

Logica voor Alfa's en Informatici

Antwoorden

Jan van Eijck, Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI), Amsterdam,
Elias Thijsse, Faculteit Humanistiek, Universiteit Tilburg
Gerard Vreeswijk, Departement Informatica, Universiteit Utrecht

November 2013

Het volgende is meer een afspraak met jezelf dan met ons. We verplichten je tot niets.

Afspraak

Altijd zal ik opgaven eerst zelf proberen, voordat ik bij de antwoorden kijk.

Als ik meteen bij de antwoorden kijk ben ik een slappeling die niets probeert, en daardoor niets leert.

Door eerst opgaven zelf te proberen word ik sterk. Ik leer door te proberen en daardoor onthoud ik meer.

Ons tekstverwerkingsprogramma $\text{\LaTeX}$ refereert naar items binnen opgaven met alleen het itemnummer, zonder dat dit voorafgegaan wordt door het eigenlijke opgavenummer. Op deze manier zijn antwoorden lastig te vinden. Helaas is het ons niet gelukt dit te repareren.

Bij het zoeken naar antwoorden raden wij aan eerst het juiste bladzijdenummer te vinden, en dan het juiste itemnummer.

Antwoorden

Blz. 5, it. 1.1: Uitspraken in even rijen en in de kolom uiterst rechts zijn waar. De andere uitspraken zijn onwaar.

Blz. 5, it. 1.2: Dit is geen goed idee om twee redenen. Ten eerste steunen deze definities op intuïtie. Intuïtief weet iemand hoe de reeks $1, 2, 3, \dots$ moet worden voortgezet, en is er weinig gevaar voor misverstand. Maar definities mogen niet zijn gebaseerd op intuïtie en een aanname van een gemeenschappelijk getalsbegrip. Ten tweede is er dan nog het probleem hoe we $\mathbb{Q}$, of nog erger, $\mathbb{R}$ zouden moeten noteren.

Blz. 5, it. 1.3: Normaal geldt $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$ en heeft het gebruik van een extra symbool dus niet zo veel nut. In de berekenbaarheidstheorie behoort 0 tot $\mathbb{N}$ en geldt dus dat $\mathbb{Z}^+ \neq \mathbb{N}$.

Blz. 6, it. 1.4: Te bewijzen $|x| \geq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Zij $x \in \mathbb{R}$ willekeurig. Er zijn twee mogelijkheden: $x \geq 0$ of $x < 0$.

1. Als $x \geq 0$, dan per definitie $|x| = x$. Dus ook $|x| \geq 0$.

2. Als $x < 0$, dan per definitie $|x| = -x$. Dus ook $-|x| = x$. Dus $-|x| < 0$. Dus $|x| > 0$. Dus zeker $|x| \geq 0$. Dat laatste stapje is zeer belangrijk. Zie je wat daar gebeurt?

Het gevraagde is nu bewezen voor alle mogelijke waarden $x \in \mathbb{R}$.

Blz. 7, it. 1.5: We moeten laten zien dat $-x + y \geq x + y$, als we weten dat $x < 0$, $y > 0$ en $x + y > 0$. Welnu, aan beide kanten y aftrekken en x optellen en tenslotte delen door twee geeft $0 \geq x$, wat waar is.

Dus de ongelijkheid $-x + y \geq x + y$ klopt, als we weten dat $x < 0$, $y > 0$ en $x + y > 0$. Dus de ongelijkheid $|x| + |y| \geq |x + y|$ klopt in geval $x < 0$, $y > 0$ en $x + y > 0$.

Blz. 7, it. 1: Te bewijzen:

$$-v \leq u \leq v \text{ als en alleen als } |u| \leq v. \quad (1)$$

Merk eerst op dat voor zowel de linker- als rechterkant v niet negatief kan zijn: voor de linkerkant niet, omdat u dan tussen een positief en negatief getal in zou zitten wat (in die volgorde) onmogelijk is, en aan de rechterkant omdat absolute waardes nooit negatief zijn.

We onderscheiden twee gevallen: $u \geq 0$ en $u < 0$. Als $u \geq 0$ dan $|u| = u$ en staat aan de rechterkant $u \leq v$. Merk op dat de linker- en rechterkant daarmee beiden waar of onwaar zijn.

Als $u < 0$ geldt $|u| = -u$ en staat aan de rechterkant $-u \leq v$, oftewel $-v \leq u$. Weer geldt dat de linker- en rechterkant daarmee beiden waar of onwaar zijn.

Merk op dat beide gevallen gebruik maken van het feit dat v niet negatief is.

Blz. 7, it. 2: Zij x en y willekeurig. Er geldt uiteraard $|x| \leq |x|$. Vanwege (1) geldt dus

$$-|x| \leq x \leq |x|. \quad (2)$$

Evenzo

$$-|y| \leq y \leq |y|. \quad (3)$$

Vergelijkingen (2) en (3) optellen geeft

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|. \quad (4)$$

Identiteit (1) terug toepassen op (4) geeft

$$|x + y| \leq |x| + |y|. \quad (5)$$

Omdat $|x| + |y| \geq 0$ geldt $|x| + |y| = |x| + |y|$. Dus

$$|x + y| \leq |x| + |y|. \quad (6)$$

Blz. 7, it. 1: Ledigerwijs waar.

Blz. 7, it. 2: Ledigerwijs waar.

Blz. 7, it. 3: $A = \{\pm\sqrt{2}\}$ en niet waar

Blz. 7, it. 4: Ledigerwijs waar

Blz. 7, it. 5: Niet waar. (Neem bijvoorbeeld $(x, y, z) = (6, 8, 10)$.)

Blz. 7, it. 6: Ledigerwijs waar.

Blz. 7, it. 1: Dit is een implicatie. Door de bank genomen geldt deze implicatie, tenzij we flauw gaan doen over vrouwen met baarden, etc. (Wat kan. Zulke vrouwen werden vroeger op rondreizende kermessen tentoongesteld. Je zou ook kunnen Googelen op “woman with beard,” maar dat gaat al aardig richting soggen.) Laten we even aannemen dat de implicatie geldt. Contrapositie:

“Alle niet-mannen dragen geen baard.”

Seksuele pathologieën daargelaten kan worden aangenomen dat alle mensen die geen man zijn, vrouw zijn. Dan is de contrapositie:

“Alle vrouwen dragen geen baard.”

Ook hier geldt weer dat de bewering waar is als het bestaan van baarddragende vrouwen wordt uitgesloten. Als het bestaan van baarddragende vrouwen *niet* wordt uitgesloten zijn zowel de implicatie als de contra-implicatie onwaar.

Blz. 7, it. 2: Universum: alle mensen. (Of: alle *levende* mensen. Of: alle reizigers.) Dit is een implicatie. De implicatie lijkt waar: als je een auto hebt, heb je per definitie vervoer, pathologische gevallen uitgesloten, zoals kapotte auto's, auto's zonder benzine, etc. Contrapositie:

“Alle mensen zonder vervoer rijden geen auto.”

(Of: alle levende mensen zonder vervoer rijden geen auto. Of: alle reizigers zonder vervoer rijden geen auto.) Dit is dan ook waar, ook weer onder het voorbehoud dat pathologische gevallen worden uitgesloten.

Blz. 7, it. 3: Universum: alle kinderen. (Of: alle schoolgaande kinderen. Of: alle in Nederland geboren kinderen.) Dit is een implicatie. Contrapositie:

“Alle kinderen die niet op de basisschool zitten komen niet uit groep 5.”

Blz. 7, it. 4: Universum: alle sporters. Dit is een implicatie. Contrapositie:

“Als een sporter mag meedoen, dan is deze niet gediskwalificeerd.”

Je kunt de contrapositie realistisch maken door zoiets te zeggen als:

“Als een sporter mag meedoen, dan is deze blijkbaar niet gediskwalificeerd geworden.”

Alle drie de uitspraken (implicatie, contrapositie en variatie op contrapositie) komen op hetzelfde neer.

Blz. 7, it. 5: Universum: alle mensen. (Of: alle kiesgerechtigden.) Dit is een implicatie. Deze implicatie is waar: een stem kan maar één keer worden uitgebracht. Contrapositie:

“Kun je nog op partij *B* stemmen, dan heb je (blijkbaar) (nog) niet op partij *A* gestemd.”

Ook de contrapositie is waar: als het nog mogelijk is om op een partij, bijv. *B*, te stemmen, dan heb je je stem blijkbaar nog niet uitgebracht, in het bijzonder niet op *A*.

Blz. 7, it. 6: Universum als in vorige onderdeel. Dit is een implicatie. Deze implicatie is onwaar: je kan op een andere partij $C \neq A$ hebben gestemd en zo je stem al hebben weggegeven. Contrapositie:

“Kun je niet meer op partij *B* stemmen, dan heb je (blijkbaar) op partij *A* gestemd.”

Ook de contrapositie is onwaar: je kunt op een andere partij hebben gestemd, of je kunt om wat voor reden dan ook niet in staat zijn om te stemmen.

Blz. 7, it. 7: Voorbeeld van een universum: alle vrouwen waarbij een zwangerschapstest wordt afgenomen. Dit is een implicatie. Als “false positives” (onterechte signaleringen) buiten beschouwing worden gelaten, dan is deze implicatie waar. Contrapositie:

“Als je niet in verwachting bent, dan moet de je zwangerschapstest negatief uitvallen.”

