan men gemakkelijk inzien dat de afgeleide van een even functie een oneven functie is en dat de afgeleide van een oneven functie een even functie is. De tweede afgeleide van een even functie is dus weer een even functie. De lineaire operator D^2 uit het voorgaande voorbeeld beeldt dus de deelruimte $C_{\text{even}}^\infty(\mathbb{R})$ binnen zichzelf af; d.w.z. D^2 induceert een lineaire operator

$$D_{\text{even}}^2 : C_{\text{even}}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C_{\text{even}}^\infty(\mathbb{R}).$$

Om te zien of een reëel getal λ een eigenwaarde van D_{even}^2 is moeten we een even functie, anders dan de nulfunctie, vinden die voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$f'' = \lambda f.$$

Gelet op wat over deze differentiaalvergelijking is gezegd in het voorgaande voorbeeld, blijken nu de oplossingen te worden gegeven door

$$\begin{array}{lll} c \cosh(x\sqrt{\lambda}) & \text{als} & \lambda > 0 \\ c & \text{als} & \lambda = 0 \\ c \cos(x\sqrt{-\lambda}) & \text{als} & \lambda < 0 \end{array}$$

met c een reële constante. Hier is $\cosh(x)$ de *cosinus hyperbolicus*:

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Conclusie: *Het spectrum van de lineaire operator D_{even}^2 op de lineaire ruimte $C_{\text{even}}^\infty(\mathbb{R})$ is \mathbb{R} . De eigenruimte bij de eigenwaarde λ is 1-dimensionaal, met basis $\cosh(x\sqrt{\lambda})$ als $\lambda > 0$, respectievelijk 1 als $\lambda = 0$, respectievelijk $\cos(x\sqrt{-\lambda})$ als $\lambda < 0$.*

6. Neem nu, voor een positief reëel getal T , de lineaire ruimte $C_{T\text{-per}}^\infty(\mathbb{R})$ van alle T -periodieke reëelwaardige functies op \mathbb{R} , die willekeurig vaak differentieerbaar zijn. Met de kettingregel kan men gemakkelijk inzien dat de afgeleide van een T -periodieke functie weer een T -periodieke functie is. De lineaire operator D^2 uit voorbeeld 4 hierboven beeldt dus de deelruimte $C_{T\text{-per}}^\infty(\mathbb{R})$ binnen zichzelf af; d.w.z. D^2 induceert een lineaire operator

$$D_{T\text{-per}}^2 : C_{T\text{-per}}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C_{T\text{-per}}^\infty(\mathbb{R}).$$

Om te zien of een reëel getal λ een eigenwaarde van $D_{T\text{-per}}^2$ is moeten we een T -periodieke functie, anders dan de nulfunctie, vinden die voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$f'' = \lambda f.$$

Uit de oplossingen van deze differentiaalvergelijking in voorbeeld 4 moeten we de T -periodieke selecteren:

Het geval $\lambda > 0$: als de functie $c_1 e^{x\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-x\sqrt{\lambda}}$ periodiek is met periode T , dan is voor ieder geheel getal k

$$c_1 e^{kT\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-kT\sqrt{\lambda}} = c_1 + c_2.$$

Als $c_1 \neq 0$ is dan heeft het linkerlid voor $k \rightarrow \infty$ limiet $\pm\infty$ en het rechterlid limiet $c_1 + c_2$. Dat kan niet! Dus moet $c_1 = 0$ zijn. Dan is $c_2 = c_2 e^{-kT\sqrt{\lambda}}$ voor elke $k \in \mathbb{Z}$. Nemen we nu weer de limiet voor $k \rightarrow \infty$ dan blijkt ook $c_2 = 0$ te zijn. We zien: *als $\lambda > 0$ is, dan is de enige T -periodieke oplossing de nulfunctie; en dus is λ geen eigenwaarde van $D_{T\text{-per}}^2$.*

Het geval $\lambda = 0$: als de functie $c_1 + c_2x$ periodiek is met periode T , dan is $c_1 + c_2T = c_1$. Dus is $c_2 = 0$. De functie is constant, gelijk aan c_1 . Alle constante functies zijn, uiteraard, periodiek. We zien: *0 is een eigenwaarde van $D_{T\text{-per}}^2$; de bijbehorende eigenfuncties zijn de constante functies (behalve de nulfunctie).*

Het geval $\lambda < 0$: bekijk de functie $f(x) = c_1 \cos(x\sqrt{-\lambda}) + c_2 \sin(x\sqrt{-\lambda})$ en neem aan dat deze functie T -periodiek is en dat f niet de nulfunctie is. Standaard trigonometrische formules laten zien dat we f ook kunnen schrijven als

$$f(x) = a \cos(\beta + x\sqrt{-\lambda})$$

met $a > 0$, $0 \leq \beta < 2\pi$ en $c_1 = a \cos \beta$, $c_2 = -a \sin \beta$. De functie f neemt z'n maximale waarde a aan precies in de punten $x_k = (2\pi k - \beta)/\sqrt{-\lambda}$ met $k \in \mathbb{Z}$. Vanwege de veronderstelde T -periodiciteit neemt f dan ook de maximale waarde a aan in $x_0 + T$. Er moet dus een geheel getal k zijn zo dat

$$T - \frac{\beta}{\sqrt{-\lambda}} = \frac{(2\pi k - \beta)}{\sqrt{-\lambda}}; \quad \text{oftewel} \quad T = \frac{2\pi k}{\sqrt{-\lambda}}.$$

We zien: *als er geen geheel getal k is zo dat $\sqrt{-\lambda} = \frac{2\pi k}{T}$ dan is λ niet een eigenwaarde van de lineaire operator $D_{T\text{-per}}^2$; als er wel een geheel getal k is zo dat $\sqrt{-\lambda} = \frac{2\pi k}{T}$ dan is λ wel een eigenwaarde van de lineaire operator $D_{T\text{-per}}^2$.*

CONCLUSIE: *Het spectrum van de lineaire operator $D_{T\text{-per}}^2$ op de lineaire ruimte $C_{T\text{-per}}^\infty(\mathbb{R})$ is*

$$\{ -\omega^2 k^2 \mid k \in \mathbb{Z}, k \geq 0 \},$$

met $\omega = \frac{2\pi}{T}$. *De eigenruimte bij de eigenwaarde 0 is 1-dimensionaal en bestaat uit de constante functies. Als $k > 0$ is, heeft de eigenruimte bij de eigenwaarde $-\omega^2 k^2$ dimensie 2. Een basis is $\cos(k\omega x)$ en $\sin(k\omega x)$.*

Opmerking: De operator $D_{T\text{-per}}^2$ wordt gegeven door de dezelfde formule als de operator D^2 uit voorbeeld 4 (namelijk $D_{T\text{-per}}^2 f = D^2 f = f''$). Toch heeft hij een ander spectrum. We moeten in deze kwesties dus nauwkeurig in de gaten houden op welke ruimte de lineaire operator is gedefinieerd; beperking tot een lineaire deelruimte leidt al gauw tot een kleiner spectrum.

Vergelijk voorbeeld 6 ook eens met de behandeling van de warmtevergelijking in Paragraaf 3.1.

De voorwaarde dat de oplossing in een bepaalde lineaire (deel-)ruimte moet liggen is net als een randvoorwaarde!

6 Symmetrische operatoren

6.1 Definitie van symmetrische, van orthogonale, van Hermitese en van unitaire afbeeldingen

- Zij V een lineaire ruimte over \mathbb{R} voorzien van een inproduct $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
 1. Men zegt dat een lineaire afbeelding $\varphi : V \rightarrow V$ een *symmetrische afbeelding* is (t.a.v. het gegeven inproduct) als

$$\langle \varphi(v), w \rangle = \langle v, \varphi(w) \rangle \quad \text{voor alle } v, w \in V. \quad (58)$$

2. Men zegt dat een lineaire afbeelding $\varphi : V \rightarrow V$ een *orthogonale afbeelding* is (t.a.v. het gegeven inproduct) als

$$\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle \quad \text{voor alle } v, w \in V. \quad (59)$$

- Zij V een lineaire ruimte over \mathbb{C} voorzien van een inproduct $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
 1. Men zegt dat een lineaire afbeelding $\varphi : V \rightarrow V$ een *Hermitese afbeelding* is (t.a.v. het gegeven inproduct) als

$$\langle \varphi(v), w \rangle = \langle v, \varphi(w) \rangle \quad \text{voor alle } v, w \in V. \quad (60)$$

2. Men zegt dat een lineaire afbeelding $\varphi : V \rightarrow V$ een *unitaire afbeelding* is (t.a.v. het gegeven inproduct) als

$$\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle \quad \text{voor alle } v, w \in V. \quad (61)$$

- **Opmerking:** De begrippen zijn in de reële en in de complexe situatie dus precies hetzelfde. Alleen de terminologie is verschillend.

Omdat het hier steeds om afbeeldingen gaat van een lineaire ruimte V naar dezelfde lineaire ruimte V spreekt men vaak van *symmetrische, orthogonale, Hermitese of unitaire operatoren*.

6.2 Voorbeelden van symmetrische, orthogonale, Hermitese, unitaire operatoren

1. Neem \mathbb{R}^2 met het standaard inproduct en een lineaire afbeelding $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeven door een matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

De *getransponeerde* (of gespiegelde) van de afbeelding A wordt gegeven door de matrix

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Dan is

$$\begin{aligned} A \text{ symmetrisch} &\Leftrightarrow A^t = A \Leftrightarrow a_{12} = a_{21} \\ A \text{ orthogonaal} &\Leftrightarrow A^t A = I \Leftrightarrow a_{11}^2 + a_{21}^2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ &\text{en } a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \\ &\Leftrightarrow AA^t = I \Leftrightarrow a_{11}^2 + a_{12}^2 = a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ &\text{en } a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0; \end{aligned}$$

hier is I de 2×2 -eenheids matrix: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Neem \mathbb{C}^2 met het standaard inproduct en een lineaire afbeelding $A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ gegeven door een matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

De *geconjugueerd getransponeerde* (of geconjugueerd gespiegelde) van de afbeelding A wordt gegeven door de matrix

$$A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} \end{pmatrix}.$$

Dan is

$$\begin{aligned} A \text{ Hermites} &\Leftrightarrow A^* = A \Leftrightarrow a_{12} = \overline{a_{21}} \text{ en } a_{11}, a_{22} \text{ reëel} \\ A \text{ unitair} &\Leftrightarrow A^* A = I \Leftrightarrow |a_{11}|^2 + |a_{21}|^2 = |a_{12}|^2 + |a_{22}|^2 = 1 \\ &\text{en } a_{11}\overline{a_{12}} + a_{21}\overline{a_{22}} = 0 \\ &\Leftrightarrow AA^* = I \Leftrightarrow |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 = |a_{21}|^2 + |a_{22}|^2 = 1 \\ &\text{en } a_{11}\overline{a_{21}} + a_{12}\overline{a_{22}} = 0 \end{aligned}$$

3. Neem de lineaire ruimte Pol_∞ van alle polynomen en voorzie deze van het inproduct

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx;$$

zie ook Paragraaf 4.9. Bekijk nu de operator D_{Leg} op de ruimte Pol_∞ :

$$(D_{\text{Leg}}f)(x) = (1 - x^2)f''(x) - 2xf'(x).$$

Dit is een symmetrische operator t.a.v. het gegeven inproduct. Om dat in te zien merken we eerst op

$$(D_{\text{Leg}}f)(x) = ((1 - x^2)f'(x))'$$

en vervolgens rekenen we

$$\begin{aligned} \langle D_{\text{Leg}}f, g \rangle &= \int_{-1}^1 ((1 - x^2)f'(x))'g(x)dx \\ & \hspace{20em} \text{(partiële integratie)} \\ &= \left[(1 - x^2)f'(x)g(x) \right]_{x=-1}^{x=1} - \int_{-1}^1 (1 - x^2)f'(x)g'(x)dx \\ &= - \int_{-1}^1 (1 - x^2)f'(x)g'(x)dx \end{aligned}$$

In deze laatste uitdrukking komen f en g symmetrisch voor; d.w.z. er verandert niets wanneer we f en g omwisselen. Dus is

$$\langle D_{\text{Leg}}f, g \rangle = \langle D_{\text{Leg}}g, f \rangle = \langle f, D_{\text{Leg}}g \rangle.$$

Dit bewijst dat D_{Leg} inderdaad een symmetrische operator is t.a.v. het gegeven inproduct.

Voor meer voorbeelden zie de opgaven.

6.3 Voorbeeld: spectrum en eigenfuncties van D_{Leg}

We combineren nu voorbeeld 3 uit Paragraaf 6.2 en het voorbeeld uit Paragraaf 4.9. We zullen zien dat de Legendre polynomen eigenfuncties zijn van de operator

$$D_{\text{Leg}} : \text{Pol}_\infty \longrightarrow \text{Pol}_\infty, \quad (D_{\text{Leg}}f)(x) = (1 - x^2)f''(x) - 2xf'(x).$$

Om te beginnen merken we op dat de lineaire ruimten Pol_{n-1} en Pol_n , bestaande uit de polynomen met graad $< n$ resp. $\leq n$, lineaire deelruimten zijn van Pol_∞ en dat de operator D_{Leg} deze ruimten binnen zichzelf afbeeldt,

$$\begin{aligned} D_{\text{Leg}}(f) \in \text{Pol}_{n-1} & \quad \text{als} \quad f \in \text{Pol}_{n-1}, \\ D_{\text{Leg}}(f) \in \text{Pol}_n & \quad \text{als} \quad f \in \text{Pol}_n, \end{aligned}$$

omdat immers

$$D_{\text{Leg}}(x^j) = j(j-1)x^{j-2} - j(j+1)x^j.$$

Bekijk nu het polynoom $p_n(x)$ dat in Paragraaf 4.9 is geconstrueerd m.b.v. het Gram-Schmidt orthogonalisatie algoritme. Dan is $p_n(x) \in \text{Pol}_n$ en

$$\langle p_n(x), f(x) \rangle = 0 \quad \text{voor alle} \quad f(x) \in \text{Pol}_{n-1}.$$

Omdat D_{Leg} een symmetrische operator is, die Pol_{n-1} binnen zichzelf afbeeldt, is

$$\langle D_{\text{Leg}}p_n(x), f(x) \rangle = \langle p_n(x), D_{\text{Leg}}f(x) \rangle = 0 \quad \text{voor alle} \quad f(x) \in \text{Pol}_{n-1}.$$

Pas nu Formule (48) toe:

$$\begin{aligned} D_{\text{Leg}}p_n(x) &= \frac{\langle D_{\text{Leg}}p_n(x), p_0(x) \rangle}{\langle p_0(x), p_0(x) \rangle} p_0(x) + \dots + \frac{\langle D_{\text{Leg}}p_n(x), p_{n-1}(x) \rangle}{\langle p_{n-1}(x), p_{n-1}(x) \rangle} p_{n-1}(x) + \\ &\quad + \frac{\langle D_{\text{Leg}}p_n(x), p_n(x) \rangle}{\langle p_n(x), p_n(x) \rangle} p_n(x) \\ &= \frac{\langle D_{\text{Leg}}p_n(x), p_n(x) \rangle}{\langle p_n(x), p_n(x) \rangle} p_n(x). \end{aligned}$$

Dit laat zien dat $p_n(x)$ een eigenfunctie is van de operator D_{Leg} , maar geeft nog niet de bijbehorende eigenwaarde.

In Paragraaf 4.9 hebben we $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ en $p_4(x)$ expliciet berekend. Als we daar D_{Leg} op toepassen vinden we voor de respectievelijke eigenwaarden 0 , -2 , -6 , -12 , -20 .

De volgende redenering laat zien dat we voor elke n de eigenwaarde van D_{Leg} bij de eigenfunctie $p_n(x)$ gemakkelijk kunnen bepalen zonder eerst $p_n(x)$ expliciet uit te rekenen. Het gaat om het getal λ_n in

$$D_{\text{Leg}}p_n(x) = \lambda_n p_n(x).$$

Gebruikmakend van

$$\begin{array}{lll}
 D_{\text{Leg}}f(x) \in \text{Pol}_{n-1} & \text{als} & f(x) \in \text{Pol}_{n-1}, \\
 \langle p_n(x), f(x) \rangle = 0 & \text{als} & f(x) \in \text{Pol}_{n-1}, \\
 p_n(x) = x^n + r_n(x) & \text{met} & r_n(x) \in \text{Pol}_{n-1},
 \end{array}$$

rekenen we:

$$\begin{aligned}
 \lambda_n \langle p_n(x), p_n(x) \rangle &= \langle D_{\text{Leg}}p_n(x), p_n(x) \rangle \\
 &= \langle D_{\text{Leg}}(x^n), p_n(x) \rangle + \langle D_{\text{Leg}}r_n(x), p_n(x) \rangle \\
 &= \langle -n(n+1)x^{n-1} + n(n-1)x^{n-2}, p_n(x) \rangle + 0 \\
 &= -n(n+1)\langle p_n(x) - r_n(x), p_n(x) \rangle + 0 + 0 \\
 &= -n(n+1)\langle p_n(x), p_n(x) \rangle + 0 + 0 + 0.
 \end{aligned}$$

Omdat $\langle p_n(x), p_n(x) \rangle \neq 0$ is, volgt hieruit

$$\lambda_n = -n(n+1). \quad (62)$$

CONCLUSIE: *Het spectrum van de operator D_{Leg} op de ruimte Pol_{∞} is*

$$\{-n(n+1) \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}. \quad (63)$$

De eigenruimte bij de eigenwaarde $-n(n+1)$ is 1-dimensionaal en bestaat uit alle veelvouden van het Legendre polynoom $P_n(x)$.