Ook de contra-implicatie is waar als valse positieven buiten beschouwing worden gelaten.

Blz. 7, it. 8: Universum als in het vorige onderdeel. Dit is toegegeven een moeilijke opgave. De bewering

“Als je zwangerschapstest negatief is, dan is er toch nog een mogelijkheid dat je in verwachting kunt zijn.”

oppert de *mogelijkheid* dat een test vals negatief is, wat zo veel wil zeggen dat een zwangerschapstest kan falen in de aanwezigheid van een feitelijke zwangerschap. Dit is een reële mogelijkheid als er bijvoorbeeld te vroeg in de zwangerschap wordt getest, of als de vrouw in de periode voorafgaand aan de test erg veel heeft gedronken. Laten we deze bewering dus als waar aanmerken.

Deze bewering is *geen* implicatie, omdat de rechterkant spreekt over een *mogelijkheid*. Zodra dat gebeurd is er geen sprake meer van een categorische (i.e., altijd geldende) implicatie, maar van een op zichzelf staand voorbeeld. Een *uitzondering*, zo je wilt. Dezelfde bewering, maar dan anders geformuleerd:

“Het is mogelijk dat een zwangerschapstest negatief uitvalt terwijl je toch in verwachting bent.”

Weer anders geformuleerd, en zo dat de logisch structuur tot uiting komt:

“Er is een situatie denkbaar waarin de volgende twee beweringen tegelijkertijd gelden:

1. Je bent in verwachting.
2. Je zwangerschapstest valt negatief uit."

In de logica wordt deze bewering gezien als een *conjunctie* (een samenvoeging van twee beweringen met behulp van het voegwoord "en"), die voorafgegaan wordt door een mogelijksheidsindicator. In de modale logica zou deze bewering worden opgeschreven als

$$\Diamond(p \wedge q),$$

waarbij " $\Diamond$ " staat voor "het is mogelijk dat", " p " voor bewering (1), en " q " voor bewering (2). Zie verder ook de discussie in Hoofdstuk 6 Logicachapter.6 op blz. 71 Wat is het en heb je eraan? section.6.1.

Blz. 7, it. 1.9: Stel $n \in \mathbb{N}$ zodanig dat $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$. Dan $\sqrt{n} = k/l$ voor zekere $k, l \in \mathbb{N}$ met $l \neq 0$ en $\gcd(k, l) = 1$. Dus $k^2 = nl^2$. Intuïtief is nu al in te zien dat n een kwadraat moet zijn, want alle kwadraten die l^2 niet maakt aan de rechterkant, moeten door n gemaakt worden (immers er staat een kwadraat aan de linkerkant). We gaan dit netjes bewijzen. Stel $p | n$ is een priemdelers van n (p is dus priem). Omdat $k^2 = nl^2$ moet p nu ook in het linkerlid voorkomen, i.e., $p | k^2$. Omdat p priem is moet nu ook $p^2 | k^2$. (Immers, alle priemdelers van een kwadraat komen tenminste twee keer voor.) Maar dan moet p^2 ook het rechterlid delen, i.e., $p^2 | nl^2$. Dus $p^2 | n$ of $p^2 | l^2$. Het laatste, $p^2 | l^2$, zou impliceren dat $p | l$, maar dat kan niet, want eerder hadden we al $p | k$ en we hadden aangenomen dat $\gcd(k, l) = 1$. Dus moet $p^2 | n$.

We hebben zojuist bewezen dat voor iedere priemdelers $p | n$ geldt $p^2 | n$. Hieruit volgt dat n zelf een kwadraat moet zijn.

Misschien zijn er kortere bewijzen, dit is i.i.g. één bewijs.

Hoe vind je zo'n bewijs? Allereerst door je de contrapositie netjes uit te drukken. Eerst in woorden, en dan met variabelen. Vervolgens kom je terecht bij de uitdrukking $k^2 = nl^2$. Hier moet het inzicht danwel het vermoeden komen dat n , als deze omringd wordt door kwadraten, zelf ook een kwadraat moet zijn. Vervolgens ga je nadenken over hoe je dit kun aantonen. Dat kan door te beseffen dat kwadraten alle priemdelers dubbel hebben. (En alle getallen met dubbele priemdelers kwadraten zijn.) Vervolgens is het toch wel een kwestie van dóórredeneren, dat wil zeggen, alle consequenties van $k^2 = nl^2$ opschrijven totdat je bij de conclusie uitkomt dat elke priemdelers p het getal n twee keer moet delen.

Blz. 8, it. 1: Waar: als er nooit 5 of meer mensen in dezelfde maand jarig zijn, kan de groep uit ten hoogste $12 \times 4 = 48$ personen bestaan, en $48 < 50$.

Blz. 8, it. 2: Onwaar: het kan bijvoorbeeld voorkomen dat steeds 5 mensen in één van elke eerste tien maanden jarig zijn. Dus: 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 0, 0. Andere mogelijke verdelingen: 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 4, 1, 0 of 5, 5, 5, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 4, 1, 1 etc.

Blz. 8, it. 1.11: We bewijzen eerst

$$x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2 \quad (7)$$

voor niet-negatieve getallen $x \leq y$, als volgt: als we de ongelijkheid $0 \leq x \leq y$ aan beide kanten met het niet-negatieve getal x vermenigvuldigen krijgen we

$$0 \leq x^2 \leq xy.$$

Als we diezelfde ongelijkheid $0 \leq x \leq y$ aan beide kanten met het niet-negatieve getal y vermenigvuldigen krijgen we

$$0 \leq xy \leq y^2.$$

Deze ongelijkheden achter elkaar zetten levert

$$0 \leq x^2 \leq xy \leq y^2$$

op, ergo $x^2 \leq y^2$.

We gaan nu de omgekeerde implicatie bewijzen, nl. $x^2 \leq y^2 \Rightarrow x \leq y$ voor niet-negatieve getallen $x \leq y$, als volgt: stel dat $x^2 \leq y^2$ voor niet-negatieve getallen $x \leq y$. Stel nu toch dat $x \leq y$ niet geldt. Dus $x \not\leq y$. Dus dan zou $y < x$ gelden. Dus zeker $y \leq x$. Via (7) concluderen we $y^2 \leq x^2$. Samen met onze aanname $x^2 \leq y^2$ levert dit $x^2 = y^2$. Twee kwadraten van positieve getallen zijn gelijk als en alleen de getallen zelf gelijk waren. Dus $x = y$. Maar dit is in tegenspraak met het eerder gevonden $y < x$. Dus onze aanname $x \not\leq y$ blijkt niet houdbaar. We kunnen niet anders dan concluderen dat $x \leq y$ moet gelden, waarmee het gevraagde bewezen is.

Blz. 9, it. 1.12: Stel n is even. Dus $n = 2m$. Dan is

$$n^2 = (2m)^2 = 4m^2 = 2 \cdot 2m^2.$$

Dus n^2 is even.

Stel omgekeerd dat n oneven is. Dus $n = 2m + 1$. Dan is

$$n^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1.$$

Dus n^2 is oneven.

Blz. 9, it. 1: Het bewijs is een kopie van het eerder gegeven bewijs dat er geen kleinste geheel getal bestaat:

Stel dat er toch een kleinste reëel getal zou bestaan. Noem dit r . Omdat r een reëel getal is, is $r - 1$ dat ook. Maar $r - 1 < r$, wat is tegenspraak is met de aanname dat r het kleinste reële getal zou zijn.

De aanname dat er toch een kleinste reëel getal bestaat leidt dus tot een tegenspraak. Deze aanname kan dus niet waar zijn, dus kan er geen kleinste reëel getal bestaan.

Blz. 9, it. 2: Elke som van even getallen is weer even. Dus de som van drie even getallen is even. Dus de som van drie even getallen kan nooit oneven zijn.

Blz. 9, it. 3: Stel toch. Dan is er een irrationaal getal, x , zodanig dat

$$x + \frac{m}{n} = \frac{k}{l}$$

met $k, l \neq 0, m, n \neq 0$ geheel. Maar dan

$$x = \frac{k}{l} - \frac{m}{n} = \frac{kn - ml}{ln}, \quad nl \neq 0,$$

wat zou betekenen dat x een breuk is. Tegenspraak.

Blz. 9, it. 4: Stel toch. Schrijf de vergelijking als

$$(x + y)(x - y) = 1.$$

Om het product 1 te laten zijn, moeten beide factoren tegelijkertijd 1 of -1 zijn. Maar de stelsels $\{x + y = 1, x - y = 1\}$ en $\{x + y = -1, x - y = -1\}$ bezitten beide geen geheelgetallige oplossingen.

Blz. 9, it. 5: Stel toch. Dan

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 + \frac{p}{q} + 1 = 0.$$

voor gehele $p, q \neq 0$. Neem zonder beperking der algemeenheid ook maar even aan dat $\gcd(p, q) = 1$. Alles met q^3 vermenigvuldigen lever

$$p^3 + pq^2 + q^3 = 0$$

1. p en q beiden oneven. Dan linkerkant oneven. Dus rechterkant oneven. Tegenspraak.
2. p even en q oneven. Weer is de linkerkant oneven. Tegenspraak.
3. p oneven en q even. Weer is de linkerkant oneven. Tegenspraak.
4. p even en q even. Dit is in tegenspraak met de eerdere aanname dat $\gcd(p, q) = 1$.

Blz. 9, it. 6: Stel niet. Laat $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ dan alle priemgetallen zijn. Vorm het getal

$$x = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_{n-1} \times p_n.$$

Dit getal is deelbaar door alle priemgetallen. Dus $y = x + 1$ is deelbaar door geen enkel priemgetal. Dus door geen enkel getal, anders dan 1 en zichzelf. Maar dan is y een priemgetal. Bovendien $p_i < x < y$, zodat $y \neq p_i$ voor alle $i = 1, \dots, n$. Blijkbaar bevat P dus toch niet alle priemgetallen. Tegenspraak.

Opmerking: x is erg groot, dus y is hoogstwaarschijnlijk niet het eerste priemgetal na p_n . Voor het bewijs maakt dat verder niet uit.

Blz. 10, it. 1.14: Hypothese:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Te bewijzen:

$$1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Blz. 10, it. 1: Basis $n = 0$ klopt: $2^0 = 1 \leq 1 = 3^0$.

Inductiehypothese: stel $2^n \leq 3^n$ is waar voor zekere $n \geq 0$.

Beide kanten met 2 vermenigvuldigen levert $2^{n+1} \leq 2 \cdot 3^n$ op. Nu geldt natuurlijk dat

$$2 \cdot 3^n < 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}.$$

Beide ongelijkheden achter elkaar zetten levert $2^{n+1} < 3^{n+1}$ op.

Blz. 10, it. 2: Basis $n = 1$ klopt: $2 \cdot 1 - 1 = 1^2$.

Inductiehypothese: stel $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ is waar voor zekere $n \geq 0$. We moeten nu laten zien dat

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Als volgt: het gedeelte $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ in

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1)$$

kunnen we met behulp van de inductiehypothese schrijven als n^2 , zodat we

$$n^2 + (2n + 1)$$

krijgen. Het is gemakkelijk in te zien dat deze uitdrukking inderdaad gelijk is aan $(n + 1)^2$. Klaar!

Blz. 10, it. 3: Geen uitwerking.

Blz. 10, it. 4: Geen uitwerking.

Blz. 10, it. 5: Geen uitwerking.

Blz. 10, it. 6: Basis $n = 4$ klopt: $4! = 24 \geq 16 = 2^4$. (Merk op dat $n = 4$ inderdaad het eerste natuurlijke getal is waarvoor de verlangde ongelijkheid op gaat.)

Inductiehypothese: stel $n! \geq 2^n$ is waar voor zekere $n \geq 4$. Dan

$$\begin{aligned} (n+1)! &= (n+1)n! \\ &\geq (n+1)2^n && \text{[per inductie]} \\ &\geq 2 \cdot 2^n && \text{[immers, als } n \geq 4 \text{ dan } n+1 \geq 2] \\ &= 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Blz. 10, it. 7: Basis $n = 0$ klopt: $0^3 + 2 \times 0 = 0$ en $3|0$. Stel de bewering is waar voor n . We gaan kijken of de bewering waar is voor $n + 1$:

$$\begin{aligned} (n+1)^3 + 2(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 5n + 3 \\ &= \underbrace{n^3 + 2n}_{\text{deelbaar door 3 per inductie}} + \underbrace{3n^2 + 3n + 3}_{\text{deelbaar door 3}}. \end{aligned}$$

Als elke term van een som deelbaar is door drie, dan is de som zelf dat ook.

Blz. 10, it. 8: Basis $n = 0$ klopt: $(r+1)^0 = 1 = 0 \cdot r + 1$. Inductiehypothese: stel $(r+1)^n \geq nr + 1$, voor $r > -1$ is waar voor zekere $n \geq 0$. Dan

$$\begin{aligned} (r+1)^{n+1} &= (r+1)^n(r+1) \\ &\geq (nr+1)(r+1) && \text{[per inductie]} \\ &= nr^2 + nr + r + 1 \\ &= (n+1)r + 1 + nr^2 \\ &\geq (n+1)r + 1. && \text{[restterm } nr^2 \geq 0] \end{aligned}$$

De conditie $r > -1$ is een noodzakelijke voorwaarde: anders zou $r + 1$ in $(r + 1)^n$ kleiner of gelijk nul worden en dan moeten we in het bewijs rekening gaan houden met het feit dat negatieve getallen met oneven exponenten weer negatief worden. Dit feit blijkt bij nadere beschouwing inderdaad een bewijs van dit algemenere geval te obstrueren.

Blz. 10, it. 2a: $b_n = 2^n + (-1)^n$.

Blz. 10, it. 3: Let $P(n)$ be the statement “Postage of n cents can be formed using 4-cent and 5-cent stamps”.

REGULAR INDUCTION. Basis: $k = 12$. $P(12)$ is true, because 12 cents can be formed using three 4-cent stamps.

Induction: assume that $P(k)$ is true, that is, that postage of k cents can be formed using some combination of 4-cent and 5-cent stamps. Then to form postage of $k + 1$ cents, there are two possibilities.

1. If any 4-cent stamps were used to get k cents of postage, take one of the 4-cent stamps and replace it with a 5-cent stamp. You now have $k + 1$ cents of postage.
2. If only 5-cent stamps were used to get k cents of postage, since we know that $k \geq 12$, we have at LEAST three 5-cent stamps. (I.e. the smallest k that can only be formed using 5-cent stamps is 15.) So if you replace any three 5-cent stamps with four 4-cent stamps, you will have $k + 1$ cents of postage.

STRONG INDUCTION. Basis: this proof requires four base cases.

$k = 12$: 12 cents of postage can be formed using three 4-cent stamps.

$k = 13$: 13 cents of postage can be formed using two 4-cent stamps and a 5-cent stamp.

$k = 14$: 14 cents of postage can be formed using a 4-cent stamp and two 5-cent stamps.

$k = 15$: 15 cents of postage can be formed using three 5-cent stamps.

Induction: for $k > 15$, assume that we can form postages of j cents, for every j between 12 and k , inclusive. Then, to form a postage for $k + 1$ cents, use the same postage as for $k - 3$ cents, but add a 4-cent stamp.

Blz. 11, it. 1.17: A: ja, -5 : nee, (-6) : ja, $(3 + 4)$: ja, $(3 - 4)$: nee, $3 + 4$: nee, $3 + (F + 4)$: nee, $(3 + (G + 4))$: ja, $(-(K + (3 + A)))$: ja, $-(P + (P + 4))$: nee

Blz. 11, it. 2: $l(\varphi) = 4o(\varphi) + 1$.

Blz. 11, it. 3: $l(\varphi) = 3o(\varphi) + 1$.

Blz. 11, it. 4: $l(\varphi) \leq 4o(\varphi) + 1$.

Blz. 11, it. 5: Inductiebasis: φ bevat nul operatoren. Als $o(\varphi) = 0$, dan is φ een atoom en dan per definitie

$l(\varphi) = 1$. De ongelijkheid $l(\varphi) \leq 4o(\varphi) + 1$ klopt in dit geval. (Het is in feite een gelijkheid, maar dat maakt verder niet uit.)

Inductiestap: stel $l(\varphi) \leq 4o(\varphi) + 1$ is waar voor formules met minder dan $n > 1$ operatoren. Stel φ bezit n operatoren. Nu zijn er drie mogelijkheden: φ is van de vorm $(-\psi)$, φ is van de vorm $(\psi + \chi)$, of φ is van de vorm $(\psi \times \chi)$. Stel het laatste. Dan

$$\begin{aligned} l(\varphi) &= l[(\psi \times \chi)] \\ &= 3 + l(\psi) + l(\chi) && \text{[twee (,) en een } \times \text{]} \\ &\leq 3 + (4o(\psi) + 1) + (4o(\chi) + 1) && \text{[inductiehypothese]} \\ &= 4(o(\psi) + o(\chi) + 1) + 1 \\ &= 4o(\varphi) + 1 && [o(\varphi) = o(\psi) + o(\chi) + 1]. \end{aligned}$$

Voor $\varphi = (-\psi)$, en $\varphi = (\psi + \chi)$ analoog.

Blz. 11, it. 6: Er *mogen* haakjes worden weggelaten. Er kunnen dus expressies voorkomen waarbij geen enkel haakje is weggelaten. Het antwoord is dus hetzelfde als het antwoord in onderdeel 4Bewijs door volledige inductieItem.90.

Blz. 11, it. 7: $l(\varphi) \leq \max\{1, 4o(\varphi) - 1\}$.

Blz. 12, it. 1.19: Het inductie-argument houdt geen stand als $|A| = 2$. In dat geval bevatten B en C geen gemeenschappelijk element meer.

Blz. 12, it. 1.20: Deze opgave heeft geen eenvoudig antwoord. Google op “Interesting number paradox”.

Blz. 12, it. 1: Non-constructief aspect: je kunt niet aangeven in welke doos meer dan twee voorwerpen zitten.

Blz. 12, it. 2: Zij n deelbaar. Dan is $n = km$ voor zekere $k, m < n$. Stel k en $m > \sqrt{n}$. Dan $n = km > \sqrt{n}\sqrt{n} = n$. Dat kan niet, dus één van k, m moet kleiner gelijk zijn aan $\sqrt{n}$. Non-constructief aspect: je kunt met dit bewijs niet aangeven welke deler van n kleiner of gelijk aan $\sqrt{n}$ is.