7 Fouriertheorie van T -periodieke functies

7.1 Definitie van de ruimte $C_{T\text{-per}}^{sc}(\mathbb{C})$

T is een positief reëel getal. De lineaire ruimte $C_{T\text{-per}}^{sc}(\mathbb{C})$ bestaat uit functies $f(x)$ op \mathbb{R} die voldoen aan de drie voorwaarden:

- $f(x)$ heeft waarden in \mathbb{C} ;
- $f(x)$ is T -periodiek: $f(x+T) = f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$;
- $f(x)$ is *stuksgewijs continu*.

Daarbij zeggen we dat een T -periodieke functie $f(x)$ *stuksgewijs continu* is als voldaan is aan de twee voorwaarden:

- voor elke $x \in \mathbb{R}$ bestaan de *linkerlimiet* $f(x^-) = \lim_{t \uparrow x} f(t)$ en de *rechterlimiet* $f(x^+) = \lim_{t \downarrow x} f(t)$ als complex getal (dus ∞ is hier niet toegestaan als limiet),
- voor slechts eindig veel punten x met $0 \leq x \leq T$ is $f(x^-) \neq f(x^+)$.

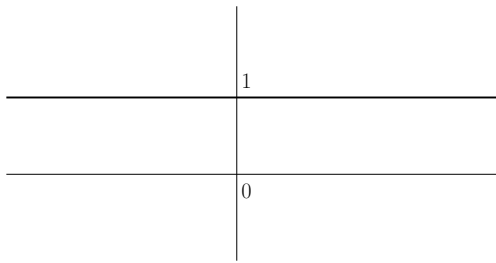
Opmerking: Hoewel men de ruimte van complexwaardige, stuksgewijs continue, T -periodieke functies in alle leerboeken over Fouriertheorie tegenkomt, is er geen standaard notatie voor. $C_{T\text{-per}}^{sc}(\mathbb{C})$ is de notatie die we in dit dictaat zullen gebruiken.

7.2 Voorbeelden van elementen van $C_{T\text{-per}}^{sc}(\mathbb{C})$

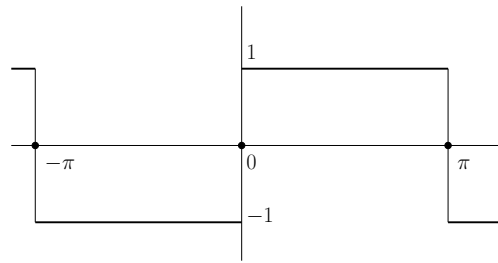
1. Schrijf $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Dan is voor elk geheel getal k de functie $e^{ik\omega x}$ een continue, T -periodieke functie op \mathbb{R} met waarden in \mathbb{C} .

De functies $\sin(k\omega x)$ en $\cos(k\omega x)$ zijn continue, T -periodieke functies op \mathbb{R} met waarden in \mathbb{R} .

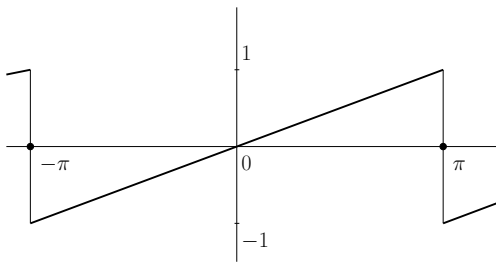
2. Figuur 4 toont een aantal voorbeelden van (stuksgewijs) continue, 2π -periodieke functies op \mathbb{R} met waarden in \mathbb{R} . \diamond



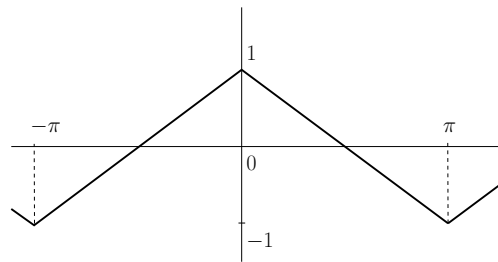
$$f(x) = 1 \quad \text{voor} \quad -\pi \leq x \leq \pi$$



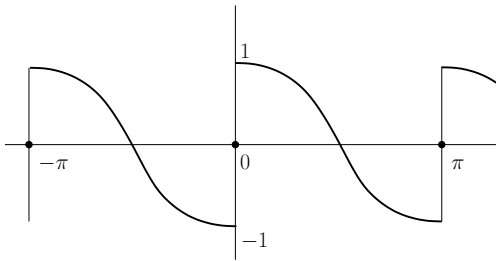
$$f(x) = -1 \quad \text{voor} \quad -\pi < x < 0, \quad f(0) = 0 \\ f(x) = 1 \quad \text{voor} \quad 0 < x < \pi, \quad f(\pi) = 0$$



$$f(x) = x \quad \text{voor} \quad -\pi < x < \pi, \\ f(\pi) = 0$$



$$f(x) = 1 - \frac{2}{\pi}|x| \quad \text{voor} \quad -\pi \leq x \leq \pi$$



$$f(x) = -\cos x \quad \text{voor} \quad -\pi < x < 0, \\ f(x) = \cos x \quad \text{voor} \quad 0 < x < \pi, \\ f(0) = f(\pi) = 0.$$

Figuur 4: Enkele reële (stuksgewijs) continue, 2π -periodieke functies.

7.3 Het inproduct op $C_{T\text{-per}}^{\text{sc}}(\mathbb{C})$

Op $C_{T\text{-per}}^{\text{sc}}(\mathbb{C})$ definiëren we een inproduct door: voor $f(x), g(x) \in C_{T\text{-per}}^{\text{sc}}(\mathbb{C})$ is

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \overline{g(x)} dx. \quad (64)$$

Dit inproduct is duidelijk analoog aan het standaard inproduct op \mathbb{C}^2 beschreven in Voorbeeld 2 in Paragraaf 4.7.

Voor alle gehele getallen k en n , waarbij $k \neq n$ is, is dan

$$\begin{aligned} \langle e^{ik\omega x}, e^{in\omega x} \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(k-n)\omega x} dx \\ &= \frac{1}{i(k-n)\omega T} (e^{i(k-n)\omega T} - 1) \\ &= 0, \end{aligned}$$

want $\omega T = 2\pi$ en $e^{2\pi im} = 1$ voor elk geheel getal m .

Daarnaast hebben we voor elk geheel getal k

$$\langle e^{ik\omega x}, e^{ik\omega x} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T 1 dx = \frac{1}{T} (T - 0) = 1.$$

CONCLUSIE: De functies $e^{ik\omega x}$ met $k \in \mathbb{Z}$ vormen een orthonormaal stelsel in $C_{T\text{-per}}^{\text{sc}}(\mathbb{C})$; d.w.z.

$$\langle e^{ik\omega x}, e^{in\omega x} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{als } k = n \\ 0 & \text{als } k \neq n \end{cases} \quad (65)$$

Opmerkingen:

1. Vanwege de T -periodiciteit kan men voor elk reëel getal a in het rechterlid van (64) als integratieinterval $[a, a+T]$ nemen; immers, wanneer we ter vereenvoudiging van de notaties schrijven $h(x) = f(x) \overline{g(x)}$, dan

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(x) \overline{g(x)} dx &= \int_a^0 h(x) dx + \int_0^T h(x) dx + \int_T^{a+T} h(x) dx \\ &= \int_0^T h(x) dx - \int_0^a h(x) dx + \int_0^a h(x-T) dx \\ &= \int_0^T f(x) \overline{g(x)} dx. \end{aligned}$$

2. Soms kunnen er redenen zijn om te willen werken met reële functies. Dan wordt de fundamentele rol van de complexwaardige functies $e^{ik\omega x}$ met $k \in \mathbb{Z}$ overgenomen door de reële functies 1 (constante functie) en $\sin(k\omega x)$ en $\cos(k\omega x)$ met $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$. De inproducten tussen deze functies zijn: voor alle positieve gehele getallen k en n met $k \neq n$:

$$\begin{aligned}
 \langle 1, 1 \rangle &= 1, \\
 \langle \sin(k\omega x), \sin(k\omega x) \rangle &= \langle \cos(k\omega x), \cos(k\omega x) \rangle = \frac{1}{2}, \\
 \langle 1, \sin(k\omega x) \rangle &= \langle 1, \cos(k\omega x) \rangle = 0, \\
 \langle \sin(k\omega x), \sin(n\omega x) \rangle &= \langle \cos(k\omega x), \cos(n\omega x) \rangle = 0, \\
 \langle \sin(k\omega x), \cos(k\omega x) \rangle &= \langle \sin(k\omega x), \cos(n\omega x) \rangle = 0.
 \end{aligned} \tag{66}$$

7.4 Fouriercoëfficiënten

7.4.1 Definitie van Fouriercoëfficiënten

Voor een functie $f(x) \in C_{T\text{-per}}^{sc}(\mathbb{C})$ en voor een geheel getal k definieert men de k -de Fouriercoëfficiënt van $f(x)$, genoteerd als \hat{f}_k , door

$$\hat{f}_k = \langle f(x), e^{ik\omega x} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-ik\omega x} dx. \tag{67}$$

Opmerking: Zoals hierboven al is opgemerkt geldt ook

$$\hat{f}_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) e^{-ik\omega x} dx. \tag{68}$$

Men zegt dat een functie $f(x)$ een *even functie* is als voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt $f(-x) = f(x)$.

Men zegt dat een functie $f(x)$ een *oneven functie* is als voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt $f(-x) = -f(x)$.

Door de substitutie $x = -y$ in het rechterlid gaat (68) over in

$$\hat{f}_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(-y) e^{-i(-k)\omega y} dy.$$

Hieruit volgt nu onmiddellijk:

$$\begin{aligned} \text{Als } f(x) \text{ een even functie is, dan is } \widehat{f}_{-k} &= \widehat{f}_k \text{ voor elke } k, \\ \text{Als } f(x) \text{ een oneven functie is, dan is } \widehat{f}_{-k} &= -\widehat{f}_k \text{ voor elke } k. \end{aligned} \quad (69)$$

7.4.2 Voorbeelden van Fouriercoëfficiënten

Zie Figuur 4 voor de grafieken van de onderstaande voorbeeldfuncties.

1. Neem voor f de constante functie 1. Dan is

$$\widehat{f}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = 1,$$

en voor $k \neq 0$

$$\widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} dx = \frac{-1}{2\pi ik} [e^{-2\pi ik} - 1] = 0$$

2. De 2π -periodieke functie f gegeven door $f(x) = -1$ voor $-\pi < x < 0$ en $f(x) = 1$ voor $0 < x < \pi$ en $f(0) = f(\pi) = 0$ heeft de Fouriercoëfficiënten:

$$\widehat{f}_0 = \frac{1}{2\pi} \left[-\int_{-\pi}^0 dx + \int_0^{\pi} dx \right] = 0.$$

en voor $k \neq 0$:

$$\begin{aligned} \widehat{f}_k &= \frac{1}{2\pi} \left[-\int_{-\pi}^0 e^{-ikx} dx + \int_0^{\pi} e^{-ikx} dx \right] \\ &= \frac{-1}{2\pi ik} [(-1 + e^{ik\pi}) + (e^{-ik\pi} - 1)] \\ &= \frac{1 - (-1)^k}{\pi ik} = \begin{cases} 0 & \text{als } k \text{ even} \\ \frac{2}{\pi ik} & \text{als } k \text{ oneven} \end{cases} \end{aligned}$$

3. De 2π -periodieke functie f gegeven door $f(x) = x$ voor $-\pi < x < \pi$ en $f(\pi) = 0$ heeft de Fouriercoëfficiënten

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0.$$

en voor $k \neq 0$:

$$\begin{aligned} \hat{f}_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-ikx} dx \\ &= \frac{-1}{2\pi ik} \left[(\pi e^{-ik\pi} + \pi e^{ik\pi}) - \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} dx \right] \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{ik} \end{aligned}$$

4. Neem de 2π -periodieke functie f gegeven door $f(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$ voor $-\pi < x \leq \pi$. Dan is

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \int_{-\pi}^0 x dx - \int_0^{\pi} x dx \right] = 0.$$

en voor $k \neq 0$:

$$\begin{aligned} \hat{f}_k &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} dx + \int_{-\pi}^0 x e^{-ikx} dx - \int_0^{\pi} x e^{-ikx} dx \right] = \\ &= \frac{-1}{2\pi ik} \left[0 + \pi e^{ik\pi} - \int_{-\pi}^0 e^{-ikx} dx - \pi e^{-ik\pi} + \int_0^{\pi} e^{-ikx} dx \right] \\ &= \frac{-1}{2\pi k^2} [-(1 - e^{ik\pi}) + (e^{-ik\pi} - 1)] \\ &= \begin{cases} 0 & \text{als } k \text{ even} \\ \frac{2}{\pi k^2} & \text{als } k \text{ oneven} \end{cases} \end{aligned}$$

5. Neem de π -periodieke functie f , die wordt gedefiniëerd door: $f(0) = 0$ en $f(x) = \cos x$ voor $0 < x < \pi$. Nu is $T = \pi$ en $\omega = 2$. De

Fouriercoëfficiënten zijn: voor elke k

$$\begin{aligned}
 \widehat{f}_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x) e^{-2ikx} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (e^{i(1-2k)x} + e^{i(-1-2k)x}) dx \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{e^{i(1-2k)\pi} - 1}{1-2k} + \frac{e^{i(-1-2k)\pi} - 1}{-1-2k} \right) \\
 &= \frac{1}{\pi i} \left(\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k+1} \right) \\
 &= \frac{4k}{i\pi(4k^2-1)}.
 \end{aligned}$$

7.5 De Fourier inversie formule

Zij f een functie in $C_{T\text{-per}}^{sc}(\mathbb{C})$. Voor een positief geheel getal N schrijven we $C_{T\text{-per}}^{\leq N}(\mathbb{C})$ voor de lineaire deelruimte van $C_{T\text{-per}}^{sc}(\mathbb{C})$ die bestaat uit alle lineaire combinaties van de functies $e^{ik\omega x}$ met $-N \leq k \leq N$. Volgens Formule (48) wordt de projectie van f op de lineaire deelruimte $C_{T\text{-per}}^{\leq N}(\mathbb{C})$ dan gegeven door

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=-N}^N \widehat{f}_k e^{ik\omega x} &= \widehat{f}_{-N} e^{-iN\omega x} + \dots \\
 \dots + \widehat{f}_{-1} e^{-i\omega x} + \widehat{f}_0 + \widehat{f}_1 e^{i\omega x} + \dots + \widehat{f}_N e^{iN\omega x}.
 \end{aligned} \tag{70}$$

Dit is de beste benadering van de functie f door functies uit de ruimte $C_{T\text{-per}}^{\leq N}(\mathbb{C})$. Door N groter te maken, d.w.z. hogere frequenties mee te nemen, wordt de benadering beter. Merk echter op dat we hier de kwaliteit van de benadering afmeten aan (het kwadraat van) de norm

$$\left\| f(x) - \sum_{k=-N}^N \widehat{f}_k e^{ik\omega x} \right\|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \left| f(x) - \sum_{k=-N}^N \widehat{f}_k e^{ik\omega x} \right|^2 dx. \tag{71}$$

Voor individuele punten x hoeft $|f(x) - \sum_{k=-N}^N \widehat{f}_k e^{ik\omega x}|$ niet kleiner te worden als N groter wordt.

De *Fourier inversie formule* (72) en de *formule van Parseval* (73) vertellen wat er precies gebeurt als we $N \rightarrow \infty$ laten gaan, mits de functie f aan een extra voorwaarde voldoet.

Definitie 7.1 We zeggen dat een T -periodieke, stuksgewijs continue functie f *stuksgewijs continu differentieerbaar* is als voldaan is aan de twee voorwaarden:

- er zijn eindig veel punten $0 < x_1 < \dots < x_m < T$ zodat de functie $f(x)$ op elk van de open intervallen $(0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{m-1}, x_m), (x_m, T)$ differentieerbaar is en de afgeleide $f'(x)$ daar continu is
- voor elke $x \in \mathbb{R}$ bestaan voor de afgeleide functie de *linker-* en *rechterlimiet* $f'(x^-) = \lim_{t \uparrow x} f'(t)$ en $f'(x^+) = \lim_{t \downarrow x} f'(t)$ als complex getal.

Stelling 7.2 Zij f een T -periodieke, stuksgewijs continue en stuksgewijs continu differentieerbare functie. Dan bestaat voor elke $x \in \mathbb{R}$ de limiet

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=-N}^N \widehat{f}_k e^{ik\omega x} \right] \text{ en er geldt}$$

$$\frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=-N}^N \widehat{f}_k e^{ik\omega x} \right] \quad (72)$$

Men noemt (72) de (**Fourier inversie formule**). ■

Opmerking. Wanneer de functie f in het punt x continu is, is $f(x^-) = f(x^+) = f(x)$ en heeft het linkerlid van (72) gewoon de waarde $f(x)$. In de voorbeelden in Figuur 4 zijn de functiewaarden in de discontinuïteitspunten al zo gekozen dat ook daar geldt $f(x) = \frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)]$.