Blz. 12, it. 3: De grafiek van een veelterm is continu. Als de hoogste exponent oneven is, verdwijnt deze rechts naar oneindig en links naar min-oneindig. Dankzij de zogenaamde tussenwaardestelling (check Wikipedia) moet die grafiek ergens de lijn $y = 0$ snijden. Dat is een nulpunt. Non-constructief aspect: voor $n \geq 5$ valt niet precies uit te drukken waar dat nulpunt precies ligt. (Dat dat niet kan is onafhankelijk bewezen door Abel en Galois. Beide stierven overigens zeer jong,—26 en 20 resp.)

Blz. 12, it. 4: $n^3 - n = (n - 1)n(n + 1)$. Van drie opeenvolgende getallen is er precies één deelbaar door drie! Dus het product is deelbaar door drie. Non-constructief aspect: je kunt niet aangeven welke van de drie $n - 1$, n , $n + 1$ deelbaar door drie is.

Blz. 12, it. 5: Neem één persoon, A . Ga na dat A (tenminste) drie personen moet kennen of, als dat niet het geval is, (tenminste) drie personen niet kent. Laten we aannemen dat A (tenminste) drie personen kent. Stel, dat zijn B , C , en D . Als geen van deze drie elkaar kent, zijn we klaar. In het ander geval zijn er twee van deze drie die elkaar kennen en ontstaat er samen met A een groepje dat elkaar kent, en zijn we ook klaar.

Als we aannemen dat A juist drie personen niet kent, dan verloopt de redenering hetzelfde, alleen dan met de woorden “kennen” en “niet kennen” omgedraaid.

Blz. 13, it. 1.22: A closer look at the slanted sides of the trapezoidal and triangular pieces shows that they cannot be aligned as implied in the above fallacious illustrations. In fact, they are the diagonals of two dissimilar rectangles of sizes 2×5 and 3×8 , respectively, and hence have distinct slopes. But the difference of the ratios ($2/5 = 0.4$ versus $3/8 = 0.375$) is too small to be perceived by the eye.

Zoek verder op internet met “chessboard paradox,” or “dissection Fallacy”.

Blz. 20, it. 1: Ja: $\{a\}$ is het enige element.

Blz. 20, it. 2: Nee: de verzameling heeft 2 elementen, $\{a\}$ en $\{b\}$.

Blz. 20, it. 3: Ja: het enige element is de verzameling uit 2.

Blz. 20, it. 4: Ja: $\{a\}$ is het enige element.

Blz. 20, it. 5: Ja, want de verzameling is gelijk aan $\{\{a, b\}\}$.

- | | | |
|---|-----------|---------|
| Blz. 21, it. 2.2: | 1. waar | 4. waar |
| 2. onzinnig (maar strikt genomen wel waar: a is geen verzameling, en heeft dus geen elementen; er is dus geen element van a dat niet in $\{a\}$ zit!) | 5. onwaar | 6. waar |
| | 7. onwaar | 8. waar |
| | 9. waar | |
| 3. idem | 10. waar | |

Blz. 21, it. 1: Stel $\emptyset'$ speelt ook de rol van de lege verzameling. We moeten laten zien dat voor alle x : $x \in \emptyset \Leftrightarrow x \in \emptyset'$. Deze equivalentie is, vanwege de rol die $\emptyset$ en $\emptyset'$ spelen vervuld: zowel $\emptyset$ als $\emptyset'$ bevatten dezelfde elementen, namelijk: geen.

Blz. 21, it. 2: $\emptyset$ is niet echt bevat in $\emptyset$ omdat elk element van $\emptyset$ element is van $\emptyset$ en omgekeerd. $\emptyset$ is wel echt bevat in elke andere verzameling omdat elk element van $\emptyset$ element is van elke andere verzameling, maar niet omgekeerd.

Blz. 22, it. 2.4: 1. ‘De lege verzameling is een deelverzameling van $\{a\}$.’ Dit is waar.

2. ‘De lege verzameling is een deelverzameling van $\{\emptyset\}$.’ Dit is waar.
3. ‘De lege verzameling is een element van $\{\emptyset\}$.’ Dit is waar.
4. ‘De lege verzameling is een element van de lege verzameling.’ Dit is onwaar, want de lege verzameling bevat geen elementen.
5. ‘De lege verzameling is geen element van de lege verzameling.’ Dit is waar.
6. ‘De lege verzameling is een element van $\{a\}$.’ Dit is onwaar, want $\{a\}$ bevat alleen a als element.

Blz. 22, it. 2.5: – *commutativiteit*: $x \in A \cup B$ desda $x \in A$ of $x \in B$, dat wil zeggen desda $x \in B$ of $x \in A$, dat wil zeggen desda $x \in B \cup A$. Dus $A \cup B = B \cup A$.

– *associativiteit*: $x \in A \cup (B \cup C)$ desda $x \in A$ of $x \in B \cup C$ desda $x \in A$ of $x \in B$ of $x \in C$, dat wil zeggen desda $x \in A \cup B$ of $x \in C$, dat wil zeggen desda $x \in (A \cup B) \cup C$. Dus $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$. $\square$

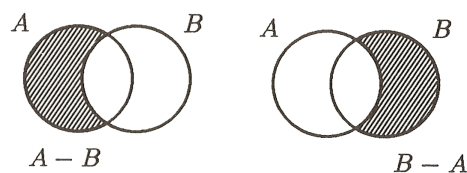
Blz. 23, it. 2.7: ‘ A doorsneden met B ’ betekent niet hetzelfde als ‘ B doorsneden met A ’. Het levert wel dezelfde uitkomst op, maar dat is iets anders. Bovendien willen we dat laatste nou juist bewijzen! Dat kan alleen maar door de definitie van doorsnijding twee keer in te vullen: één keer voor $A \cap B$ en één keer voor $B \cap A$, en dan in te zien dat we op hetzelfde uitkomen.

Blz. 23, it. 2.8: – *idempotentie*: $x \in A \cap A$ desda $x \in A$ en $x \in A$, dus desda $x \in A$. Ergo $A \cap A = A$.

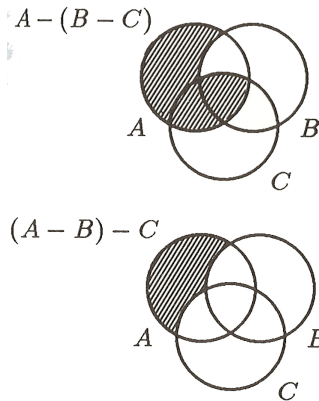
– *associativiteit*: $x \in A \cap (B \cap C)$ desda $x \in A$ en $x \in B \cap C$ desda $x \in A$ en $x \in B$ en $x \in C$, dat wil zeggen desda $x \in A \cap B$ en $x \in C$, dus desda $x \in (A \cap B) \cap C$. Dus $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$. $\square$

Blz. 23, it. 2.9: De verschil-operatie is

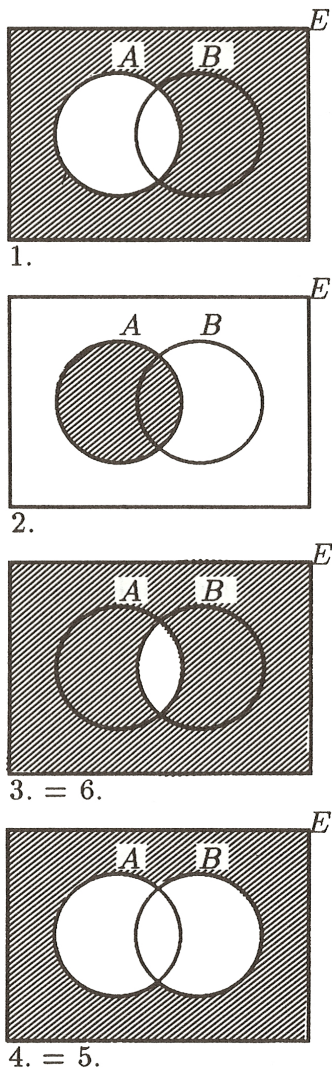
- *niet idempotent*, want $A - A = \emptyset$.
- *niet commutatief*, want $A - B$ is niet hetzelfde als $B - A$:



- *niet associatief*, want $A - (B - C)$ is niet hetzelfde als $(A - B) - C$:



Blz. 23, it. 2.10: De juiste arceringen zijn als volgt:



Hieruit blijkt dat de volgende wetten gelden:
 $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$ en $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$.

Blz. 24, it. 1: Stel, er zijn vier verzamelingen: A , B , C , en D . Verzameling A wordt gerepresenteerd door de cirkel linksboven; verzameling B wordt gerepresenteerd door de cirkel rechtsboven; verzameling C wordt gerepresenteerd door de cirkel linksonder, etc.

Merk nu op dat de doorsnijding van elk tweetal tegenoverliggende verzamelingen bevat is in de vereniging van de twee andere tegenoverliggende verzamelingen:

$$A \cap D \subseteq B \cup C \quad \text{en} \quad B \cap C \subseteq A \cup D.$$

Dit hoeft in het algemeen niet zo te zijn: vier verzamelingen kunnen zich best zo verhouden dat bijvoorbeeld A en D gemeenschappelijke elementen bevat die buiten B en C liggen.