Stelling 7.3 Zij f een T -periodieke, stuksgewijs continue en stuksgewijs continu differentieerbare functie. Dan bestaat de limiet $\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=-N}^N |\widehat{f}_k|^2 \right]$

en er geldt

$$\|f\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=-N}^N |\widehat{f}_k|^2 \right] \quad (73)$$

Men noemt (72) de (**formule van Parseval**). ■

Opmerkingen.

1. I.v.m. de zin voorafgaande aan Formule (71) kunnen we nu opmerken dat voor elke N geldt:

$$\begin{aligned} \left\| f(x) - \sum_{k=-N}^N \widehat{f}_k e^{ik\omega x} \right\|^2 &= \|f(x)\|^2 - \left\| \sum_{k=-N}^N \widehat{f}_k e^{ik\omega x} \right\|^2, \\ \left\| \sum_{k=-N}^N \widehat{f}_k e^{ik\omega x} \right\|^2 &= \sum_{k=-N}^N |\widehat{f}_k|^2, \end{aligned}$$

en dat de formule van Parseval dus blijkbaar ook zegt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f(x) - \sum_{k=-N}^N \widehat{f}_k e^{ik\omega x} \right\| = 0.$$

2. Men gebruikt voor $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N$ vaak de verkorte notatie $\sum_{k=-\infty}^{\infty}^*$. Daarmee worden de formules (72) en (73) dan

$$\frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k e^{ik\omega x} \quad (74)$$

$$\|f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}_k|^2 \quad (75)$$

Men noemt het rechterlid van (74) de *Fourierreeks* van de functie f .

7.6 Voorbeelden van Fourier inversie en Parseval

We werken verder met de voorbeelden uit Paragraaf 7.4.2.

1. Neem voor f de constante functie 1. De Fourierreeks heeft voor deze functie maar één term.
2. De Fourierreeks van de 2π -periodieke functie f gegeven door $f(x) = -1$ voor $-\pi < x < 0$ en $f(x) = 1$ voor $0 < x < \pi$ en $f(0) = f(\pi) = 0$ is:

$$\sum_{k=-\infty, k \text{ oneven}}^{\infty} \frac{2}{\pi i k} e^{i k x}.$$

Men kan dit nog iets verder bewerken tot

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=-N, k \text{ oneven}}^N \frac{2}{\pi i k} e^{i k x} \right] &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1, k \text{ oneven}}^N \frac{4}{\pi k} \sin(k x) \right] \\ &= \sum_{k=1, k \text{ oneven}}^{\infty} \frac{4}{\pi k} \sin(k x) \end{aligned}$$

Deze functie voldoet aan de voorwaarden voor de Fourier inversie formule. Wanneer we daarin nemen $x = \frac{\pi}{2}$ vinden we

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1, k \text{ oneven}}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

oftewel (bedenk dat $\sin((2n+1)\frac{\pi}{2}) = (-1)^n$ is):

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} + \dots = \frac{\pi}{4} \quad (\spadesuit)$$

Wanneer we in de Fourier inversie formule $x = \frac{\pi}{3}$ nemen vinden we

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1, k \text{ oneven}}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right).$$

Merk nu op dat

$$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{3}\right) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} & \text{als } n \text{ deelbaar is door } 3 \\ \sin(\pi) = 0 & \text{als } n-1 \text{ deelbaar is door } 3 \\ \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \text{als } n+1 \text{ deelbaar is door } 3 \end{cases}$$

$$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \frac{1}{23} + \frac{1}{25} - \frac{1}{29} + \dots = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

3. De Fourierreeks van de 2π -periodieke functie f gegeven door $f(x) = x$ voor $-\pi < x < \pi$ en $f(\pi) = 0$ is:

$$\sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{ik} e^{ikx}.$$

Net als in het vorige voorbeeld kan dit worden omgeschreven tot een *sinusreeks*:

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx).$$

Als je hier de Fourier inversie formule toepast met $x = \frac{\pi}{2}$ vind je opnieuw (♠) als hierboven.

Het is daarom leuker om hier naar Parseval te kijken. Daarvoor moeten we eerst $\|f\|^2$ berekenen:

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\frac{2}{3}\pi^3}{2\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

Parseval geeft dus

$$\frac{\pi^2}{3} = \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1}}{ik} \right|^2 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

We zien

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. De Fourierreeks van de 2π -periodieke functie f gegeven door $f(x) = \frac{\pi}{2} - |x|$ voor $-\pi < x \leq \pi$ is:

$$\sum_{k=-\infty, k \text{ oneven}}^{\infty} \frac{2}{\pi k^2} e^{ikx}.$$

Net als in de twee voorgaande voorbeelden kan dit worden omgeschreven, maar nu wordt het een *cosinusreeks*:

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1, k \text{ oneven}}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos(kx)$$

Als je hier de Fourier inversie formule toepast met $x = 0$ vind je

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \frac{1}{121} + \frac{1}{169} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Ook Parseval geeft voor deze functie iets aardigs:

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - |x|\right)^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{3\pi} \left(\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)^3 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)^3 \right) = \frac{\pi^2}{12}. \end{aligned}$$

Parseval geeft dus

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{k=-\infty, k \text{ oneven}}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 k^4} = \sum_{k=1, k \text{ oneven}}^{\infty} \frac{8}{\pi^2 k^4},$$

oftewel

$$\sum_{k=1, k \text{ oneven}}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Hiermee volgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \sum_{k=1, k \text{ oneven}}^{\infty} \frac{1}{k^4} + \sum_{k=1, k \text{ even}}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{96} + \frac{1}{16} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$$

en dus (gebruik $\frac{16}{15} \times \frac{1}{96} = \frac{1}{90}$)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

5. De Fourierreeks van de π -periodieke functie f , die wordt gedefiniëerd door: $f(0) = 0$ en $f(x) = \cos x$ voor $0 < x < \pi$, is:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{4k}{i\pi(4k^2 - 1)} e^{2ikx}.$$

Deze Fourierreeks kan worden omgeschreven tot de *sinusreeks*:

$$\frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(4k^2 - 1)} \sin(2kx).$$

Combineren we dit met de Fourier inversie formule, dan vinden

$$\cos(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(4k^2 - 1)} \sin(2kx) \quad \text{voor } 0 < x < \pi.$$

◇

7.7 Fourierreeksen en differentiaalvergelijkingen

7.7.1 Lineaire differentiaalvergelijkingen met constante coëfficiënten

We bekijken nog eens de differentiaalvergelijking (1) uit Paragraaf 1.1:

$$v''(x) + a_1 v'(x) + a_0 v(x) = f(x), \quad (76)$$

maar nu onder de extra aanname dat (hetingangssignaal) $f(x)$ een T -periodieke, stuksgewijs continue en stuksgewijs continu differentieerbare functie is⁴. Laten we voor het gemak ook aannemen dat op elk tijdstip x geldt $f(x) = \frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)]$. Volgens de Fourier inversie formule (74) is dan voor elke $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k e^{ik\omega x}.$$

Zoals uitgelegd is in Paragraaf 1.4 wordt, in het geval dat a_0 en a_1 positieve reële getallen zijn, het uitgangssignaal $v(x)$ gegeven door

$$v(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_k \frac{e^{ik\omega x}}{-k^2\omega^2 + a_1 ik\omega + a_0}. \quad (77)$$

Eigenlijk zijn we in (76) alleen geïnteresseerd vanaf een bepaald begintijdstip, dat we wel $x = 0$ mogen stellen. Dan kunnen we *zonder beperking van de algemeenheid ook aannemen dat $f(x)$ een even functie is*. Volgens (69) is dan $\widehat{f}_{-k} = \widehat{f}_k$ voor alle k . Bovendien is $f(x)$ een reële functie, en zijn ook

⁴We gebruiken hier de variabele x , hoewel hij meestal als tijd kan worden geïnterpreteerd, omdat daarmee de formules precies uitzien als in de hiervoor beschreven Fouriertheorie. Om dezelfde reden schrijven we nu $f(x)$ voor het ingangssignaal.

alle Fouriercoëfficiënten \widehat{f}_k reëel. Dat vereenvoudigt de beschrijving van het uitgangssignaal $v(x)$:

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{\widehat{f}_0}{a_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{f}_k \left[\frac{e^{ik\omega x}}{a_0 - k^2\omega^2 + a_1 ik\omega} + \frac{e^{-ik\omega x}}{a_0 - k^2\omega^2 - a_1 ik\omega} \right] \\ &= \frac{\widehat{f}_0}{a_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\widehat{f}_k}{\sqrt{(a_0 - k^2\omega^2)^2 + a_1^2 k^2\omega^2}} \cos(k\omega x - \varphi_k) \end{aligned}$$

waarbij de hoek φ_k wordt vastgelegd door

$$e^{i\varphi_k} = \cos(\varphi_k) + i \sin(\varphi_k) = \frac{a_0 - k^2\omega^2 + i a_1 k\omega}{\sqrt{(a_0 - k^2\omega^2)^2 + a_1^2 k^2\omega^2}}.$$

7.7.2 De warmtevergelijking

In (27) hebben we een oplossing van de warmtevergelijking (17) gegeven,

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-(\frac{\pi k}{L})^2 at} \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right),$$

uitgaande van een *reeksontwikkeling van de functie $g(x)$ die de temperatuurverdeling in de staaf op tijdstip 0 geeft*:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right) \quad \text{voor alle } 0 \leq x \leq L.$$

Dat leidde tot de vragen:

- Hoe moeten we omgaan met sommen waarbij oneindig veel termen moeten worden opgeteld?
- Aan welke voorwaarden moet de functie $g(x)$ voldoen opdat $g(x)$ inderdaad zo'n lineaire combinatie is van de functies $\sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right)$ met $k \geq 1$?
- Hoe kunnen we de coëfficiënten b_k berekenen?

Om deze vragen te beantwoorden breiden we de functie $g(x)$, die oorspronkelijk alleen is gedefinieerd voor $0 \leq x \leq L$, uit tot een *oneven $2L$ -periodieke functie op heel \mathbb{R}* . Dus nu is $T = 2L$ en $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{L}$. Deze functie op \mathbb{R} noteren we nog steeds als $g(x)$. De Fouriercoëfficiënten van deze functie worden gegeven door

$$\begin{aligned}\widehat{g}_k &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L g(x) e^{-ik\omega x} dx = \frac{1}{2L} \int_0^L (-g(x) e^{ik\omega x} + g(x) e^{-ik\omega x}) dx \\ &= \frac{-i}{L} \int_0^L g(x) \sin(k\omega x) dx.\end{aligned}$$

Duidelijk is $\widehat{g}_{-k} = -\widehat{g}_k$. Het is fysisch (waarschijnlijk) realistisch om aan te nemen dat de functie $g(x)$ differentieerbaar is en dat z'n afgeleide continu is. We kunnen dan de Fourier inversie formule (72) toepassen: voor alle $x \in \mathbb{R}$ is

$$\begin{aligned}g(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N \widehat{g}_k e^{ik\omega x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \widehat{g}_k (e^{ik\omega x} - e^{-ik\omega x}) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N b_k \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right)\end{aligned}$$

met

$$b_k = 2i \widehat{g}_k = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin(k\omega x) dx.$$

Hiermee zijn de hierboven gestelde vragen beantwoord, waarbij we dus blijkbaar de som van oneindig veel termen moeten interpreteren als limiet:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N b_k \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right).$$

8 De Fouriertransformatie

8.1 Intuïtieve inleiding.

De Fourier inversie formule (72) schrijft ‘nette’ T -periodieke functies als lineaire combinaties van basis-functies $e^{ik\omega x}$ met $k \in \mathbb{Z}$ en $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Voor $k \neq 0$ is de functie $e^{ik\omega x}$ zelf ook periodiek met periode $\frac{1}{|k|}T$ en frequentie $\frac{|k|}{T} = |k| \frac{\omega}{2\pi}$. Typisch voor de Fourier inversie formule voor T -periodieke functies is dat de gebruikte basis-functies een frequentie hebben die een *geheel veelvoud is van een vaste frequentie* (in dit geval $\frac{\omega}{2\pi}$). In veel situaties is dat laatste echter een te grote beperking en heeft men functies nodig met willekeurige frequenties. Men gebruikt dan als basis-functies e^{isx} met $s \in \mathbb{R}$. Voor $s \neq 0$ is de functie e^{isx} periodiek met periode $\frac{2\pi}{|s|}$ en frequentie $\frac{|s|}{2\pi}$.

Om een idee te krijgen hoe men voor dat doel de Fourier inversie formule moet aanpassen, zullen we in (72) een *formele limietovergang* $T \rightarrow \infty$ maken. We definiëren $s_k = k\omega$ en $\Delta s_k = s_{k+1} - s_k = \omega$ en kunnen dan \hat{f}_k herschrijven als

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-is_k t} dt \right) \Delta s_k$$

en de Fourier inversie formule (72) als

$$\frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)] = \frac{1}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-is_k t} dt \right) e^{is_k x} \Delta s_k.$$

We nemen hierin nu de limiet voor $T \rightarrow \infty$ en $\Delta s_n = \omega \rightarrow 0$. We moeten de som over k dan interpreteren als een integraal en formeel schrijven

$$\frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)] = \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \hat{f}(s) e^{isx} ds.$$

met

$$\hat{f}(s) = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L f(t) e^{-ist} dt.$$

Als we nu in analogie met de notatie $\sum_{k=-\infty}^{\infty}^*$ schrijven $\int_{-\infty}^{\infty^*} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R$, dan

worden de bovenstaande formules

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty*} \widehat{f}(s) e^{isx} ds, \\ \widehat{f}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty*} f(t) e^{-ist} dt.\end{aligned}$$

We doen verder geen enkele poging om deze intuïtieve limietovergang te rechtvaardigen. In plaats daarvan, zullen we onze aandacht er op richten om (oneigenlijke) integralen zoals die hierboven voor $\widehat{f}(s)$ een echte betekenis te geven.

8.2 Fouriertransformatie: definitie en eigenschappen

8.2.1 Definitie van stuksgewijs continue functie

We zeggen dat een (complexwaardige) functie f op een open interval $(a, b) \subset \mathbb{R}$ – mogelijk met $a = -\infty$ en/of $b = \infty$ – *stuksgewijs continu* is als voldaan is aan de twee voorwaarden:

- voor elke $x \in (a, b)$ bestaan de *linkerlimiet* $f(x^-) = \lim_{t \uparrow x} f(t)$ en de *rechterlimiet* $f(x^+) = \lim_{t \downarrow x} f(t)$ als complex getal (dus ∞ is hier niet toegestaan als limiet),
- voor alle getallen $p, q \in (a, b)$ met $p < q$ zijn er slechts eindig veel punten x met $p \leq x \leq q$ waarvoor $f(x^-) \neq f(x^+)$ is.

8.2.2 Definitie van oneigenlijke integraal

Neem een open interval (a, b) – mogelijk met $a = -\infty$ en/of $b = \infty$ – en daarop een stuksgewijs continue (complexwaardige) functie f . Voor ieder gesloten interval $[p, q] \subset (a, b)$ bestaat dan de integraal $\int_p^q f(x) dx$.

We zeggen dat de *oneigenlijke integraal* $\int_a^b f(t) dt$ *convergeert* (of *bestaat*) als er een getal $c \in (a, b)$ is zodat beide limieten $\lim_{p \downarrow a} \int_p^c f(t) dt$ en $\lim_{q \uparrow b} \int_c^q f(t) dt$ bestaan. Als deze limieten bestaan kennen we aan de oneigenlijke integraal $\int_a^b f(t) dt$ een getalwaarde toe, namelijk

$$\int_a^b f(t) dt := \lim_{p \downarrow a} \int_p^c f(t) dt + \lim_{q \uparrow b} \int_c^q f(t) dt.$$

Opmerking. Men kan gemakkelijk inzien dat dit in feite niet afhangt van de keuze van het getal c .

Voorbeelden.

1. Zij $\lambda = \alpha + i\omega$ een complex getal met $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$ en $\lambda \neq 0$. Dan is voor elke $q > 0$

$$\int_0^q e^{\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}(e^{\lambda q} - 1).$$

Uit $|e^{\lambda q}| = |e^{\alpha q}| |e^{i\omega q}| = e^{\alpha q}$ volgt dat $\lim_{q \rightarrow \infty} e^{\lambda q} = 0$ is als $\alpha < 0$ is en dat $\lim_{q \rightarrow \infty} e^{\lambda q}$ niet bestaat als $\alpha > 0$ is. Deze limiet bestaat ook niet als $\alpha = 0$ is want dan is $e^{\lambda q} = e^{i\omega q}$ is periodiek (maar niet constant) en heeft dus geen limiet.

CONCLUSIE: *De oneigenlijke integraal $\int_0^\infty e^{\lambda t} dt$ convergeert alleen als $\operatorname{Re} \lambda < 0$ is, en in dat geval is*

$$\int_0^\infty e^{\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda}. \tag{78}$$

2. Een van de bekende elementaire afgeleiden is die van de *arctan-functie*:

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Daarmee berekenen we voor $q > 0$:

$$\int_0^q \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(q) - \arctan(1).$$

Omdat

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4} \quad \text{en} \quad \lim_{q \rightarrow \infty} \arctan(q) = \frac{\pi}{2}$$

is, zien we dat de oneigenlijke integraal $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$ convergeert en de waarde $\frac{\pi}{4}$ heeft. Voor de oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx$ kan men op dezelfde manier laten zien dat hij convergeert en de waarde $\frac{\pi}{4}$ heeft.

Samengevoegd levert dit:

De oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$ convergeert en

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}. \tag{79}$$

◇

8.2.3 Definitie van absoluut integreerbare functies.

Voor een functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definieert men de functie $|f| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ door

$$|f|(t) := |f(t)| \quad \text{voor alle } t \in \mathbb{R}.$$

Als f stuksgewijs continu is, is $|f|$ dat ook. Men zegt dan dat de functie f *absoluut integreerbaar* is en dat de oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ *absoluut convergeert* als de oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$ convergeert.

Verder kan men gemakkelijk inzien dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \text{ absoluut convergent} \implies \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \text{ convergent.} \quad (80)$$

In dit geval geldt

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt.$$

8.2.4 Definitie van de Fouriertransformatie

Bij de Fouriertransformatie bestuderen we oneigenlijke integralen van de vorm

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f(t)dt. \quad (81)$$

Daarbij is s een reële variabele en is $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ een complexwaardige functie van een andere reële variabele t . Om aan deze oneigenlijke integraal een betekenis te kunnen geven moet we aannemen dat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ een stuksgewijs continue en absoluut integreerbare functie is, d.w.z. de integraal $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$ moet convergeren. Vanwege

$$|e^{-ist} f(t)| = |f(t)| \quad \text{voor alle } s, t$$

volgt hieruit dan ook voor elke $s \in \mathbb{R}$ de (absolute) convergentie van de integraal in (81).

Bij gegeven functie f is $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f(t)dt$ een functie van s , die men gewoonlijk noteert als $\mathcal{F}f$ of \hat{f} ; dus

$$(\mathcal{F}f)(s) := \hat{f}(s) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f(t)dt. \quad (82)$$

Men noemt \widehat{f} de *Fouriergetransformeerde van* f . Het voorschrift \mathcal{F} dat aan de functie f (van de variabele t) de functie $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ (van de variabele s) toevoegt noemt men de *Fouriertransformatie*.

Opmerking. Bij de definitie van de Fouriertransformatie zijn in de literatuur verschillende normalisaties in gebruik. Zo worden ook de volgende integralen aangeduid als de Fouriergetransformeerde van f

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s t} f(t) dt$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i s t} f(t) dt.$$

Dergelijke verschillende keuzes van normalisatie beïnvloeden de essentiële eigenschappen van de Fouriertransformatie niet, maar kunnen zich in sommige formules manifesteren d.m.v. factoren 2π of $\sqrt{2\pi}$. Wanneer men op dit verschijnsel bedacht is en bij het raadplegen van een boek even opzoekt welke normalisatie wordt gebruikt, zal men er weinig last van hebben.

8.2.5 Voorbeelden van Fouriergetransformeerden

1. Zij $\mu = \alpha + i\beta$ een complex getal met reëel deel $\alpha < 0$. Bekijk daarbij de functie f_μ gegeven door

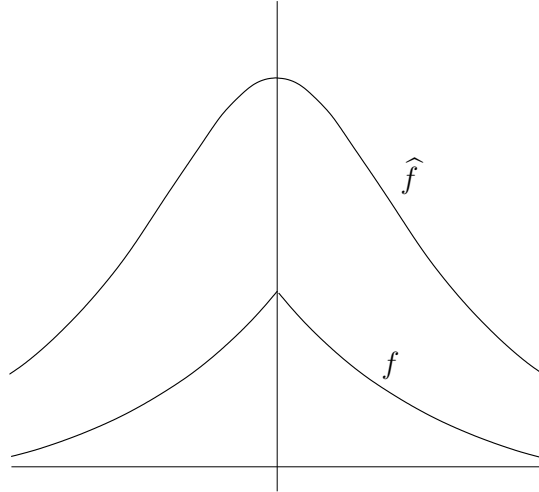
$$f_\mu(t) = \begin{cases} 0 & \text{als } t < 0, \\ e^{\mu t} & \text{als } t \geq 0. \end{cases}$$

Dan is (met formule (78))

$$(\mathcal{F}f_\mu)(s) = \int_0^{\infty} e^{(\mu - is)t} dt = \frac{1}{is - \mu}. \quad (83)$$

2. Neem $a > 0$ en beschouw de functie

$$f(t) = e^{-a|t|}$$



Dan is

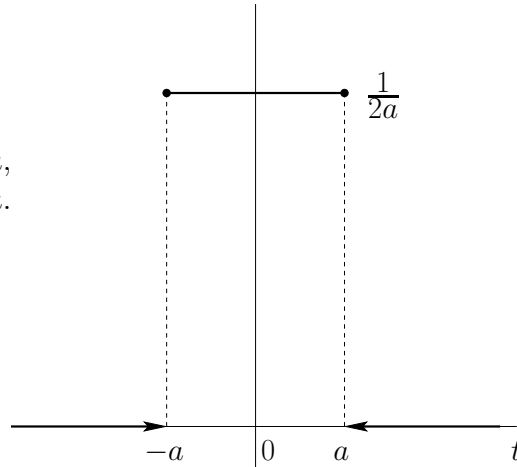
$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist} &= \int_{-\infty}^0 e^{-ist}e^{at} dt + \int_0^{\infty} e^{-ist}e^{-at} dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{(is-a)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(is+a)t} dt \\
 &= \frac{1}{a-is} + \frac{1}{a+is} = \frac{2a}{a^2+s^2}.
 \end{aligned}$$

Dus

$$\widehat{f}(s) = \frac{2a}{a^2+s^2}.$$

3. Definieer voor $a > 0$ de functie f_a door

$$f_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{als } |t| \leq a, \\ 0 & \text{als } |t| > a. \end{cases}$$



f_a is een stuksgewijs continue en absoluut integreerbare functie. We berekenen zijn Fouriergetransformeerde \widehat{f}_a :

$$\widehat{f}_a(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_a(t) dt = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a dt = 1,$$

en voor $s \neq 0$ is

$$\widehat{f}_a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f_a(t) dt = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a e^{-ist} dt = \left[\frac{e^{-ist}}{-2ias} \right]_{t=-a}^{t=a} = \frac{\sin as}{as}.$$

Merk op dat deze \widehat{f}_a een continue functie is; vgl. Stelling 8.1. \diamond

8.2.6 De Fouriertransformatie als lineaire afbeelding

De verzameling van alle stuksgewijs continue en absoluut integreerbare complexwaardige functies op \mathbb{R} is een complexe lineaire ruimte, waarbij de lineaire combinatie $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, voor functies f_1, f_2 en scalaren $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, wordt gedefinieerd door

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(t) := \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) \quad \text{voor alle } t \in \mathbb{R}.$$

De Fouriertransformatie is dan duidelijk een *lineaire transformatie*, d.w.z.:

$$\mathcal{F}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \mathcal{F} f_1 + \lambda_2 \mathcal{F} f_2.$$

Vele malen moeilijker te bewijzen is dat voor een stuksgewijs continue en absoluut integreerbare functie f de Fouriergetransformeerde \widehat{f} een continue functie is van s en dat $\lim_{s \rightarrow \infty} \widehat{f}(s) = 0$ en $\lim_{s \rightarrow -\infty} \widehat{f}(s) = 0$. Maar het is wel waar!

De continue functies (van een variabele s) op \mathbb{R} vormen een complexe lineaire ruimte. De continue functies $g(s)$ waarvoor bovendien $\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = 0$ en $\lim_{s \rightarrow -\infty} g(s) = 0$ is, vormen een lineaire deelruimte daarvan.

We vatten de belangrijkste eigenschappen van de Fouriertransformatie samen in de volgende stelling:

Stelling 8.1 *De Fouriertransformatie is een lineaire afbeelding*

$$\mathcal{F} : \left\{ \begin{array}{l} \text{stuksgewijs continue,} \\ \text{absoluut integreerbare} \\ \text{functies } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{continue functies} \\ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ zodat} \\ \lim_{s \rightarrow \pm\infty} g(s) = 0 \end{array} \right\}$$

$$(\mathcal{F}f)(s) := \widehat{f}(s) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f(t) dt.$$

■

8.2.7 Fouriertransformatie en differentiatie

Wanneer men, na het zien van de definitie $\widehat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f(t) dt$, de functie \widehat{f} naar s wil differentiëren, is de voor de hand liggende gedachte om maar gewoon *de integrand in het rechterlid naar s te differentiëren*. De volgende stelling zegt dat dit inderdaad goed gaat mits voldaan is aan de extra voorwaarde dat de functie $tf(t)$ absoluut integreerbaar is. Het geven van een wiskundig correct bewijs van deze stelling is echter een klus die niet past in het kader van dit college.

Stelling 8.2 *Laat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ een stuksgewijs continue functie zijn zodat de functie $tf(t)$ absoluut integreerbaar is. Dan is ook de functie $f(t)$ absoluut integreerbaar en is zijn Fouriergetransformeerde $\mathcal{F}f$ een differentieerbare functie van s . De afgeleide is:*

$$(\mathcal{F}f)'(s) = -i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} tf(t) dt = -i(\mathcal{F}(tf))(s). \quad (84)$$

■

Vervolgens kan men door herhaalde toepassing van Stelling 8.2 afleiden:

Gevolg 8.3 *Laat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ een stuksgewijs continue functie zijn. Veronderstel dat voor een gegeven positief geheel getal n de functie $t^n f(t)$ absoluut integreerbaar is. Dan is de Fouriergetransformeerde $\mathcal{F}f$ een n keer differentieerbare functie van s . De n -de afgeleide is:*

$$(\mathcal{F}f)^{(n)}(s) = (-i)^n (\mathcal{F}(t^n f))(s). \quad (85)$$

■

Stelling 8.2 gaat over differentiëren nadat de Fouriertransformatie is uitgevoerd. De hierna volgende Stelling 8.4 zegt wat er gebeurt als je eerst differentieert en daarna de Fouriertransformatie toepast.

Stelling 8.4 *Laat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ een absoluut integreerbare en stuksgewijs continu differentieerbare functie zijn, die bovendien continu is en voldoet aan*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0 \quad \text{en} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0.$$

Dan convergeert de oneigenlijke integraal $(\mathcal{F}(f'))(s) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f'(t) dt$ voor elke $s \in \mathbb{R}$ en er geldt

$$(\mathcal{F}(f'))(s) = is(\mathcal{F}f)(s) \tag{86}$$

Bewijs: Voor alle reële getallen q, p met $q < p$ ziet men door partieel integreren

$$\int_q^p e^{-ist} f'(t) dt = e^{-isp} f(p) - e^{-isq} f(q) + is \int_q^p e^{-ist} f(t) dt.$$

Dus

$$\left| \int_q^p e^{-ist} f'(t) dt - is \int_q^p e^{-ist} f(t) dt \right| \leq |f(p)| + |f(q)|.$$

Het gewenste resultaat volgt nu door de limieten voor $p \rightarrow \infty$ en $q \rightarrow -\infty$ te nemen. ■

Opmerking. De voorgaande stelling zegt dat voor elke $s \in \mathbb{R}$ de oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f'(t) dt$ convergeert, maar doet geen uitspraak over het al dan niet absoluut integreerbaar zijn van de afgeleide functie f' !

Door herhaalde toepassing van Stelling 8.4 vindt men het volgende resultaat voor de Fouriergetransformeerde van hogere afgeleiden:

Gevolg 8.5 *Zij r een geheel getal, $r \geq 1$. Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ een r keer stuksgewijs continu differentieerbare functie. Laat bovendien gegeven zijn dat de functies $f, f', \dots, f^{(r-1)}$ allemaal continu en absoluut integreerbaar zijn en dat bovendien $\lim_{t \rightarrow -\infty} f^{(n)}(t) = 0$ en $\lim_{t \rightarrow \infty} f^{(n)}(t) = 0$ voor $n = 0, 1, \dots, r-1$.*

Dan is ook de integraal $(\mathcal{F}f^{(r)})(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f^{(r)}(t) dt$ convergent voor elke $s \in \mathbb{R}$, en er geldt

$$(\mathcal{F}f^{(r)})(s) = (is)^r \mathcal{F}f(s). \quad (87)$$

■

8.2.8 Een belangrijk voorbeeld

Als toepassing van de voorgaande stellingen bepalen we de Fouriergetransformeerde \widehat{f} van de functie $f(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$. De functie f voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$f'(t) = -tf(t) \quad \text{voor alle } t \in \mathbb{R}.$$

De Fouriergetransformeerde van het linkerlid is volgens Stelling 8.4

$$(\mathcal{F}(f'))(s) = is(\mathcal{F}f)(s).$$

De Fouriergetransformeerde van het rechterlid is volgens Stelling 8.2

$$(\mathcal{F}(-tf))(s) = -i(\mathcal{F}f)'(s).$$

De functie $\mathcal{F}f$ voldoet dus blijkbaar aan de differentiaalvergelijking (waarbij wordt gedifferentieerd naar s)

$$(\mathcal{F}f)'(s) = -s(\mathcal{F}f)(s) \quad \text{voor alle } s \in \mathbb{R}.$$

De oplossingen van deze differentiaalvergelijking zijn allemaal van de vorm constante $\times e^{-\frac{1}{2}s^2}$. In het bijzonder is

$$(\mathcal{F}f)(s) = (\mathcal{F}f)(0) \times e^{-\frac{1}{2}s^2}.$$

Omdat het welbekend is dat

$$(\mathcal{F}f)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{2\pi},$$

komen we uiteindelijk tot het resultaat:

$$(\mathcal{F}(e^{-\frac{1}{2}t^2}))(s) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}s^2}. \quad (88)$$

Opmerking. Men zou graag willen zeggen dat de functie $f(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$ een *eigenfunctie van de Fouriertransformatie \mathcal{F}* is met eigenwaarde $\lambda = \sqrt{2\pi}$. Daarbij moet men dan wel bedenken dat in Stelling 8.1 de Fouriertransformatie niet een lineaire afbeelding is van een lineaire ruimte naar dezelfde lineaire ruimte. \diamond

8.3 De Fourierinversie formule

De Fourierinversie formule (89) geeft aan hoe een functie f uit zijn Fourierge-transformeerde \hat{f} kan worden gereconstrueerd, als f tenminste aan bepaalde voorwaarden voldoet. In fysische taal komt de Fourierinversie formule erop neer dat $f(t)$ wordt geschreven als een *continue superpositie* van eenvoudige golven $\hat{f}(s)e^{ist}$, met golflengte $\frac{2\pi}{|s|}$ en amplitude $\hat{f}(s)$.

Stelling 8.6 *Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ een stuksgewijs continu differentieerbare en absoluut integreerbare functie. Dan bestaat voor elke $x \in \mathbb{R}$ de limiet*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \hat{f}(s)e^{ixs} ds \right]$$

en geldt de **Fourier inversie formule**:

$$\frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)] = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \hat{f}(s)e^{ixs} ds \right]. \quad (89)$$

■

Volgens de bovenstaande Stelling 8.6 bestaat $\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \hat{f}(s)e^{ixs} ds \right]$. Omdat in deze limiet een koppeling wordt gemaakt tussen de manier waarop de boven- resp. ondergrens van het integratie-interval naar ∞ resp. $-\infty$ gaan, impliceert de stelling *niet* dat de oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)e^{ixs} ds$ bestaat. *Wanneer we voor een gegeven x op een of andere manier toch weten dat deze oneigenlijke integraal convergeert*, dan is natuurlijk wel voor die x :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)e^{ixs} ds = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \hat{f}(s)e^{ixs} ds \right].$$

Een gevolg hiervan is:

Gevolg 8.7 Als de functie $\widehat{f}(s)$ absoluut integreerbaar is en f is continu op \mathbb{R} , dan convergeert de oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s)e^{ixs} ds$ voor elke $x \in \mathbb{R}$ en neemt de **Fourier inversie formule** de volgende aantrekkelijke gedaante aan:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s)e^{ixs} ds. \quad (90)$$

Bovendien bestaat dan ook de Fouriergetransformeerde $\mathcal{F}\widehat{f}$ van de functie $\widehat{f}(s)$ en geldt

$$(\mathcal{F}\widehat{f})(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s)e^{-ixs} ds = 2\pi f(-x) \quad (91)$$

■

Voorbeeld. Bekijk de functie g , gegeven door $g(s) = \frac{2a}{a^2+s^2}$ met a een positieve reële constante. In Voorbeeld 2 in Paragraaf 8.2.5 hebben we gezien dat dit de Fouriergetransformeerde is van de functie $f(t) = e^{-a|t|}$. Ook weten we dat de functie g absoluut integreerbaar is (vgl. Formule (79)). Gevolg 8.7 leert ons nu dat de Fouriergetransformeerde van g is

$$\widehat{g}(x) = 2\pi e^{-a|x|}.$$

◇

Voorbeeld. Voor een heel algemene serie voorbeelden veronderstellen we, dat de functies f , f' en f'' alledrie continu en absoluut integreerbaar zijn. Stelling 8.1, toegepast op f , impliceert dan dat er een getal C_1 is zodat $|\widehat{f}(s)| < C_1$ voor alle $s \in \mathbb{R}$. Toegepast op f'' laat Stelling 8.1 zien dat er een getal C_2 is zodat $|\widehat{f''}(s)| < C_2$ voor alle $s \in \mathbb{R}$. Dit combineren we met Gevolg 8.5 tot

$$(1+s^2)|\widehat{f}(s)| = |\widehat{f}(s)| + |\widehat{f''}(s)| < C_1 + C_2 \quad \text{voor alle } s \in \mathbb{R}.$$

In Formule (79) hebben we gezien dat de oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+s^2} ds$ convergeert. Omdat $0 \leq |\widehat{f}(s)| < \frac{C_1+C_2}{1+s^2}$ is voor alle $s \in \mathbb{R}$, mag men nu concluderen dat de oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(s)| ds$ convergeert.