Blz. 24, it. 2: Voorbeelden te vinden op internet. (Zoek met voor de hand liggende termen.)

Blz. 24, it. 3: Ja, enig internetten levert op dat zoiets kan, onder andere met een constructie van John Venn zelf, door elke volgende afbeelding van een verzameling langs de rand te leggen van een vorige verzameling.

Alternatieve constructies werden voorgesteld door A. W. F. Edwards (tandwiel constructie) en Branko Grünbaum (overlappende sinusfiguren met steeds toenemende frequentie).

Blz. 25, it. 1: $\cup \{A, B\}$.

Blz. 25, it. 2:

$$\begin{aligned} x &\in \bigcup \{(0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ \Leftrightarrow &\text{er is een } z \in \mathbb{R}, \text{ zó dat } x \in (0, z) \\ \Leftrightarrow &x > 0. \end{aligned}$$

Dus $\bigcup \{(0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = (0, \rightarrow)$.

$$\begin{aligned} x &\in \bigcap \{(0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ \Leftrightarrow &\text{voor alle } z \in \mathbb{R} \text{ met } z > 0 \text{ geldt dat } x \in (0, z). \end{aligned}$$

Aan deze eis kan redelijkerwijs geen enkele $x \in \mathbb{R}$ voldoen. Dus $\bigcap \{(0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} = \emptyset$.

Blz. 25, it. 1: Stel $x \in A_j$ willekeurig. Dan is er een $i \in I$ zodanig dat $x \in A_i$, namelijk $i = j$. Per definitie van $\bigcup_{i \in I} A_i$ geldt nu $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$.

Stel $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ willekeurig. Per definitie geldt nu dat $x \in A_i$ voor alle $i \in I$. Dus ook voor $i = j$. Dus $x \in A_j$.

Blz. 26, it. 2:

$$\begin{aligned} x &\in \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cup \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) \\ \Leftrightarrow &x \in \bigcup_{i \in I} A_i \text{ of } x \in \bigcup_{i \in I} B_i \\ \Leftrightarrow &\text{er is een } i \in I \text{ z.d.d. } x \in A_i \\ &\text{of er is een } i \in I \text{ z.d.d. } x \in B_i \\ (!) \Leftrightarrow &\text{er is een } i \in I \text{ z.d.d. } (x \in A_i \text{ of } x \in B_i) \\ \Leftrightarrow &\text{er is een } i \in I \text{ z.d.d. } x \in A_i \cup B_i \\ \Leftrightarrow &x \in \bigcup_{i \in I} (A_i \cup B_i). \end{aligned}$$

De overgang bij het uitroepen is niet helemaal triviaal. Je moet daar namelijk inzien dat één lopende index eigenlijk genoeg is om de statement te kunnen maken.

De andere gelijkheid kan analoog worden bewezen.

Blz. 26, it. 5: Neem x willekeurig.

$$\begin{aligned}
 & x \in \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i) \\
 \Leftrightarrow & \text{er is een } i \in I \text{ z.d.d. } x \in X \setminus A_i \\
 \Leftrightarrow & \text{er is een } i \in I \text{ z.d.d. } x \in X \text{ en } x \notin A_i \\
 (!) \Leftrightarrow & x \in X \text{ en er is een } i \in I \text{ z.d.d. } x \notin A_i \\
 \Leftrightarrow & x \in X \text{ en niet voor alle } i \in I \text{ geldt } x \in A_i \\
 \Leftrightarrow & x \in X \text{ en niet } x \in \bigcap_{i \in I} A_i \\
 \Leftrightarrow & x \in X \text{ en } x \notin \bigcap_{i \in I} A_i \\
 \Leftrightarrow & x \in X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i.
 \end{aligned}$$

De overgang bij het uitroepen is niet helemaal triviaal. Je moet daar namelijk inzien dat de bewering $x \in X$ niet afhankelijk is van de index i die over I loopt, dus buiten de “er is een $i \in I$ ”-kwalificatie kan worden gehaald.

Blz. 26, it. 5: Analooog aan het bewijs van Item 5 Vereniging en doorsnijding van collecties Item.153.

Blz. 26, it. 2.22: 1. $\emptyset$

2. $\emptyset$
3. $\{\emptyset\}$
4. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
5. $\{\emptyset\}$
6. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Blz. 26, it. 2.24: Laat $A \subseteq B$. Neem een willekeurige $V \in 2^A$, dan is $V \subseteq A$. Vanwege het gegeven is dus ook $V \subseteq B$ (teken zo nodig een plaatje) met andere woorden $V \in 2^B$. Derhalve is $2^A \subseteq 2^B$. $\square$

Blz. 26, it. 2.25: Stel $A \subseteq B$. Te bewijzen dat elke functie van A naar $\{0, 1\}$ ook een functie van B naar $\{0, 1\}$ is. Laat

$$s : A \rightarrow \{0, 1\}$$

zo’n functie zijn. (De letter “ s ” representeert “subset”.) Deze functie duidt een bepaalde deelverzameling $A' \subseteq A$ aan, en beeldt elementen $a \in A$ af op 1 als en slechts als $a \in A'$. De functie s is nu uit te breiden naar een functie

$$s' : B \rightarrow \{0, 1\}$$

door

$$s'(b) = \begin{cases} s(b) & \text{als } b \in A \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Hiermee hebben we aangetoond dat, als $A \subseteq B$, elke functie van A naar $\{0, 1\}$ conservatief kan worden uitgebreid naar een functie van B naar $\{0, 1\}$.

Hebben we nu aangetoond dat elke functie van A naar $\{0, 1\}$ ook daadwerkelijk een functie van B naar $\{0, 1\}$ is? Dit ligt wat subtieler, maar het antwoord is bevestigend. Een functie is namelijk een voorschrift dat vastlegt waar

elementen uit een domein, in dit geval B , op worden afgebeeld. De functie s legt dat voor elementen buiten A (maar binnen B) impliciet vast door deze op nul af te beelden.

Blz. 26, it. 2.26: Als $2^A \subseteq 2^B$, dan is elk element van 2^A element van 2^B . Aangezien $A \subseteq B$ en daarmee $A \in 2^A$, volgt uit het gegeven dat $A \in 2^B$. Dus $A \subseteq B$. $\square$

Blz. 26, it. 2.27:

1. $2^{2^\emptyset} = 2^{\{\emptyset\}} = \{\{\emptyset\}, \emptyset\}$
2. $2^{2^{\{a\}}} = 2^{\{\{a\}, \emptyset\}} = \{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset\}, \emptyset\}$
3. Het wordt nu een beetje zinloos om een antwoord uit te schrijven. We moeten gaan nadenken over de *structuur* van het antwoord. Allereerst kunnen we het aantal elementen gaan bepalen: één keer een machtsverzameling nemen, geeft een verzameling ter grootte $2^1 = 2$. Nog een keer een machtsverzameling nemen, geeft een verzameling ter grootte $2^2 = 4$. Nog een keer geeft $2^4 = 16$.

$$\begin{aligned}
 2^{2^{\{a\}}} &= 2^{\{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset\}, \emptyset\}} \\
 &= \{\{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset\}, \emptyset\}, \\
 &\quad \{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset\}\}, \{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\{a\}\}, \emptyset\}, \\
 &\quad \{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\emptyset\}, \emptyset\}, \{\{\{a\}\}, \{\emptyset\}, \emptyset\}, \\
 &\quad \{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\emptyset\}\}, \\
 &\quad \{\{\{a\}, \emptyset\}, \emptyset\}, \\
 &\quad \{\{\{a\}\}, \{\emptyset\}\}, \{\{\{a\}\}, \emptyset\}, \{\{\emptyset\}, \emptyset\}, \\
 &\quad \{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\{\{a\}\}, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\}, \emptyset\}
 \end{aligned}$$

Laten we eens doorgaan. nog een keer een machtsverzameling nemen, zou een verzameling ter grootte $2^{16} = 65536$ geven. Dan *nóg* een keer een machtsverzameling nemen, zou een verzameling ter grootte $2^{65536} \approx 2 \cdot 10^{19727}$ geven. Ter vergelijking: de grootte van het observeerbare heelal wordt geschat tussen de $4 \cdot 10^{79}$ en 10^{81} atomen.

4.

$$\begin{aligned}
 2^{2^{\{a,b\}}} &= 2^{\{\{a,b\}, \{a\}, \{b\}, \emptyset\}} \\
 &= \{\{\{a,b\}, \{a\}, \{b\}, \emptyset\}, \\
 &\quad \{\{a,b\}, \{a\}, \{b\}\}, \{\{a,b\}, \{a\}, \emptyset\}, \\
 &\quad \{\{a,b\}, \{b\}, \emptyset\}, \{\{a\}, \{b\}, \emptyset\}, \\
 &\quad \{\{a,b\}, \{a\}\}, \{\{a,b\}, \{b\}\}, \{\{a,b\}, \emptyset\}, \\
 &\quad \{\{a\}, \{b\}\}, \{\{a\}, \emptyset\}, \{\{b\}, \emptyset\}, \\
 &\quad \{\{a,b\}\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\emptyset\}, \emptyset\}
 \end{aligned}$$

Blz. 27, it. 2.28: $\{1, 2, 3\}^3$ heeft $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$ elementen. Immers elk element van deze verzameling is een tripel waarbij voor elk lid van zo’n tripel 3 onafhankelijke keuzen zijn.