Zo vinden we:

Gevolg 8.8 *Als de functies f, f' en f'' alledrie continu en absoluut integreerbaar zijn, dan is de functie $\widehat{f}(s)$ absoluut integreerbaar en gelden de formules (90) en (91). ■*

Laten we de Fourier inversie formule (89) nog eens nader bekijken. Wanneer de functie f continu is in het punt x , dan is het linkerlid gelijk aan $f(x)$. Voor het rechterlid van de Fourierinversie formule (89) geldt

$$\int_{-R}^R \widehat{f}(s) e^{ixs} ds = \int_0^R [\widehat{f}(s) e^{ixs} + \widehat{f}(-s) e^{-ixs}] ds .$$

Dus is het bestaan van de limiet $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \widehat{f}(s) e^{ixs} ds$ equivalent met het gewoon convergeren van de oneigenlijke integraal

$$\int_0^{\infty} [\widehat{f}(s) e^{ixs} + \widehat{f}(-s) e^{-ixs}] ds .$$

De integrand hierin kunnen we schrijven als

$$\widehat{f}(s) e^{ixs} + \widehat{f}(-s) e^{-ixs} = A(s) \cos(xs) + B(s) \sin(xs)$$

waarin

$$\begin{aligned} A(s) &= \widehat{f}(s) + \widehat{f}(-s) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(st) dt, \\ B(s) &= i [\widehat{f}(s) - \widehat{f}(-s)] = 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(st) dt. \end{aligned}$$

We vatten de voorgaande discussie als volgt samen:

Gevolg 8.9 *Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ een stuksgewijs continu differentieerbare en absoluut integreerbare functie. Dan geldt voor iedere punt $x \in \mathbb{R}$ waarin f continu is,*

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (a(s) \cos(xs) + b(s) \sin(xs)) ds \quad (92)$$

met

$$a(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(st) dt, \quad (93)$$

$$b(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(st) dt. \quad (94)$$

Opmerkingen

1. Als f een *even functie* is (d.w.z. $f(-x) = f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$) dan is $b(s) = 0$ voor elke s en in (92) komen geen sinus-termen voor. Een *even functie* f , die ook voldoet aan de voorwaarden van Gevolg 8.9, wordt dus gegeven door een *cosinus-integraal*:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} a(s) \cos(xs) ds \quad (95)$$

met

$$a(s) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos(st) dt.$$

2. Als f een *oneven functie* is (d.w.z. $f(-x) = -f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$), dan is $a(s) = 0$ voor elke s . Dus wordt een *oneven functie* f , die ook voldoet aan de voorwaarden van Gevolg 8.9, gegeven door een *sinus-integraal*:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} b(s) \sin(xs) ds \quad (96)$$

met

$$b(s) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \sin(st) dt.$$

Voorbeelden.

1. Neem de even, continue en stuksgewijs continu differentieerbare functie $f(t) = e^{-a|t|}$ met $a > 0$. Dan geeft de berekening van de integraal (93):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} \cos(st) dt &= 2 \int_0^{\infty} e^{-at} \frac{e^{ist} + e^{-ist}}{2} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(a-is)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+is)t} dt \\ &= \frac{1}{a-is} + \frac{1}{a+is} = \frac{2a}{a^2 + s^2}. \end{aligned}$$

In combinatie met Gevolg 8.9 laat dit zien:

$$e^{-a|x|} = \frac{2a}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(xs)}{a^2 + s^2} ds. \quad (97)$$

Hieruit volgt voor $a > 0$ en $x \geq 0$ de formule

$$\int_0^\infty \frac{\cos(xs)}{a^2 + s^2} ds = \frac{\pi}{2a} e^{-ax}. \quad (98)$$

Voor $x = 0$ en $a = 1$ is dit Formule (79).

Het linkerlid van (97) is op het open interval $(0, \infty)$ een differentieerbare functie. Door in (97) de afgeleide naar x te nemen krijgen we voor $x > 0$:

$$\int_0^\infty \frac{s \sin(xs)}{a^2 + s^2} ds = \frac{\pi}{2} e^{-ax}. \quad (99)$$

Voor $x = 0$ is dit duidelijk onjuist, maar daar is het linkerlid van (97) dan ook niet differentieerbaar!

Zo hebben we de Fourierinversie formule dus gebruikt als een truc om een paar oneigenlijke integralen te berekenen!

2. We beschouwen de functie f gedefinieerd door

$$f(t) = \frac{1}{2} \quad \text{als } |t| \leq 1, \quad f(t) = 0 \quad \text{als } |t| > 1.$$

Deze functie is even, stuksgewijs continu-differentieerbaar en absoluut integreerbaar. In de voorbeelden in Paragraaf 8.2.5 zagen we al dat z'n Fouriergetransformeerde is:

$$\widehat{f}(0) = 1, \quad \widehat{f}(s) = \frac{\sin s}{s} \quad \text{als } s \neq 0;$$

Dus is $a(s) = \frac{1}{2} (\widehat{f}(s) + \widehat{f}(-s)) = \widehat{f}(s)$.

Formule (95) geeft voor alle $x \neq \pm 1$:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin s \cos(xs)}{s} ds$$

Voor $x = 0$ leidt dit tot:

$$\int_0^\infty \frac{\sin s}{s} ds = \frac{\pi}{2}.$$

Nog een oneigenlijke integraal berekend m.b.v. de Fourier inversie formule! ◇

Voor periodieke functies heeft men de *formule van Parseval* (73). Het analogon daarvan voor de Fouriertransformatie is de *formule van Plancherel*:

Stelling 8.10 *Laat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ een stuksgewijs continue functie zijn waarvoor beide oneigenlijke integralen $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ en $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$ convergeren. Dan convergeert ook de oneigenlijke integraal $\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(s)|^2 ds$ en geldt de **formule van Plancherel**:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(s)|^2 ds. \quad (100)$$

■

Opmerking. Het linkerlid in de formule van Plancherel (100) kan worden geïnterpreteerd als de *totale energie* corresponderend met f , terwijl in het rechterlid $|\widehat{f}(s)|^2$ kan worden geïnterpreteerd als de *energiedichtheid* waarmee de frequentie $\frac{s}{2\pi}$ in de Fourierontbinding van f vertegenwoordigd is.

Voorbeeld.

We beschouwen nog een keer de functie f gedefinieerd door

$$f(t) = \frac{1}{2} \quad \text{als } |t| \leq 1, \quad f(t) = 0 \quad \text{als } |t| > 1.$$

Er geldt dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-1}^1 \frac{1}{4} dt = \frac{1}{2}.$$

Eerder zagen we al dat

$$\widehat{f}(0) = 1 \quad \text{en} \quad \widehat{f}(s) = \frac{\sin s}{s} \quad \text{voor } s \neq 0.$$

De formule van Plancherel levert nu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin s}{s} \right)^2 ds = \pi.$$

◇

Opmerking. Een functie f waarvoor $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ convergeert noemt men *absoluut integreerbaar*; een functie f waarvoor $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$ convergeert noemt men *kwadratisch integreerbaar*.

Voorbeeld. In Formule (79) hebben we al gezien dat de functie $(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$ kwadratisch integreerbaar is. Deze functie is echter niet absoluut integreerbaar, zoals we nu zullen aantonen. Inderdaad, uit

$$\int_1^q \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx > \int_1^q \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \ln(q) - \frac{1}{2} \ln(1) = \frac{1}{2} \ln(q)$$

volgt $\lim_{q \rightarrow \infty} \int_1^q \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \infty$, maar dat is geen toegestaan getal! De limiet bestaat dus niet en daarom is de oneigenlijke integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \quad \text{niet convergent,}$$

en is de functie $(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}$ niet absoluut integreerbaar. ◇

8.4 Toepassing van Fouriertransformatie bij lineaire differentiaalvergelijkingen

8.4.1 Oplossing m.b.v. Fourier inversie formule

Zoals besproken in Paragraaf 1.1 worden sommige mechanische en elektrische systemen gemodelleerd met een differentiaalvergelijking

$$v''(t) + a_1 v'(t) + a_0 v(t) = u(t); \quad (101)$$

daarbij is $u(t)$ het *ingangssignaal*, $v(t)$ het *uitgangssignaal* en zijn a_0 en a_1 positieve reële constanten die eigenschappen van het systeem weergeven.

In de paragrafen 1.4 en 7.7.1 hebben we bekeken hoe zo'n systeem reageert op een periodiek ingangssignaal. Nu gaan we bekijken hoe het systeem reageert op een absoluut integreerbaar, stuksgewijs continu ingangssignaal (bijvoorbeeld een ingangssignaal dat slechts gedurende een eindig tijdsinterval niet nul is). Wanneer we aannemen dat we de Fouriertransformatie kunnen toepassen op beide leden van de differentiaalvergelijking (101), dan leert Stelling 8.5 dat de Fouriergetransformeerden \hat{v} en \hat{u} moeten voldoen aan:

$$-s^2 \hat{v}(s) + ia_1 s \hat{v}(s) + a_0 \hat{v}(s) = \hat{u}(s)$$

ofwel

$$\widehat{v}(s) = \frac{1}{-s^2 + isa_1 + a_0} \widehat{u}(s) \quad (102)$$

Omdat a_0 en a_1 positieve reële getallen zijn, is de noemer $\neq 0$ voor alle reële waarden van s .

Formule (102) definieert de functie $\widehat{v}(s)$ in termen van de Fouriergetransformeerde $\widehat{u}(s)$ van het (bekende) ingangssignaal $u(t)$. Wanneer het ingangssignaal u voldoende net is (bijvoorbeeld tweemaal continu differentieerbaar met absoluut integreerbare u, u' en u'') dan kunnen we, geïnspireerd door de Fourier inversie formule (90), een functie $v(t)$ definiëren door:

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{v}(s) e^{ist} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{u}(s) e^{ist}}{-s^2 + ia_1s + a_0} ds. \quad (103)$$

(Merk de analogie met Formule (77) op.)

Deze functie voldoet aan de voorwaarden van Stelling 8.5 en er geldt

$$(\mathcal{F}(v'' + a_1v' + a_0v))(s) = (-s^2 + ia_1s + a_0) \widehat{v}(s) = \widehat{u}(s).$$

De Fourier inversie formule (90) leert dat voldoende nette functies kunnen worden teruggewonnen uit hun Fouriergetransformeerde. Twee functies met gelijke Fouriergetransformeerden moeten daarom gelijk zijn. In het onderhavige geval betekent dat

$$v''(t) + a_1v'(t) + a_0v(t) = u(t).$$

Dit levert één speciale oplossing v van de inhomogene differentiaalvergelijking (101). Elke andere oplossing, zoals het echte uitgangssignaal, is de som $v + f$ van deze speciale oplossing v en een oplossing f van de homogene differentiaalvergelijking: $f'' + a_1f' + a_0f = 0$. Omdat oplossingen van de homogene vergelijking uitdempen kunnen we nu concluderen dat na een (korte) aanloopperiode het uitgangssignaal (vrijwel) gelijk is aan de functie $v(t)$.

Vergelijk de formule (103) met de Fourier inversie formule (90) voor het ingangssignaal

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(s) e^{its} ds.$$

In fysische taal komt dit erop neer dat het ingangssignaal $u(t)$ wordt geschreven als een *continue superpositie* van eenvoudige golven $\widehat{u}(s)e^{ist}$, met golflengte $\frac{2\pi}{s}$ en amplitude $\widehat{u}(s)$.

Wanneer we de noemer in formule (103) schrijven als

$$-s^2 + ia_1s + a_0 = (is - \lambda_1)(is - \lambda_2) = -(s + i\lambda_1)(s + i\lambda_2)$$

met $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0})$, zien we dat

de componenten in het ingangssignaal waarvoor s dicht bij $-i\lambda_1$ of $-i\lambda_2$ ligt worden versterkt, terwijl er sprake is van steeds toenemende verzwakking naarmate s verder van deze karakteristieke getallen af ligt.

8.4.2 Oplossing m.b.v. het convolutieproduct

Beschouw nog een keer de tweede orde lineaire differentiaalvergelijking (101) met $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ en $a_1^2 - 4a_0 \neq 0$. In dit geval is

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

met $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0})$. Bijgevolg is $\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{a_1^2 - 4a_0} \neq 0$ en

$$\frac{1}{P(is)} = \frac{1}{(is - \lambda_1)(is - \lambda_2)} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{1}{is - \lambda_1} - \frac{1}{is - \lambda_2} \right)$$

Volgens (83) is het rechterlid de Fouriergetransformeerde $\widehat{g}(s)$ van de functie

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{als } t < 0, \\ \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) & \text{als } t \geq 0. \end{cases} \quad (104)$$

We zien dat de Fouriergetransformeerde \widehat{v} van het uitgangssignaal het product is van twee Fouriergetransformeerde functies:

$$\widehat{v}(s) = \widehat{g}(s)\widehat{u}(s), \quad (105)$$

waarbij u het ingangssignaal is en g de karakteristieke eigenschappen van het systeem weergeeft. De Fourier inversie formule (90) maakt hier dan van

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(s)\widehat{u}(s)e^{ist} ds.$$

Men kan echter v ook direct uitdrukken in g en u , zonder eerst de Fouriergetransformeerde van u te berekenen en zonder de Fourier inversie formule te gebruiken. Er geldt namelijk:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)u(t-x) dx. \quad (106)$$

De integraal in (106) wordt meestal genoteerd als $g * u(t)$, d.w.z.

$$g * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)u(t-x) dx. \quad (107)$$

Men noemt de functie $g * u$ het *convolutieproduct* van g en u .
We kunnen zo de conclusie formuleren:

Het uitgangssignaal v is het convolutieproduct, $v = g * u$, van het ingangssignaal u en de functie g die de karakteristieke eigenschappen van het systeem weergeeft.

In het geval van de differentiaalvergelijking (101) met $a_1 > 0$, $a_0 > \frac{1}{4}a_1^2$ krijgen we zo de volgende uitdrukking voor de oplossing:

$$v(t) = \frac{2}{\sqrt{4a_0 - a_1^2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}a_1 x} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4a_0 - a_1^2} x\right) u(t-x) dx.$$

Bewijsschets voor de juistheid van (106). Het is voldoende dat we laten zien dat beide leden van vergelijking (106) dezelfde Fouriergetransformeerde hebben; d.w.z. dat $\widehat{g * u} = \widehat{g} \widehat{u}$. Daarvoor maken we de volgende berekening:

$$\begin{aligned} \widehat{g * u}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} (g * u)(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} g(x) e^{-is(t-x)} u(t-x) dx dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} g(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-is(t-x)} u(t-x) dt \right) dx \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} g(x) dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isy} u(y) dy \right) \quad (\text{met } y = t - x) \\ &= \widehat{g}(s) \widehat{u}(s) \end{aligned}$$

■

Opmerking. Teneinde de definitie van het convolutieproduct d.m.v. Formule (106) minder mysterieus te doen lijken kan men kijken naar de coëfficiënten van het product van twee veeltermen. Als je het product $A(x)B(x)$ van

$$\begin{aligned} A(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \\ B(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2, \end{aligned}$$

geduldig uitwerkt vind je:

$$\begin{aligned} A(x)B(x) &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 \\ &\quad + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)x^3 + (a_2b_2 + a_3b_1)x^4 + a_3b_2x^5 \\ &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 \end{aligned}$$

waarbij de coëfficiënten c_n worden gegeven door

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k};$$

hierbij moet worden gesteld: $a_k = 0$ als $k > 3$ en $b_j = 0$ als $j > 2$.

Is de gelijkenis met Formule (106) niet verbluffend?

8.4.3 De warmtevergelijking op \mathbb{R}

We bestuderen nu de warmtevergelijking (met gegeven constante $a > 0$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (108)$$

voor $x \in \mathbb{R}$ en $t \geq 0$ met de beginvoorwaarde

$$u(x, 0) = g(x) \quad \text{voor alle } x \in \mathbb{R}. \quad (109)$$

Hierin is $g(x)$ een gegeven functie die de initiële temperatuurverdeling aangeeft. We nemen aan dat g tweemaal continu differentieerbaar is en dat g , g' en g'' alledrie absoluut integreerbare functies zijn, d.w.z. dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g'(x)| dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g''(x)| dx \quad \text{bestaan.}$$

In dit geval zoeken we een oplossing $u(x, t)$ van (108) die aan (109) voldoet en waarvoor de volgende integralen bestaan voor alle $t \geq 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t)| dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right| dx \quad \text{en} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right| dx. \quad (110)$$

Deze condities spelen de rol van de randvoorwaarden en garanderen dat

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = 0 \quad \text{en} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0 \quad \text{voor alle } t \geq 0.$$

Voorlopig veronderstellen we dat zo'n functie $u(x, t)$ bestaat. Dan leren Gevolg 8.8 en de Fourier inversie formule (90)

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(s, t) e^{isx} ds \quad (111)$$

met

$$\hat{u}(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} u(x, t) dx \quad (112)$$

voor alle $t \geq 0$.

Formule (111) geeft de oplossing als een 'continue lineaire combinatie' (of 'superpositie') is van basisfuncties e^{isx} met coëfficiënten $\hat{u}(s, t)$ die van de tijd t afhangen. Hier fungeert s als een parameter die de basisfuncties aangeeft.

Veronderstel dat we in (112) de afgeleide naar t mogen berekenen door de integrand naar t te differentiëren. Wanneer we dan ook nog gebruiken dat $u(x, t)$ aan de warmtevergelijking (108) voldoet, dan vinden we

$$\frac{\partial \hat{u}(s, t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx = a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx.$$

Door tweemaal partiëel integreren krijgen we:

$$\frac{\partial \hat{u}(s, t)}{\partial t} = (-is)^2 a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} u(x, t) dx$$

oftewel

$$\frac{\partial \hat{u}(s, t)}{\partial t} = -as^2 \hat{u}(s, t). \quad (113)$$

Voor iedere $s \in \mathbb{R}$ is dit een gewone differentiaalvergelijking voor $\hat{u}(s, t)$ (als functie van t) met de oplossing

$$\hat{u}(s, t) = e^{-as^2 t} \hat{u}(s, 0) \quad (114)$$

waarin

$$\hat{u}(s, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-isx} dx = \hat{g}(s). \quad (115)$$

Met de methode die leidde tot Formule (88), kan men vrij eenvoudig laten zien dat de Fouriergetransformeerde van

$$G(x, t) := \frac{1}{\sqrt{4a\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4at}}, \quad (116)$$

beschouwd als functie van de variabele x en met constante $t > 0$, wordt gegeven door

$$\widehat{G}(s, t) = e^{-as^2t}.$$

De functie $G(x, t)$ in (116) noemt men de *warmtekern*. We kunnen Formule (114) nu dus schrijven als:

$$\widehat{u}(s, t) = \widehat{G}(s, t) \widehat{g}(s),$$

een formule die verbluffende gelijkenis vertoont met Formule (105). Hierbij hoort het volgende analogon van Formule (106):

Formule van Poisson:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4a\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4at}} g(\xi) d\xi. \quad (117)$$

Bij onze afleiding van de Formule van Poisson zijn we uitgegaan van een oplossing $u(x, t)$ van de warmtevergelijking, die ook voldoet aan de beginvoorwaarde $u(x, 0) = g(x)$. Omgekeerd kunnen we (117) gebruiken om voor een tweemaal continu differentieerbare functie g met absoluut integreerbare g , g' en g'' een functie van twee variabelen $u(x, t)$ te *definiëren*. Door te differentiëren onder het integraalteken kan men dan bewijzen dat die functie $u(x, t)$ voldoet aan de warmtevergelijking (108). Het controleren dat deze oplossing ook voldoet aan de beginvoorwaarde (109) gaat iets minder recht toe recht aan omdat we in het rechterlid van (117) niet $t = 0$ mogen zetten. In plaats van $t = 0$ in te vullen nemen we in (117) de limiet voor $t \downarrow 0$. Met de nodige technische afschattingen kan men laten zien dat aan de beginvoorwaarde (109) is voldaan, in die zin dat

$$\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = g(x) \quad \text{voor alle } x \in \mathbb{R}.$$

Men kan de Formule van Poisson (117) zien als nog een voorbeeld van het in Paragraaf 8.4.2 geformuleerde principe:

Het uitgangssignaal, in casu $u(x, t)$ op een tijdstip t , is het convolutieproduct, van het ingangssignaal, in casu $g(x)$, en de functie die de karakteristieke eigenschappen van het systeem weergeeft, in casu de warmtekern $G(x, t) := \frac{1}{\sqrt{4a\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4at}}$.

9 De Dirac deltafunctie

9.1 Inleiding tot de Dirac deltafunctie $\delta(x)$

De Dirac deltafunctie $\delta(x)$ is een belangrijk hulpmiddel in de fysica. In natuurkundige teksten wordt $\delta(x)$ wel omschreven als de functie die overal nul is, behalve bij nul, waar zij oneindig is:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x \neq 0, \\ \infty & \text{voor } x = 0, \end{cases} \quad (118)$$

maar wel zo dat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (119)$$

Wiskundigen hebben als kritiek op deze “definitie” dat *een functie een voorschrift hoort te zijn dat aan getallen getallen toevoegt* (getallen in \mathbb{R} , zeg), maar dat ∞ niet kwalificeert als een getal en daarom niet als functiewaarde kan worden gebruikt.

Een manier om aan deze kritiek tegemoet te komen, die ook in veel natuurkundeteksten wordt gebruikt, is de Dirac deltafunctie te introduceren met een *limietovergang*. Bijvoorbeeld, neem $\varepsilon > 0$ en beschouw de stuksgewijs continue functie $\delta_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & \text{voor } |x| \leq \varepsilon, \\ 0 & \text{voor } |x| > \varepsilon. \end{cases} \quad (120)$$

Het is duidelijk dat voor alle $\varepsilon > 0$ geldt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) dx = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx = \frac{1}{2\varepsilon} 2\varepsilon = 1.$$

Dus

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) dx = 1$$

in overeenstemming met (119), terwijl

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{voor } x \neq 0, \\ \infty & \text{voor } x = 0. \end{cases}$$

Natuurkundigen zeggen dat *als $\varepsilon \downarrow 0$, de functie $\delta_\varepsilon(x)$ convergeert naar de deltafunctie $\delta(x)$ en noteren dat als:*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \delta_\varepsilon(x) = \delta(x). \quad (121)$$

Het woord “convergeert” kan men als volgt rechtvaardigen. Voor een continue functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_{\varepsilon}(x) dx = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x) dx = \frac{1}{2\varepsilon} (F(\varepsilon) - F(-\varepsilon))$$

waarbij F een primitieve is van f , d.w.z. $F' = f$. Daaruit volgt

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_{\varepsilon}(x) dx &= \frac{1}{2} \left[\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{F(\varepsilon) - F(0)}{\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{F(-\varepsilon) - F(0)}{-\varepsilon} \right] \\ &= \frac{1}{2} [F'(0) + F'(0)] \\ &= f(0) \end{aligned}$$

Een afbeelding van de verzameling van alle continue functies naar \mathbb{R} is een voorschrift dat aan iedere continue functie een getal toevoegt. Voorbeelden van dit soort afbeeldingen (d.w.z. voorschriften) zijn Φ_0 en Φ_{ε} gegeven door:

$$\begin{aligned} \Phi_0(f) &= f(0) \\ \Phi_{\varepsilon}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_{\varepsilon}(x) dx \end{aligned}$$

Daarmee kunnen we de voorgaande berekening samenvatten als

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \Phi_{\varepsilon}(f) = \Phi_0(f) \quad \text{voor elke continue functie } f. \quad (122)$$

Dat we hier $\Phi_0(f)$ schrijven i.p.v. $f(0)$ is een keuze van notatie. We hadden er ook de notatie $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) dx$ voor kunnen kiezen. Hoewel op het eerste gezicht vreselijk pompeus, is de formule

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0) \quad (123)$$

in de praktijk juist vreselijk handig. Daarmee kan (122) worden herschreven in de uiterst aantrekkelijke vorm:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_{\varepsilon}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) dx \quad (124)$$

voor elke continue functie f .

Wanneer men de notatie in Formule (124) reduceert tot de meest essentiële onderdelen komt men uit op Formule (121).

In de opgaven zullen we nog meer voorbeelden zien van families van functies $\varphi_a(x)$ waarvoor met de bovenstaande interpretatie geldt

$$\lim_{a \downarrow 0} \varphi_a(x) = \delta(x).$$

9.2 Consequenties van $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0)$.

Neem een reëel getal t en een continue functie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Pas nu Formule (123) toe op de functie f die wordt gegeven door $f(x) = g(t - x)$. Het resultaat is

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t - x)\delta(x) dx = g(t). \quad (125)$$

Wanneer we in deze integraal substitueren $x = t - y$ vinden we

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\delta(t - y) dy = g(t). \quad (126)$$

Door $t = 0$ te nemen vinden we dan

$$\delta(-x) = \delta(x) \quad (127)$$

d.w.z. *Dirac's deltafunctie is een even functie.*

Vervolgens kunnen we (126) ook schrijven als

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\delta(y - t) dy = g(t), \quad (128)$$

hetgeen een interpretatie geeft voor de *verschoven deltafunctie* $\delta(y - t)$ als “functie” van de variabele y .

Met de notatie voor het convolutieproduct (107) in gedachten kunnen we Formules (125) en (126) ook schrijven als

$$\delta * g = g \quad \text{en} \quad g * \delta = g \quad \text{voor elke continue functie } g; \quad (129)$$

m.a.w. *Dirac's deltafunctie is voor het convolutieproduct wat de constante functie 1 is voor het gewone product.*

Wanneer we in Formule (123) $f(x) = e^{-isx}$ nemen vinden we

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{-isx} dx = 1 \quad \text{voor elke } s \in \mathbb{R}, \quad (130)$$

een resultaat dat men graag samenvat als

De Fouriergetransformeerde van Dirac's deltafunctie is de constante functie 1.

9.3 Dirac's deltafunctie en differentiaalvergelijkingen

Zoals besproken in paragraaf 1.1 worden sommige mechanische en elektrische systemen gemodelleerd met een differentiaalvergelijking

$$v''(t) + a_1v'(t) + a_0v(t) = u(t);$$

daarbij is $u(t)$ het *ingangssignaal*, $v(t)$ het *uitgangssignaal* en zijn a_0 en a_1 positieve reële constanten die relevante eigenschappen van het systeem weergeven.

Wat gebeurt er als dit systeem slechts op één moment een ingangssignaal krijgt?

Laten we aannemen dat zo'n situatie kan worden gemodelleerd door de vergelijking

$$v''(t) + a_1v'(t) + a_0v(t) = \delta(t) \quad (131)$$

of liever nog, *laten we aannemen dat net als in Paragraaf 8.4.2 het uitgangssignaal wordt gegeven door het convolutieproduct van het ingangssignaal $\delta(t)$ met de functie die karakteristiek is voor het systeem d.w.z.*

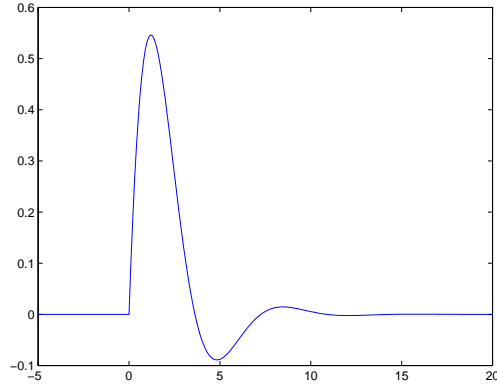
$$v(t) = (\delta * g)(t) = g(t)$$

met als in (104)

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{als } t < 0, \\ \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) & \text{als } t \geq 0. \end{cases}$$

In het geval dat $a_1^2 - 4a_0 < 0$ is, kan dit voor $t \geq 0$ ook worden geschreven als

$$v(t) = \frac{2}{\sqrt{4a_0 - a_1^2}} e^{-\frac{1}{2}a_1 t} \sin\left(\frac{1}{2}t \sqrt{4a_0 - a_1^2}\right)$$



Figuur 5: Grafiek van functie $v(t)$ voor $a_0 = a_1 = 1$.

Deze functie is overal op \mathbb{R} continu, maar is in 0 niet differentieerbaar, omdat $\lim_{h \uparrow 0} \frac{v(h) - v(0)}{h} = 0$ en

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{v(h) - v(0)}{h} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \lim_{h \downarrow 0} \frac{e^{\lambda_1 h} - e^{\lambda_2 h}}{h} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = 1.$$

Wanneer we de functie $v(t)$ willen zien als een oplossing van de differentiaalvergelijking (131) mogen we $v'(t)$ en $v''(t)$ niet interpreteren als de gewone eerste en tweede afgeleiden van een functie. Veeleer ligt het voor de hand dat de sprong ter grootte 1 in de eerste afgeleide bij 0 zich manifesteert als een bijdrage $\delta(t)$ in de tweede afgeleide.

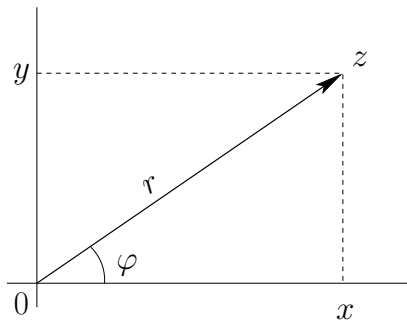
Een verdere uitwerking van de theorie die hier achter zit zou ons voor nu echter te ver voeren.

10 Appendix A: Complexe getallen en complexwaardige functies.

10.1 Complexe getallen

Omdat complexe getallen van onmisbaar belang zijn voor een efficiënte beschrijving van veel wiskundige en natuurkundige theorieën, geven we hier een korte inleiding in complexe getallen.

Een *complex getal* is een vector $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ in het vlak met de Cartesische coördinaten x en y .



Voor een complex getal $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ noemt men x het *reële deel* van z en y het *imaginaire deel* van z ; notatie

$$x = \Re z, \quad y = \Im z.$$

De *complex geconjugeerde* van het complexe getal $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ is het complexe getal

$$\bar{z} := \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

dat het spiegel-beeld is van de vector z t.a.v. de horizontale as. De *absolute waarde* van het complexe getal $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ is zijn lengte

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Uit deze definitie volgt onmiddellijk dat $|z| \geq 0$. Als $r = |z| \neq 0$ and φ de hoek is die de vector $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ met de horizontale as maakt, dan geldt

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

en dus

$$z = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

De hoek φ heet het *argument* van het complexe getal $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; notatie

$$\varphi = \text{Arg } z.$$

Het argument is gedefinieerd alleen voor de complexe getallen $z \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Twee zulke complexe getallen

$$z_1 = \begin{pmatrix} r_1 \cos \varphi_1 \\ r_1 \sin \varphi_1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad z_2 = \begin{pmatrix} r_2 \cos \varphi_2 \\ r_2 \sin \varphi_2 \end{pmatrix}$$

zijn gelijk dan en slechts dan als

$$r_1 = r_2 \quad \text{en} \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k,$$

waarin $k \in \mathbb{Z}$ een geheel getal is; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

De verzameling van alle reële getallen noteert men als \mathbb{R} . De verzameling van alle complexe getallen noteert men als \mathbb{C} .

Optelling en vermenigvuldiging van complexe getallen wordt gedefinieerd door, resp.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \quad (132)$$

en

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{pmatrix}. \quad (133)$$

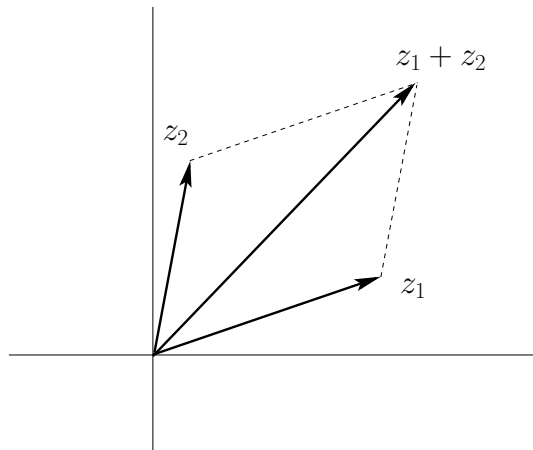
Men kan nagaan dat hiervoor de gebruikelijke rekenregels gelden: voor alle complexe getallen z_1, z_2, z_3 geldt

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_3 &= z_1 + (z_2 + z_3) \\ z_1 + z_2 &= z_2 + z_1 \\ (z_1 z_2) z_3 &= z_1 (z_2 z_3) \\ z_1 z_2 &= z_2 z_1 \\ z_1 (z_2 + z_3) &= z_1 z_2 + z_1 z_3 \end{aligned}$$

Omdat de optelling van complexe getallen (132) de gewone optelling van vectoren op het vlak met de parallelogramregel is, geldt dat

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

(de *driehoeksongelijkheid*).



Reële getallen ziet men als bijzondere complexe getallen: namelijk die waarvan het imaginaire deel 0 is:

$$x = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Voor die getallen geldt inderdaad

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Verder hebben we

$$0 + z = z, \quad 0z = 0, \quad 1z = z.$$

Merk op dat de aftrekking van complexe getallen is gedefinieerd door

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-1)z_2.$$

Het complexe getal met reëel deel 0 en imaginair deel 1 wordt kortweg genoteerd als i :

$$i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Een bijzonder geval van de vermenigvuldigregel (133) is

$$i^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1.$$

Een complex getal z kunnen we nu schrijven als

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = x + iy$$

Omgekeerd kan men de vermenigvuldigregel (133) terugvinden door de bovengenoemde rekenregels te gebruiken in combinatie met $i^2 = -1$.