Blz. 29, it. 3.1: $\text{dom}(R) = \{b, d, e\}$ $\text{rng}(R) = \{c, d, e\}$

Blz. 30, it. 3.2: We kunnen $2 > 1$ opvatten als $\langle 2, 1 \rangle \in R$, zodat $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de relatie is op $\mathbb{N}$ die formeel met $>$ overeenkomt.

Blz. 30, it. 3.3: Bijvoorbeeld:



Deze relatie is niet reflexief want b , bijvoorbeeld, verwijst niet naar zichzelf. De relatie is ook niet irreflexief, want er is een element, namelijk a , dat naar zichzelf verwijst.

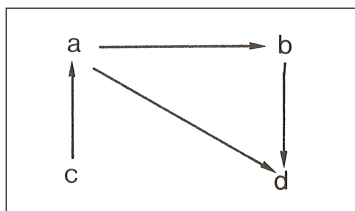
Blz. 30, it. 3.4: Laat de relatie $R \subseteq A \times A$ asymmetrisch zijn. Dan moet R wel irreflexief zijn, want anders zou er een $a \in A$ bestaan waarvoor $\langle a, a \rangle \in R$. Maar dat kan niet vanwege de asymmetrie van R : dan zou immers niet alleen het paar $\langle a, a \rangle$ in R zitten, maar ook het omgekeerde paar (dat is namelijk weer $\langle a, a \rangle$).

Blz. 30, it. 3.5: Bijvoorbeeld:



De relatie is *niet symmetrisch*, want $\langle a, b \rangle \in R$, maar $\langle b, a \rangle \notin R$. De relatie is ook niet *asymmetrisch*, want $\langle c, d \rangle \in R$ en ook $\langle d, c \rangle \in R$.

Blz. 31, it. 3.6: Bijvoorbeeld:



De relatie is niet *transitief*, want $\langle c, a \rangle \in R$ en $\langle a, d \rangle \in R$, maar $\langle c, d \rangle \notin R$. De relatie is daarnaast ook niet *intransitief*, want $\langle a, b \rangle \in R$, $\langle b, d \rangle \in R$ en ook $\langle a, d \rangle \in R$.

Blz. 31, it. 3.7: 1. Stel R is asymmetrisch. R is alleen dan *niet* anti-symmetrisch wanneer er een paar $\langle a, b \rangle$ bestaat zodat $\langle a, b \rangle \in R$, $\langle b, a \rangle \in R$ en $a \neq b$. De combinatie van de eerste twee eisen is echter uitgesloten door de asymmetrie van R . R moet dus wel anti-symmetrisch zijn. $\square$

2. De relatie $\leq$ op $\mathbb{N}$ is anti-symmetrisch, maar niet asymmetrisch.

Blz. 31, it. 3.8: We kiezen in deze opdracht de elementen B , C en D zonder verdere vermelding steeds in 2^A . De relatie $\subseteq$ is

– *reflexief*: voor elke B geldt $B \subseteq B$ per definitie.

- *anti-symmetrisch*: De eigenschap houdt in dat voor elke verzameling B en C geldt: als $B \subseteq C$ en $C \subseteq B$, dan $B = C$. Dit volgt direct uit het extensionaliteitsaxioma en de definitie van $\subseteq$.
- *transitief*: We moeten bewijzen dat als $B \subseteq C$ en $C \subseteq D$, dan ook $B \subseteq D$. Laat dus $B \subseteq C$ en $C \subseteq D$. Dan geldt dat elk element van B ook in C zit, en elk element van C in D zit. Kortom elk element van B is ook element van D , ergo $B \subseteq D$. $\square$

De relatie $\subset$ is

- *irreflexief*: Geen enkele verzameling is een *echte* deelverzameling van zichzelf.
- *asymmetrisch*: Als $B \subset C$, dan is niet elk element van C lid van B , en dus is $C \not\subset B$.
- *transitief*: Als $B \subset C$ en $C \subset D$, dan ook $B \subset D$. De lezer gelieve dit zelf na te gaan. $\square$

Blz. 31, it. 3.9: De relatie $\leq$ op $\mathbb{N}$ is

- *reflexief*: Want voor elk natuurlijk getal n geldt $n \leq n$.
- *transitief*: Als $k \leq m$ en $m \leq n$ dan $k \leq n$
- *anti-symmetrisch*: Als $m \leq n$ en $n \leq m$ dan $m = n$.

Blz. 31, it. 3.10: Laat R een strikte partiële orde op A zijn. Beschouw nu de verzameling $R' = R \cup \{\langle a, a \rangle \mid a \in A\}$. Dan is $R \subseteq R'$, en R' is een partiële orde want is:

- *reflexief*. Dit volgt direct uit de definitie van R' .
- *anti-symmetrisch*. Uit de asymmetrie van R volgt dat als $\langle a, b \rangle$ en $\langle b, a \rangle$ in R' zitten, dan $\langle a, b \rangle \notin R$. Dus $a = b$.
- *transitief*. Dit volgt uit de transitiviteit van R .

Blz. 31, it. 3.11: De letters f en n . Bijvoorbeeld: $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}: x \mapsto x^2$, of $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}: y \mapsto y^2$. De letter $\mathbb{Z}$ kan niet worden veranderd.

Blz. 32, it. 1: Een geordend paar is één entiteit.

Blz. 32, it. 2: De functie f is een deelverzameling van

$$\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$$

als f beschouwd wordt als relatie.

Blz. 32, it. 1: Binnen elk vierkant rond de oorsprong ter grootte $2n \times 2n$ bevinden zich eindig veel start-configuraties. Zet de nu inhoud van die vierkanten achter elkaar en je hebt een aftelling van start-configuraties. (Om dubbeltelling te voorkomen sommeer je voor vierkant $2n$ alleen configuraties die punten hebben buiten vierkant $2(n-1)$. Het voorkomen van dubbeltellingen is overigens niet nodig bij aftellingen.)

Blz. 32, it. 2: Als een populatie uitsterft, stabiliseert, of zich gaat herhalen blijft deze begrensd, en groeit dus niet. Omgekeerd, als een populatie niet groeit, zal deze begrensd blijven. Op een begrensd vlak zijn slechts eindig veel populaties mogelijk. Op enig moment zal er dus herhaling optreden.

Blz. 34, it. 3.14: 1. Geen functie, want een persoon kan gekoppeld zijn aan twee ouders.

2. Wel een functie, want een persoon is steeds gekoppeld aan precies één verzameling ouders (die afhankelijk van de omstandigheden eventueel atomair of leeg kan zijn).

Blz. 34, it. 3.15: Ja, de lege verzameling zelf!

Blz. 34, it. 3.16:

$$\{c, d\}^{\{a, b\}} = \{\{\langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle\}, \{\langle a, c \rangle, \langle b, d \rangle\}, \{\langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle\}, \{\langle a, d \rangle, \langle b, d \rangle\}\}$$

Blz. 35, it. 3.17: 1. $f(a) = b$

2. $f(f(a)) = c$

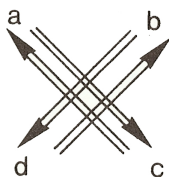
3. $f(f(f(a))) = d$

4. $f(f(f(f(a)))) = a$

5. $f(b) = c$

6. $f(f(f(f(b)))) = b$

Blz. 35, it. 3.18: Het plaatje wordt nu als volgt:



Blz. 35, it. 3.20: B moet minstens evenveel elementen tellen als A , dus minstens 15.

Blz. 36, it. 3.21: De functie f is

- *niet surjectief*. Alle oneven getallen vallen buiten het bereik van f .
- *injectief*. Verschillende getallen uit het domein kunnen na verdubbeling nooit hetzelfde getal opleveren.
- *niet bi-jectief*. De functie is niet zowel surjectief als injectief.

Blz. 36, it. 1: Zij $f : A \rightarrow B$ een injectie. We gaan een surjectie $g : B \rightarrow A$ definiëren.

Zij $B' = f(A)$ het f -beeld van A in B . Omdat f een injectie is, en per definitie alles van $f(A)$ bereikt, is f bi-jectief naar $f(A)$. Elke bi-jectieve functie heeft een inverse (die automatisch bi-jectief is). Laat $g : f(A) \rightarrow A$ die inverse zijn. Deze functie is al surjectief (immers: bi-jectie), maar heeft het verkeerde domein. Kies een $a_0 \in A$. Breid g uit naar $g' : B \rightarrow A$ als volgt:

$$g'(b) = \begin{cases} g(b) & \text{als } b \in f(A), \\ a_0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Omdat g' een uitbreiding van g is, en g surjectief was, is $g' : B \rightarrow A$ zeker surjectief.

Blz. 36, it. 2: Zij $f : A \rightarrow B$ een surjectie. We gaan een injectie $g : B \rightarrow A$ definiëren.

Omdat f een surjectie is, zijn voor alle $b \in B$, de inverse beelden $f^{-1}[b]$ niet leeg en paarsgewijs disjunct. We kunnen dus voor elke $b \in B$ een element $g(b) \in f^{-1}[b]$ kiezen, zo dat alle $g(b)$ verschillend zijn. Dit definieert een injectie $g : B \rightarrow A$. Het voor elke $b \in B$ een element $g(b) \in f^{-1}[b]$ kunnen kiezen veronderstelt de geldigheid van het keuzeaxioma (blz. 49 Het keuzeaxioma section.4.6).