Ieder complex getal $z \neq 0$ heeft een inverse t.a.v. de vermenigvuldiging: inderdaad, uit $z \neq 0$ volgt $|z| \neq 0$ en verder is

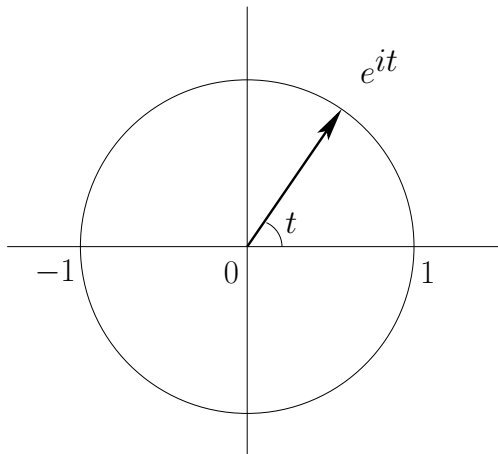
$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2;$$

dus

$$z \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1, \quad \text{oftewel} \quad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Voor een reëel getal t definieert men het complexe getal e^{it} door

$$e^{it} := \cos t + i \sin t. \tag{134}$$



In het bijzonder is

$$e^{i0} = 1, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i.$$

Verder laat definitie (134) meteen zien

$$e^{it} = e^{is} \iff \text{er is een geheel getal } k \in \mathbb{Z} \text{ zodat } s = t + 2\pi k. \quad (135)$$

De complexe getallen die men met definitie (134) krijgt zijn precies de complexe getallen met absolute waarde 1; inderdaad:

$$\begin{aligned} |e^{it}| &= \sqrt{(\cos t)^2 + (\sin t)^2} = 1; \\ \text{als } z &= x + iy \text{ en } |z| = 1, \text{ dan } x^2 + y^2 = 1 \\ \text{en dus is er een } t &\in \mathbb{R} \text{ zo dat } x = \cos t, \quad y = \sin t. \end{aligned}$$

Voor reële getallen s, t is

$$e^{is}e^{it} = e^{i(s+t)}. \quad (136)$$

Deze regel is equivalent met de bekende trigonometrische formules

$$\begin{aligned} \cos(s+t) &= \cos s \cos t - \sin s \sin t \\ \sin(s+t) &= \sin s \cos t + \cos s \sin t. \end{aligned}$$

Uit (136) volgt dat $(e^{it})^n = e^{int}$. Als $r = |z|$ is and $\varphi = \text{Arg } z$, dan geldt

$$z = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

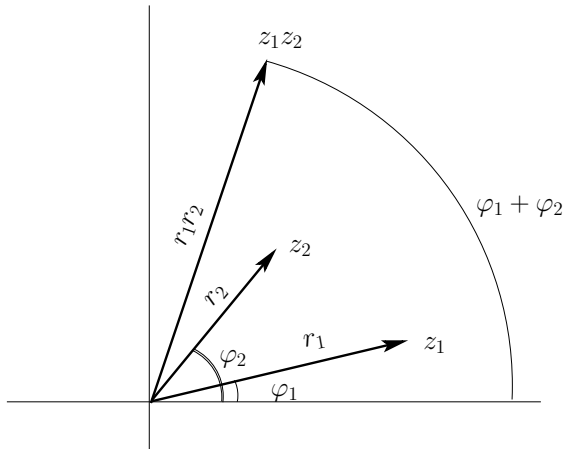
ofwel

$$z = re^{i\varphi}.$$

De regel (136) impliceert ook dat voor twee complexe getallen $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$ en $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$ geldt $z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$, zodat

$$|z_1z_2| = r_1r_2 = |z_1| |z_2|, \quad \text{Arg}(z_1z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2.$$

Uit de laatste formules volgt de eenvoudige meetkundige interpretatie van de vermenigvuldiging van complexe getallen.



Voorbeeld. Wat is $\sqrt[3]{1}$ als we 1 als een complex getal beschouwen? Met andere woorden, wat zijn de oplossingen van de vergelijking $z^3 = 1$ in \mathbb{C} ?

Zoek oplossingen in de vorm $z = re^{i\varphi}$. Dan is de vergelijking equivalent met

$$r^3 e^{3i\varphi} = e^{i0}.$$

Dit impliceert dat $r = 1$ en $3\varphi = 0 + 2\pi k$ met $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Dus

$$\varphi_k = \frac{2\pi k}{3}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

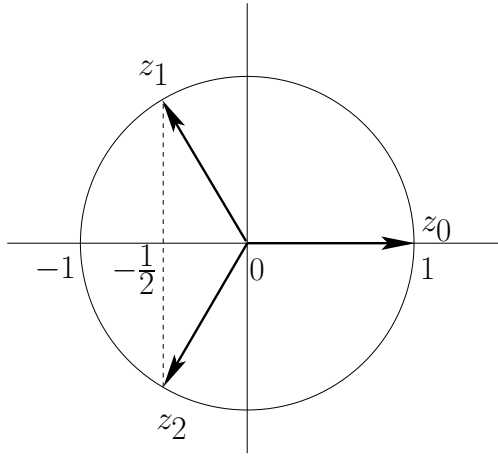
waarvan alleen $k = 0, 1$ en 2 tot verschillende complexe getalen leiden. Dus krijgen we

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = \frac{2\pi}{3}, \quad \varphi_2 = \frac{4\pi}{3},$$

zodat er *drie* complexe oplossingen ontstaan: $z_0 = 1$ en

$$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Merk op dat $z_2 = \bar{z}_1$.

◇

10.2 Functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

Ook het gebruik van functies van een reële variabele die complexe getallen als functiewaarden aannemen, geeft vaak een efficiëntere en natuurlijkere beschrijving dan het gebruik van louter reëelwaardige functies. Om die reden hebben we in deze paragraaf een aantal zaken over dergelijke complexwaardige functies bij elkaar gezet.

Door de functiewaarden te splitsen in reëel en imaginair deel splitst ook de functie f in een reëel deel $\Re f$ en een imaginair deel $\Im f$:

$$\begin{aligned}
 f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C}, & \Re f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & \Im f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, \\
 (\Re f)(t) &:= \Re(f(t)), & (\Im f)(t) &:= \Im(f(t)) & \text{voor alle } t &\in \mathbb{R}, \\
 f &= \Re f + i\Im f, & f(t) &= \Re f(t) + i\Im f(t).
 \end{aligned}$$

Definitie 10.1 De functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heet *continu* als $\Re f$ en $\Im f$ beide continue reëelwaardige functies zijn.

Deze definitie is in overeenstemming met de wat abstractere definitie: De functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heet *continu* in $t \in \mathbb{R}$ als er bij iedere $\epsilon > 0$ een $\delta > 0$ is zodat voor alle h met $|h| < \delta$ geldt

$$|f(t+h) - f(t)| < \epsilon.$$

Inderdaad, geldt voor ieder tweetal complexe getallen $z = x+iy$ en $w = u+iv$, met $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ dat

$$|x - u| \leq |z - w|, \quad |y - v| \leq |z - w| \quad \text{en} \quad |z - w| \leq |x - u| + |y - v|.$$

Dus

$$|f(t+h) - f(t)| \leq |\Re f(t+h) - \Re f(t)| + |\Im f(t+h) - \Im f(t)|$$

en

$$\begin{aligned} |\Re f(t+h) - \Re f(t)| &\leq |f(t+h) - f(t)|, \\ |\Im f(t+h) - \Im f(t)| &\leq |f(t+h) - f(t)|. \end{aligned}$$

Dus is $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continu volgens de abstracte definitie dan en slechts dan als $\Re f$ en $\Im f$ beide continue functies zijn.

Definitie 10.2 Een functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heet *differentieerbaar* als $\Re f$ en $\Im f$ beide differentieerbare reëelwaardige functies zijn. In dat geval definiëren we

$$f'(t) := (\Re f)'(t) + i(\Im f)'(t)$$

en noemen dit de *afgeleide van f in $t \in \mathbb{R}$* .

Als functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ differentieerbaar is in het punt $t \in \mathbb{R}$ dan bestaat de limiet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

en is die gelijk aan $f'(t)$. *Opgave:* Ga dat na.

Voorbeeld. Voor een complex getal $\lambda = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$) definiëren we de functie $e^{\lambda t} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ door

$$e^{\lambda t} := e^{\alpha t} \cos(\beta t) + i e^{\alpha t} \sin(\beta t) \quad \text{voor } t \in \mathbb{R}.$$

De functie $e^{\lambda t}$ is differentieerbaar omdat de functies $e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ en $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ differentieerbaar zijn, en er geldt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{\lambda t} &= [\alpha e^{\alpha t} \cos(\beta t) - \beta e^{\alpha t} \sin(\beta t)] + i [\alpha e^{\alpha t} \sin(\beta t) + \beta e^{\alpha t} \cos(\beta t)] \\ &= (\alpha + i\beta)(e^{\alpha t} \cos(\beta t) + i e^{\alpha t} \sin(\beta t)) \end{aligned}$$

kortom

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$$

◇

Alle gebruikelijke rekenregels voor het differentiëren gelden ook voor functies $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$; we noemen met name de *produktregel*

$$(fg)'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t);$$

het is een goede oefening om deze produktregel voor complex-waardige functies af te leiden uit de produktregel voor reëel-waardige functies en de vermenigvuldigregels voor complexe getallen.

Definitie 10.3 Voor een continue functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ en voor $a, b \in \mathbb{R}$, definiëren we

$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^b (\Re f)(t)dt + i \int_a^b (\Im f)(t)dt.$$

Volgens de bekende theorie voor het differentiëren en integreren van reëel-waardige functies, is voor een continue functie $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_a^b k(t)dt = K(b) - K(a)$$

waarbij $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een differentieerbare functie is met afgeleide $K' = k$. Door dit toe te passen op de functies $\Re f$ en $\Im f$ ziet men dat ook voor een complex-waardige continue functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ geldt

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

met een differentieerbare functie $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ zo dat $F'(t) = f(t)$.

Voorbeeld. Als $\lambda \neq 0$ is, dan is $\int_a^b e^{\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda}(e^{\lambda b} - e^{\lambda a})$. ◇

Uit het voorgaande volgt dat de gebruikelijke formules voor partiële integreren ook gelden voor functies $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$; er geldt namelijk:
Als $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ een continu-differentieerbare functie is zo dat $G' = g$ en als f continu-differentieerbaar is, dan is:

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(b)G(b) - f(a)G(a) - \int_a^b f'(t)G(t)dt;$$

inderdaad

$$f(b)G(b) - f(a)G(a) = \int_a^b (fG)'(t)dt = \int_a^b (f'(t)G(t) + f(t)G'(t))dt$$

Tenslotte, vermelden we dat voor $a \leq b$ de gebruikelijke schatting

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

ook geldt voor een continue complex-waardige functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

11 Opgaven

11.0 Opgaven bij Appendix A

1. Neem $z = 1 + 2i$. Bereken de volgende complexe getallen (schrijf de antwoorden in de vorm $re^{i\varphi}$ en in de vorm $x + iy$)

$$\bar{z}, \quad z^2, \quad 1/z, \quad \bar{z}/z.$$

2. Bereken \sqrt{i} , d.w.z. vind alle complexe getallen z waarvoor $z^2 = i$. Schrijf de antwoorden in de vorm $re^{i\varphi}$ en in de vorm $x + iy$.
3. Teken in het complexe vlak alle getallen $e^{i\varphi}$ met $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.
4. Teken in het complexe vlak alle getallen $2e^{i\varphi}$ met $\frac{1}{2}\pi \leq \varphi \leq \pi$.
5. Teken in het complexe vlak alle getallen $2e^{i\varphi} + \frac{1}{2}e^{3i\varphi}$ met $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

11.1 Opgaven bij Hoofdstuk 1

1. Geef voor elk van de onderstaande differentiaalvergelijkingen de algemene oplossing $y(t)$. Geef ook de speciale oplossing die voldoet aan de ernaast genoemde beginvoorwaarden.

(a) $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

(b) $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

(c) $y'' - 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

2. Geef voor elk van de onderstaande inhomogene differentiaalvergelijkingen de algemene oplossing $y(t)$.

(a) $y'' + 3y' + 2y = \cos t - 3 \sin t$.

(b) $y'' + 3y' + 2y = \cos t + \sin 2t$.

(c) $y'' + 2y' + 3y = \cos 4t$.

(d) $y'' + 2y' + 3y = 4 \cos t + \cos 4t$.

11.2 Opgaven bij Hoofdstuk 2

1. (a) Bepaal voor elk van de onderstaande matrices de eigenwaarden en de eigenvectoren. N.B. hierbij kunnen complexe getallen optreden!

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) Laat zien dat de matrices A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 diagonaliseerbaar zijn.
- (c) Geef voor elk van de matrices A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 de algemene oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\frac{d}{dt}F(t) = AF(t)$$

2. Zij Pol_3 de lineaire ruimte van alle polynomen van graad ≤ 3 met coëfficiënten in \mathbb{R} . Definieer de lineaire afbeelding $D : \text{Pol}_3 \rightarrow \text{Pol}_3$ door: $Df = f'$, de afgeleide van f .

- (a) Geef de matrix van D t.o.v. de basis $\{1, x, x^2, x^3\}$.
Dit betekent: geef de 4×4 -matrix $A = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq 3}$ zodat

$$D(x^j) = a_{0j}x^0 + a_{1j}x^1 + a_{2j}x^2 + a_{3j}x^3 \quad (137)$$

voor $j = 0, 1, 2, 3$.

- (b) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van D m.b.v. de matrix uit het vorige onderdeel.

3. Zij Pol_3 de lineaire ruimte van alle polynomen van graad ≤ 3 met coëfficiënten in \mathbb{R} . Neem de operator van Hermite:

$$(D_{\text{Her}}(f))(x) := f''(x) - 2xf'(x) - f(x)$$

- (a) Laat zien dat als f in Pol_3 zit, dan is ook $D_{\text{Her}}(f) \in \text{Pol}_3$

- (b) Geef de matrix van D_{Her} t.o.v. de basis $\{1, x, x^2, x^3\}$ van Pol_3 ; zie (137).
- (c) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van de lineaire operator D_{Her} op de lineaire ruimte Pol_3 m.b.v. de matrix uit het vorige onderdeel.

4. Zij Pol_3 de lineaire ruimte van alle polynomen van graad ≤ 3 met coëfficiënten in \mathbb{R} . Neem de operator van Legendre:

$$(D_{\text{Leg}}(f))(x) := (1 - x^2)f''(x) - 2xf'(x)$$

- (a) Laat zien dat als f in Pol_3 zit, dan is ook $D_{\text{Leg}}(f) \in \text{Pol}_3$
- (b) Geef de matrix van D_{Leg} t.o.v. de basis $\{1, x, x^2, x^3\}$ van Pol_3 ; zie (137).
- (c) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van de lineaire operator D_{Leg} op de lineaire ruimte Pol_3 m.b.v. de matrix uit het vorige onderdeel.

11.3 Opgaven bij Hoofdstuk 3

De volgende opgaven gaan over het gebruik van de *methode van scheiding van variabelen*.

1. We onderzoeken functies $u(x, t)$ die voldoen aan de partiële differentiaalvergelijking

$$u_{xx} = u_t + u \quad \text{voor } 0 < x < \pi, t > 0 \quad (\Delta 1)$$

en die te schrijven zijn als $u(x, t) = X(x)T(t)$, met $X(x)$ resp. $T(t)$ een voldoende vaak differentieerbare functie van een variabele x resp. t .

- (a) Vertaal de gegeven partiële differentiaalvergelijking in een stel gewone differentiaalvergelijkingen voor de functies $X(x)$ en $T(t)$.
- (b) Geef alle functies $u(x, t)$ van de vorm $u(x, t) = X(x)T(t)$ die voldoen aan de gegeven partiële differentiaalvergelijking $(\Delta 1)$ en die bovendien ook nog voldoen aan de randvoorwaarden

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \text{voor } t > 0.$$

2. We onderzoeken functies $u(x, t)$ die voldoen aan de partiële differentiaalvergelijking

$$u_{xx} = u_{tt} + u \quad \text{voor } 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0. \quad (\Delta 2)$$

- (a) Eerst onderzoeken we oplossingen van $(\Delta 2)$ die te schrijven zijn als $u(x, t) = X(x)T(t)$, waarbij $X(x)$ resp. $T(t)$ een voldoende vaak differentieerbare functie is van één variabele x resp. t .
Vertaal de partiële differentiaalvergelijking $(\Delta 2)$ in een stel gewone differentiaalvergelijkingen voor de functies $X(x)$ en $T(t)$.
- (b) Geef alle functies $u(x, t)$ van de vorm $u(x, t) = X(x)T(t)$ die voldoen aan de partiële differentiaalvergelijking $(\Delta 2)$ en die bovendien ook nog voldoen aan de randvoorwaarden

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \text{voor } t \geq 0.$$

- (c) Geef een oplossing $u(x, t)$ van de partiële differentiaalvergelijking ($\Delta 2$) die voldoet aan de rand- en beginvoorwaarden

$$\begin{aligned} u(0, t) = u(\pi, t) &= 0 && \text{voor } t \geq 0, \\ u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) &= \sin 2x && \text{voor } 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

3. We onderzoeken functies $u(x, t)$ die voldoen aan de partiële differentiaalvergelijking

$$u_{xx} = -u_{tt} + 2u_t - u \quad \text{voor } 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0. \quad (\Delta 3)$$

- (a) Eerst onderzoeken we oplossingen van ($\Delta 3$) die te schrijven zijn als

$u(x, t) = X(x)T(t)$, waarbij $X(x)$ resp. $T(t)$ een voldoende vaak differentieerbare functie is van één variabele x resp. t .

Vertaal de partiële differentiaalvergelijking ($\Delta 3$) in een stel gewone differentiaalvergelijkingen voor de functies $X(x)$ en $T(t)$.

- (b) Geef alle functies $u(x, t)$ van de vorm $u(x, t) = X(x)T(t)$ die voldoen aan de partiële differentiaalvergelijking ($\Delta 3$) en die bovendien ook nog voldoen aan de randvoorwaarden

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \text{voor } t \geq 0.$$

- (c) Geef een oplossing $u(x, t)$ van de partiële differentiaalvergelijking ($\Delta 3$) die voldoet aan de rand- en beginvoorwaarden

$$\begin{aligned} u(0, t) = u(\pi, t) &= 0 && \text{voor } t \geq 0, \\ u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) &= \sin 2x && \text{voor } 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

Waarschuwing: De functie $u(x, t)$ in dit onderdeel heeft niet de bijzondere vorm $X(x)T(t)$.