Blz. 37, it. 1: Zij $a \in A$ willekeurig. Vanwege $g|_A \equiv f$ geldt nu $g(a) = f(a)$. Omdat a ook in B , geldt nu vanwege $F_B \equiv g$ ook $F(a) = g(a)$, dus ook $F(a) = f(a)$. We hebben laten zien dat F beperkt tot A zich hetzelfde gedraagt als f . Daarmee hebben we dus bewezen dat $F|_A \equiv f$.

Blz. 37, it. 2a: $|Y|^{|X|}$.

Blz. 37, it. 2b: Er blijven $m - r$ elementen over om een functiewaarde uit Y met $|Y| = n$ te kiezen. Dus n^{m-r} .

Blz. 37, it. 3: Dat kan niet anders dan de volgende functie zijn:

$$\begin{aligned} f : A_1 \times \cdots \times A_5 &\rightarrow B_1 \times \cdots \times B_5 : \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &\mapsto \\ (2 - x_1, 4 - x_2, 6 - x_3, 8 - x_4, 10 - x_5) \end{aligned}$$

Signaturen:

$$\begin{aligned} f_i \circ p_i : A_1 \times \cdots \times A_5 &\rightarrow B_i : \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &\mapsto x_i \mapsto 2i - x_i \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} p_i \circ f : A_1 \times \cdots \times A_5 &\rightarrow B_i : \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &\mapsto \\ (2 - x_1, 4 - x_2, 6 - x_3, 8 - x_4, 10 - x_5) &\mapsto \\ 2i - x_i. \end{aligned}$$

Blz. 38, it. 3.27: B wordt gekarakteriseerd door de functie f waarbij

$$f = \{\langle a, 0 \rangle, \langle b, 0 \rangle, \langle c, 1 \rangle, \langle d, 1 \rangle, \langle e, 1 \rangle\}$$

Blz. 38, it. 3.28: 1. f is een functie want voor elke $a \in A$ is er precies één waarde $w \in \{0, 1\}$ zodat $\langle a, w \rangle \in f$: namelijk $w = 1$ als $w \in A'$ en $w = 0$ als $w \notin A'$.

2. het co-domein is inderdaad $\{0, 1\}$.

3. uit de definitie van f volgt $f^{-1}[\{1\}] = A'$.

Blz. 38, it. 1: Stel f is injectief. Kies $a_0 \in A$. Definieer $g : B \rightarrow A$

$$g(b) = \begin{cases} a & \text{als } b = f(a) \text{ voor een } a \in A, \\ a_0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Kies $a \in A$. Dan per definitie $g(f(a)) = a$.

Stel, omgekeerd, dat $g \circ f = \text{id}_A$. Stel, om te bewijzen dat f injectief is, dat $f(a) = f(a')$. Functie g toepassen op beide kanten levert $g(f(a)) = g(f(a'))$. Omdat $g \circ f = \text{id}_A$ geldt nu $a = a'$, dus f is injectief.

Blz. 38, it. 2: Stel f is surjectief. Omdat f een surjectie is, kunnen we dus voor elke $b \in B$ een element $g(b) \in A$ kiezen, zo dat $f(g(b)) = b$. Dit definieert een functie $g : B \rightarrow A$. Kies $b \in B$. Dan per definitie $f(g(b)) = b$.

Stel, omgekeerd, dat $f \circ g = \text{id}_B$. Stel, om te bewijzen dat f surjectief is, dat $b \in B$. Per definitie wordt b door f bereikt middels $g(b)$: $f(g(b)) = b$.

Blz. 38, it. 3: Stel, f is bi-jectief. Dus injectief en surjectief, dus bezit recht- en links inverse g . Deze g is volwaardige inverse (ga na).

Stel, omgekeerd dat f een links- en een rechtsinverse bezit. Dan is f injectief en surjectief, dus bi-jectief.

Blz. 39, it. 3.35: Deze persoon heeft gelijk. Volgens de definitie van partiële functies is elke functie partieel. Totale functies zijn een bijzonder soort partiële functies.

Blz. 40, it. 3.36: Nee, $c = 0$.

Blz. 41, it. 4.1: Zinnen kunnen volgens dit recept weliswaar steeds langer gemaakt worden, maar zullen toch steeds een eindige lengte hebben. De redenering toont dus niet aan dat er *oneindig lange* zinnen bestaan, maar welke dat er zinnen langer dan elke willekeurig lengte gemaakt kunnen worden. (En ook dat er oneindig veel verschillende Nederlandse zinnen zijn.)

Blz. 43, it. 4.3: $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ zodanig dat

$$f(n) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \cdot n & \text{als } n \text{ is even} \\ \frac{1}{2} \cdot (n+1) & \text{als } n \text{ is oneven} \end{cases}$$

Blz. 43, it. 4.4: Laat f Cantor's aftelling zijn van de positieve breuken en g een analoge aftelling van de negatieve breuken. Hieruit verkrijgen we een aftelling voor *alle* breuken door bij nul ($= \frac{0}{1}$) te beginnen en vervolgens om en om elementen van f en g te nemen.

Blz. 43, it. 4.5: Laat $\{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\}$ een aftelbaar alfabet A zijn. Een ordening naar lengte van de verzameling rijtjes over A resulteert niet zonder meer in een aftelling: als we beginnen met alle rijtjes van lengte 1 (een opsomming van A) komen we nooit toe aan rijtjes van 2 tekens $\dots$. Ook een 'alfabetische' ordening werkt niet: er zijn al oneindig veel rijtjes die met a_0 beginnen, dus rijtjes die met a_1 aanvangen komen niet aan bod. We kunnen beide ordeningen echter wel vruchtbaar combineren tot een werkende aftelling: begin met a_0 , het enige rijtje van lengte 1 waarin het eerste teken van het alfabet voorkomt; vervolg met rijtjes van lengte hoogstens 2 waarin de eerste twee symbolen uit A voorkomen, dat wil zeggen: $a_0a_0, a_0a_1, a_1a_0, a_1a_1$. Daarna komen de rijtjes met lengte ≤ 3 van tekens met index < 3 , en dus in het algemeen: voeg voor elke opvolgende i de rijtjes met lengte $\leq i$ van tekens met index $< i$ aan de aftelling toe. Cruciaal is dat er op de i^{e} stap maar *eindig* veel rijtjes worden toegevoegd (tot een totaal van $\frac{i+1-i}{i-1}$ rijtjes), en dat toch elk rijtje zo ooit aan bod komt (ga dit na).

Blz. 43, it. 4.6: Alle gasten schuiven een kamer op, zodat de eerste kamer vrij komt voor de extra gast.

Blz. 43, it. 4.7: Laat alle gasten verhuizen. De gast van kamer n gaat naar kamer $2n$. Nu zijn alle oneven kamers vrij voor de buspassagiers.

Blz. 43, it. 4.8: Haal alle gasten uit bed en zet ze in een rij op volgorde van hun kamernummer: $f_0 = 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \dots$

Maak een aftelling $f_1, f_2, f_3, \dots$ van de Hilbert-bussen, en laat elke f_i (voor $i > 0$) een aftelling zijn van passagiers in de desbetreffende bus. Iedereen die onderdak zoekt kan nu als volgt worden opgesteld:

$$\begin{array}{cccccccc} f_0 & = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ f_1 & = & f_1(1) & f_1(2) & f_1(3) & f_1(4) & f_1(5) & f_1(6) & \dots \\ f_2 & = & f_2(1) & f_2(2) & f_2(3) & f_2(4) & f_2(5) & f_2(6) & \dots \\ f_3 & = & f_3(1) & f_3(2) & f_3(3) & f_3(4) & f_3(5) & f_3(6) & \dots \\ f_4 & = & f_4(1) & f_4(2) & f_4(3) & f_4(4) & f_4(5) & f_4(6) & \dots \\ f_5 & = & f_5(1) & f_5(2) & f_5(3) & f_5(4) & f_5(5) & f_5(6) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Cantor's "slingermethode" (vergelijk de aftelinstructie voor de positieve breuken) levert nu aan elke gast een kamer.

Blz. 44, it. 4.9: Stel eerst $A \leq_1 B$. Dan bestaat er dus een injectie van A naar B . Nu kunnen er twee dingen aan de hand zijn:

1. Er bestaat wel omgekeerde injectie van B naar A .
2. Er bestaat geen omgekeerde injectie van B naar A .

In het eerste geval geldt $A =_1 B$; in het tweede geval geldt $A <_1 B$.

Stel omgekeerd dat $A <_1 B$ of $A =_1 B$. Als $A <_1 B$ dan *a fortiori* $A <_1 B$. Als $A =_1 B$ dan bestaat er een bi-jectie tussen A en B dus zeker een injectie van B naar A .

Blz. 44, it. 1: Neem de inbedding $\iota : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$.

Blz. 44, it. 4: Neem de inbedding $\iota : A \rightarrow B$.

Blz. 44, it. 4: Elke inbedding $f : A \rightarrow B : x \mapsto x$ is een injectie.