4. We onderzoeken functies $u(x, y)$ die voldoen aan de partiële differentiaalvergelijking

$$u_{xx} + u_{yy} + 5u = 0 \quad \text{voor } 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi. \quad (\Delta 4)$$

- (a) Eerst onderzoeken we oplossingen van $(\Delta 4)$ die te schrijven zijn als $u(x, y) = X(x)Y(y)$, waarbij $X(x)$ resp. $Y(y)$ een voldoende vaak differentieerbare functie is van één variabele x resp. y .
Vertaal de partiële differentiaalvergelijking $(\Delta 4)$ in een stel gewone differentiaalvergelijkingen voor de functies $X(x)$ en $Y(y)$.
- (b) Geef alle functies $u(x, y)$ van de vorm $u(x, y) = X(x)Y(y)$ die voldoen aan de partiële differentiaalvergelijking $(\Delta 4)$ en die bovendien ook nog voldoen aan de randvoorwaarden

$$\begin{aligned} u(0, y) &= u(\pi, y) = 0 && \text{voor } 0 \leq y \leq \pi, \\ u(x, 0) &= 0 && \text{voor } 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

- (c) Geef alle functies $u(x, y)$ die voldoen aan de partiële differentiaalvergelijking $(\Delta 4)$ en die bovendien ook nog voldoen aan de randvoorwaarden

$$\begin{aligned} u(0, y) &= u(\pi, y) = 0 && \text{voor } 0 \leq y \leq \pi, \\ u(x, 0) &= 0 && \text{voor } 0 \leq x \leq \pi \\ u(x, \pi) &= \sin(3x) && \text{voor } 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

Opmerking: de functies $u(x, y)$ in dit onderdeel *hoeven niet* de vorm $X(x)Y(y)$ te hebben.

11.4 Opgaven bij Hoofdstuk 4

1. Definieer voor $(v_1, v_2), (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle = 2v_1w_1 + 3v_2w_2 - v_1w_2 - v_2w_1.$$

Ga na dat deze formule voldoet aan de eisen voor een inproduct.

2. Neem de lineaire ruimte $C^0([-1, 1])$ van alle continue reëelwaardige functies op het interval $[-1, 1]$. Definieer voor $f, g \in C^0([-1, 1])$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

Ga na dat deze formule voldoet aan de eisen voor een inproduct.

3. Neem de lineaire ruimte $C^0([-1, 1])$ van alle continue reëelwaardige functies op het interval $[-1, 1]$. Definieer voor $f, g \in C^0([-1, 1])$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\sqrt{1-x^2}dx.$$

Ga na dat deze formule voldoet aan de eisen voor een inproduct.

4. Neem de lineaire ruimte Pol_∞ bestaande uit alle polynomen. Definieer voor twee polynomen f en g

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}dx.$$

Laat zien dat deze formule voldoet aan de eisen voor een inproduct.
N.B. Omdat oneigenlijke integralen pas in Hoofdstuk 8 worden behandeld, mag je hier zonder meer aannemen dat de oneigenlijke integraal bestaat.

5. Neem de lineaire ruimte Pol_∞ bestaande uit alle polynomen. Definieer voor twee polynomen f en g

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x} dx.$$

Laat zien dat deze formule voldoet aan de eisen voor een inproduct. N.B. Omdat oneigenlijke integralen pas in Hoofdstuk 8 worden behandeld, mag je hier zonder meer aannemen dat de oneigenlijke integraal bestaat.

6. Neem de lineaire ruimte Pol_3 bestaande uit alle polynomen met graad ≤ 3 . Neem op deze lineaire ruimte het inproduct uit opgave 3 hierboven: voor $f, g \in \text{Pol}_3$

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\sqrt{1-x^2} dx.$$

- (a) Bereken $\langle x^n, x^m \rangle$ voor alle $n, m \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Hint: Ga na dat voor oneven k geldt $\int_{-1}^1 x^k \sqrt{1-x^2} dx = 0$ en dat voor even $k \geq 2$:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^k (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx &= \left[-\frac{1}{3}x^{k-1} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{x=-1}^{x=1} + \\ &\quad + \frac{1}{3}(k-1) \int_{-1}^1 x^{k-2} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{1}{3}(k-1) \int_{-1}^1 (x^{k-2} - x^k) (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx \end{aligned}$$

Dus

$$\int_{-1}^1 x^k (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{k-1}{k+2} \int_{-1}^1 x^{k-2} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

- (b) Voer het Gram-Schmidt orthogonalisatie algoritme uit op de geordende basis $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ van Pol_3 .

7. Neem de lineaire ruimte Pol_3 bestaande uit alle polynomen met graad ≤ 3 met coëfficiënten in \mathbb{R} . Neem op deze ruimte het inproduct uit opgave 5 hierboven: voor $f, g \in \text{Pol}_3$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x} dx$$

- (a) Ga na dat voor alle $n, m \in \{0, 1, 2, 3\}$ geldt

$$\langle x^n, x^m \rangle = (n + m)!$$

Hint: $\int_0^\infty x^k e^{-x} dx = [-x^k e^{-x}]_{x=0}^{x=\infty} + k \int_0^\infty x^{k-1} e^{-x} dx = \dots$

- (b) Voer het Gram-Schmidt orthogonalisatie algoritme uit op de geordende basis $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ van Pol_3 .

De polynomen die men zo krijgt, zijn (op een normaliserende constante factor na) de zogenaamde Laguerre polynomen.

11.5 Opgaven bij Hoofdstukken 5 en 6

1. Zij Pol_∞ de lineaire ruimte van alle polynomen met coëfficiënten in \mathbb{R} .
Neem op deze ruimte het inproduct gegeven door

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x} dx \quad \text{voor } f, g \in \text{Pol}_\infty.$$

Bekijk de operator van *Laguerre*:

$$\begin{aligned} D_{\text{Lag}} : \quad \text{Pol}_\infty &\longrightarrow \text{Pol}_\infty \\ (D_{\text{Lag}}f)(x) &= xf''(x) + (1-x)f'(x) \end{aligned}$$

- Ga na dat $(D_{\text{Lag}}f)(x) = e^x (xe^{-x}f')'(x)$ voor elk polynoom f .
- Laat zien dat D_{Lag} een symmetrische operator is voor het gegeven inproduct.
- Bereken het spectrum van de operator D_{Lag} volgens de methode die in Paragraaf 6.3 leidt tot Formule (63).

2. Zij Pol_∞ de lineaire ruimte van alle polynomen met coëfficiënten in \mathbb{R} .
Neem op deze ruimte het inproduct gegeven door

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^\infty f(x)g(x)e^{-x^2} dx \quad \text{voor } f, g \in \text{Pol}_\infty.$$

Bekijk de operator van *Hermite*:

$$\begin{aligned} D_{\text{Her}} : \quad \text{Pol}_\infty &\longrightarrow \text{Pol}_\infty \\ (D_{\text{Her}}f)(x) &= f''(x) - 2xf'(x) - f(x) \end{aligned}$$

- Ga na dat $(e^{-x^2}f')'(x) = (f''(x) - 2xf'(x))e^{-x^2}$ voor elk polynoom f .
- Laat zien dat D_{Her} een symmetrische operator is voor het gegeven inproduct.
- Bereken het spectrum van de operator D_{Her} volgens de methode die in Paragraaf 6.3 leidt tot Formule (63).

11.7 Opgaven bij Hoofdstuk 7

1. Teken de grafiek van de volgende 2π -periodieke functies en bereken hun Fourierreeks:

$$(a) f(\pi) = \frac{\pi}{2}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } -\pi < x \leq 0 \\ x & \text{als } 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

$$(b) f(0) = f(\pi) = \frac{5}{2}, \quad f(x) = \begin{cases} 2 & \text{als } -\pi < x < 0 \\ 3 & \text{als } 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } -\pi \leq x \leq 0 \\ \sin x & \text{als } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

2. Teken de grafiek van de volgende functies met periode 2 en bereken hun Fourierreeks:

$$(a) f(x) = \sin x \quad \text{als } -1 < x < 1, \quad f(1) = 0.$$

$$(b) f(0) = f(1) = \frac{1}{2}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{als } 0 < x < 1 \end{cases}$$

3. In deze opgaven bekijken we *even* 2π -periodieke functies. Gevraagd wordt om deze functies te schrijven als cosinusreeks.

N.B. de termen *cosinusreeks* en *sinusreeks* worden uitgelegd in de voorbeelden in Paragraaf 7.6.

$$(a) f(x) = \sin x \quad \text{als } 0 \leq x \leq \pi.$$

$$(b) f(x) = x \quad \text{als } 0 \leq x \leq \pi.$$

$$(c) f(x) = \pi - x \quad \text{als } 0 \leq x \leq \pi.$$

4. Zij $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Bepaal de Fourierreeks van de 2π -periodieke functie f gegeven door $f(x) = e^{ax}$ als $-\pi < x < \pi$, $f(\pi) = \frac{1}{2}(e^{-a\pi} + e^{a\pi})$.

Bereken hiermee vervolgens (als in de voorbeelden in Paragraaf 7.6)

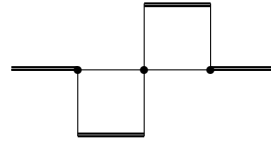
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2}.$$

5. We bekijken de 2π -periodieke functie $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ die wordt gedefinieerd door $F(x) = x^3 - \pi^2 x$ voor $-\pi \leq x \leq \pi$.
- Teken de grafiek van F op het interval $[-3\pi, 3\pi]$ en overtuig je er met deze grafiek van dat F een continue, stuksgewijs continu differentieerbare functie is.
 - Laat zien dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} * c_n e^{inx}$
met $c_0 = 0$ en $c_n = -6i \frac{(-1)^n}{n^3}$ als $n \neq 0$.
 - Laat zien dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt
$$F(x) = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nx).$$
6. We bekijken de 2π -periodieke functie $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ die wordt gedefinieerd door $F(x) = x^2 - \pi^2$ voor $-\pi < x \leq \pi$.
- Teken de grafiek van F op het interval $[-3\pi, 3\pi]$ en overtuig je er met deze grafiek van dat F een continue, stuksgewijs continu differentieerbare functie is.
 - Bereken de coëfficiënten c_n zo dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt
$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} * c_n e^{inx}.$$
 - Bereken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.
7. We bekijken de 2π -periodieke functie $F(x) = |\sin x|$ voor $x \in \mathbb{R}$.
- Teken de grafiek van F op het interval $[-2\pi, 2\pi]$ en overtuig je er met deze grafiek van dat F een continue, stuksgewijs continu differentieerbare functie is.
 - Bereken de coëfficiënten a_n van de cosinusreeks
$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx.$$

11.8 Opgaven bij Hoofdstuk 8

1. Neem de functie $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

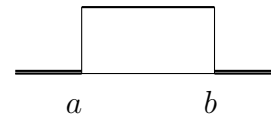
$$v(t) = \begin{cases} -1 & \text{als } -1 < t < 0 \\ 1 & \text{als } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{als } t = 0 \text{ of } |t| \geq 1 \end{cases}$$



Bereken de Fouriergetransformeerde $\mathcal{F}v$.

2. Laat $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Neem de functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

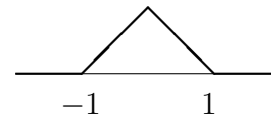
$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{als } a \leq t \leq b; \\ 0 & \text{als } t \notin [a, b]. \end{cases}$$



Bepaal de Fouriergetransformeerde \hat{f} van f .

3. We beschouwen de functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{als } |t| < 1; \\ 0 & \text{als } |t| \geq 1. \end{cases}$$



- (a) Bepaal de Fouriergetransformeerde \hat{f} .
- (b) Laat zien dat de functie f stuksgewijs continu differentieerbaar is en bereken de afgeleide f' .
- (c) Ga na dat Stelling 8.4 het verband verklaart tussen \hat{f} en de Fouriergetransformeerde \hat{v} in de vorige opgave.
4. Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een stuksgewijs continue en absoluut integreerbare functie. Definieer daarbij de functie g door $g(t) = \overline{f(t)}$. Laat zien dat de Fouriergetransformeerde \hat{g} wordt gegeven door

$$\hat{g}(s) = \overline{\hat{f}(-s)}.$$

5. Laat zien dat voor elke $a \neq 0$ de oneigenlijke integraal

$$\int_1^{\infty} t^{-1} e^{-iat} dt$$

convergeert. *Hint:* Gebruik partiële integratie voor $\int_1^q t^{-1} e^{-iat} dt$.

6. Neem de functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ voor $t \neq 0$ en $f(0) = 1$.

- (a) Schets de grafiek van de functie f .
- (b) Ga na dat f een continue functie is.
- (c) Laat zien dat de integraal $\int_1^{\infty} e^{-ist} f(t) dt$ convergeert voor elke $s \in \mathbb{R}$ met $s \neq \pm 1$. *Hint:* Gebruik $\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$ en de vorige opgave.
- (d) Laat zien dat de integraal $\int_1^{\infty} e^{-ist} f(t) dt$ niet convergeert voor $s = 1$ en voor $s = -1$.
- (e) Waarom volgt uit het vorige onderdeel dat de functie f *niet* absoluut integreerbaar is?

7. Zij $a > 0$. We beschouwen de functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{als } t \geq 0 \\ 0 & \text{als } t < 0 \end{cases}$$

- (a) Bepaal \widehat{f} .
- (b) Bewijs met behulp van de inversie formules voor $f(c)$ en $f(-c)$ dat voor $c > 0$ geldt:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos cs}{a^2 + s^2} ds = \frac{\pi}{2a} e^{-ac} \quad \text{en} \quad \int_0^{\infty} \frac{s \sin cs}{a^2 + s^2} ds = \frac{\pi}{2} e^{-ac}$$

(de *integralen van Laplace*).

8. Laat n een geheel getal zijn met $n \geq 0$. We beschouwen de functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door:

$$f(x) = \begin{cases} x^n e^{-x} & \text{als } x \geq 0 \\ 0 & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

- (a) Bepaal \widehat{f} .
(b) Bereken met behulp van de formule van Plancherel de integraal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

9. Bewijs dat de warmte kern $G(x, t)$ gegeven door Formule (116) een oplossing is van de warmtevergelijking (108).

11.9 Opgaven bij Hoofdstuk 9

1. De *stapfunctie van Heaviside* $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wordt gedefinieerd door

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0, \\ 1 & \text{als } x \geq 0. \end{cases}$$

Laat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een continue functie zijn en zij F een primitieve van f , d.w.z. $F'(x) = f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

- (a) Ga na dat voor elke $a > 0$ geldt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{H(x+a) - H(x)}{a} dx = \frac{F(0) - F(-a)}{a}.$$

- (b) Ga na dat

$$\lim_{a \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{H(x+a) - H(x)}{a} dx = f(0).$$

- (c) Geef, met het voorgaande en de tekst bij Formule (124) in het achterhoofd, een betekenis aan de formule

$$\delta(x) = \lim_{a \downarrow 0} \frac{H(x+a) - H(x)}{a}.$$

Een aansprekende interpretatie van deze formule is, dat Dirac's δ -functie de afgeleide in 0 is van de Heaviside functie.

2. Definieer voor $a > 0$ de functie φ_a door

$$\varphi_a(x) = \frac{a - |x|}{a^2} \quad \text{als } |x| \leq a, \quad \varphi_a(x) = 0 \quad \text{als } |x| > a.$$

Laat $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een continu differentieerbare functie zijn en zij F een tweemaal differentieerbare functie op \mathbb{R} zodat $F''(x) = f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

- (a) Bereken $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_a(x) dx$ en schrijf de uitkomst in termen van $F(a)$, $F(-a)$, $F(0)$.

(b) Ga na dat

$$\lim_{a \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi_a(x) dx = f(0).$$

(c) Geef, met het voorgaande en de tekst bij Formule (124) in het achterhoofd, een betekenis aan de formule

$$\delta(x) = \lim_{a \downarrow 0} \varphi_a(x)$$

3. Laat zien dat de hieronder beschreven functies $\varphi_a(x)$ allemaal de volgende drie eigenschappen hebben:

$$\begin{aligned} \lim_{a \downarrow 0} \varphi_a(x) &= 0 && \text{voor elke } x \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_a(x) dx &= 1 && \text{voor elke } a > 0 \\ \lim_{a \downarrow 0} \widehat{\varphi}_a(s) &= 1 && \text{voor elke } s \in \mathbb{R}; \end{aligned}$$

hier is $\widehat{\varphi}_a$ de Fouriergetransformeerde van φ_a .

(a) $\varphi_a(x) := \frac{H(x+a) - H(x)}{a}$ met H als in opgave 1.

(b) $\varphi_a(x) := \frac{a - |x|}{a^2}$ als $|x| \leq a$, $\varphi_a(x) = 0$ als $|x| > a$.

(c) $\varphi_a(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{x^2}{a}}$ (zie: Formule (88).)

(d) $\varphi_a(x) := \frac{a\pi^{-1}}{x^2 + a^2}$ (zie: voorbeeld bij Gevolg 8.7.)

4. Vind een (gegeneraliseerde) oplossing van de differentiaalvergelijking

$$v''(t) + v'(t) + v(t) = \delta(t) + \delta(t-1),$$

door net als in paragraaf 9.3 de functie $v(t)$ te berekenen als het convolutie product van het rechterlid met de functie die karakteristiek is voor het systeem.