Blz. 44, it. 4.12: Dat $\mathbb{N} \times \mathbb{N} =_1 \mathbb{N}$ volgt uit een eerdere opgave (Cantor's zig-zag methode). Dat

$$\mathbb{N} =_1 \mathbb{Z} =_1 \mathbb{Q} =_1 \mathbb{N} \times \mathbb{N} =_1 \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} =_1 \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

volgt uit $\mathbb{N} =_1 \mathbb{Z} =_1 \mathbb{Q}$ en de implicatie

$$A =_1 B \Rightarrow A \times A =_1 B \times B.$$

We bewijzen het laatste. Stel $A =_1 B$ dan is er een bi-jectie tussen A en B . Maar dan is

$$(a_1, a_2) \mapsto (f(a_1), f(a_2))$$

óók een bi-jectie tussen $A \times A$ en $B \times B$. (Het is niet moeilijk zelf na te gaan deze laatste functie van paren naar paren inderdaad 1-1 en surjectief is.)

Nu nog te bewijzen dat $\mathbb{R} \times \mathbb{R} =_1 \mathbb{R}$. We bewijzen eerst dat $(0, 1)^2 =_1 (0, 1)$, door coördinaten in het vierkant $(0, 1)^2$ decimaal te representeren, en te bewijzen dat

$$(0.d_1d_2d_3\dots, 0.d'_1d'_2d'_3\dots) \mapsto 0.d_1d'_1d_2d'_2d_3d'_3\dots \quad (8)$$

injectief is. Welnu, wat zou kunnen verhinderen dat (8) niet 1-op-1 is? Als twee verschillende cijferreeksen leiden naar hetzelfde getal. Wanneer is dat? Dat is als twee paren worden afgebeeld op twee verschillende expansies die eigenlijk hetzelfde getal vertegenwoordigen, zoiets als

$$0.1234999\dots \quad \text{en} \quad 0.1235000\dots$$

Ga na dan één van de twee paren dan in beide coördinaten een repeterende 9 in de decimale expansie bezit, en het andere paar niet. Als we nu gewoon repeterende 9's in paren verbieden, dan zien we dat de functie (8) nog steeds $(0, 1)^2$ als domein heeft, en echt injectief is.

Blz. 44, it. 1: Een compositie van twee injecties is een injectie.

Blz. 45, it. 4.15: De functie $(g^{-1})|_{A_B}$ is welgedefinieerd, maar er is niet zo makkelijk van te bewijzen dat deze surjectief is. Van $g|_{B_B}^{-1}$ gaat dat makkelijker, omdat gebruik kan worden gemaakt van de eigenschappen van $g|_{B_B}$.

Blz. 46, it. 4.16: Stel eerst $A <_1 B$. Per definitie geldt dan $A \leq_1 B$ en $A \neq_1 B$. Uit $A \leq_1 B$ concluderen we dat er een injectie van A naar B bestaat. Als er wel een omgekeerde injectie zou bestaan, dan zou $A =_1 B$, wat niet strookt met onze aanname. Dus er bestaat geen omgekeerde injectie van B naar A .

Stel omgekeerd dat een injectie van A naar B bestaat, maar niet omgekeerd. Uit het feit dat er een injectie van A naar B bestaat kunnen we $A \leq_1 B$ afleiden. Verder kunnen we afleiden dat $A \neq_1 B$ door aan te nemen dat $A =_1 B$. Als $A =_1 B$ zou gelden, dan zou er een bi-jectie tussen A en B bestaan, dus ook een injectie van B naar A , en die conclusie strookt niet met onze oorspronkelijke aanname. We moeten concluderen dat $A \neq_1 B$.

Blz. 46, it. 4.17: Stel $f: A \rightarrow B$ is toch een injectie. Per definitie betekent $B <_1 A$ zo veel als

$$B \leq_1 A \quad (9)$$

maar

$$A \neq_1 B. \quad (10)$$

Stel $f: A \rightarrow B$ is een injectie. Dan per definitie

$$A \leq_1 B. \quad (11)$$

Met de stelling van Schröder-Bernstein geldt (9), (11) $\Rightarrow A =_1 B$, wat in strijd is met (10). Dus f is niet injectief.

Blz. 46, it. 1: Een aftelling g van $A \cup B$ ontstaat nu door eerst $B - A$ op te sommen en te vervolgen met de aftelling van de A . Als $B - A$ k elementen heeft en f een aftelling van A is, dan kan g formeel als volgt worden gedefinieerd:

$$g(n) = \begin{cases} \text{het } n^{\text{e}} \text{ element van } B - A & \text{als } n < k \\ f(n - k) & \text{als } n \geq k \end{cases}$$

Blz. 46, it. 2: (Vergelijk opdracht 3.6) Laat f een aftelling zijn van A , en g een aftelling van B . Definieer nu een aftelling h van $A \cup B$ als volgt: neem om en om het volgende element van A (volgens aftelling f) dat je nog niet bent tegengekomen en het volgende nieuwe element van B (volgens g).

Blz. 46, it. 3: Er geldt $A \cap B \subseteq A$, en A is aftelbaar. Een deelverzameling van een aftelbare verzameling is aftelbaar.

Blz. 46, it. 4: Laat $a_0, a_1, a_3, \dots$ een aftelling zijn van A , en $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots$ van B . Dan kunnen de elementen van $A \times B$ weer als volgt worden gerangschikt:

$$\begin{array}{ccccccc} \langle a_0, b_0 \rangle & \langle a_0, b_1 \rangle & \langle a_0, b_2 \rangle & \langle a_0, b_3 \rangle & \cdots \\ \langle a_1, b_0 \rangle & \langle a_1, b_1 \rangle & \langle a_1, b_2 \rangle & \langle a_1, b_3 \rangle & \cdots \\ \langle a_2, b_0 \rangle & \langle a_2, b_1 \rangle & \langle a_2, b_2 \rangle & \langle a_2, b_3 \rangle & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Tel weer af als in de breuken-procedure van Cantor.

Blz. 46, it. 5: Aftelling f van A is als volgt om te zetten in een aftelling h van $A - B$: h is gelijk aan f , behalve dat de elementen van $A \cap B$ (dat zijn er immers maar eindig veel) worden overgeslagen.

Blz. 46, it. 4.20: Allemaal door herhaald toepassen van het resultaat van de vorige opgave. Officieel gaat dit met volledige inductie naar het aantal gebruikte verzamelingstheoretische operatoren.

Blz. 46, it. 4.21: Neem $X = \mathbb{R}$ en $A = \emptyset$. Had jij dit tegenvoorbeeld ook? Zijn er eenvoudiger tegenvoorbeelden? Zo ja, waarom? Zo nee waarom niet?

Blz. 46, it. 4.22: Vereniging is verzamelingen achter elkaar zetten, doorsnede is deelverzameling-argument.

Blz. 46, it. 4.23: Vereniging is met Cantor-veegmethode, doorsnede is deelverzameling-argument.

Blz. 47, it. 4.24: Neem $f: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ met $f(n)(k) = 1$ desda $k = n$. Dan is f een injectie.

Blz. 47, it. 4.26: Beschouw eerst de echte beginstukken van $\mathbb{N}$. Noem $B_0 = \{0\}$, $B_1 = \{0, 1\}$, en in het algemeen $B_i = \{0, 1, \dots, i\}$. Hieruit is als volgt een aftel-instructie voor de eindige deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ te destilleren: neem eerst de deelverzamelingen van B_0 : dat levert $\emptyset$ en kijk vervolgens naar de deelverzamelingen van B_1 : neem al die deelverzamelingen op die nog niet in de aftelling aanwezig zijn. Herhaal dit procédé voor elke volgende B_i (voor $i \geq 1$ levert dit 2^i nieuwe deelverzamelingen op.)

$$\begin{array}{lll} B_0: & 0 & \longrightarrow \emptyset \\ & 1 & \longrightarrow \{0\} \\ B_1: & 2 & \longrightarrow \{1\} \\ & 3 & \longrightarrow \{0, 1\} \\ B_2: & 4 & \longrightarrow \{2\} \\ & 5 & \longrightarrow \{0, 2\} \\ & 6 & \longrightarrow \{1, 2\} \\ & 7 & \longrightarrow \{0, 1, 2\} \\ & \vdots & \end{array}$$

Een korte recursieve beschrijving van deze aftelling f is:

- $f(0) = \emptyset$
- $f(n) = f(n - 2^k) \cup \{k\}$ als $2^k \leq n < 2^{k+1}$

Blz. 47, it. 4.27: Laat f de aftelling zijn van alle eindige deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ uit de vorige opgave. Definieer nu een aftelling g van de co-finite deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ door: $g(X) = f(\mathbb{N} - X)$ voor elke co-finite X .

Blz. 48, it. 1: Overaftelbaarheid Cartesisch product is te bewijzen middels diagonalisatie-argument op van $\prod_{i=1}^{\infty} \{0, 1\}$.

Blz. 48, it. 2: Het Cartesisch product

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i$$

is aftelbaar onder de voorwaarde dat bijna alle (= alle op eindig veel na) A_i leeg zijn of singleton. Dit zijn voldoende voorwaarden voor aftelbaarheid. Of dit ook noodzakelijke voorwaarden zijn is niet nagegaan.

Blz. 48, it. 3: De tabellen zien er hetzelfde uit, maar hebben een verschillende functie. In de eerste tabel staan alle elementen uit de rij $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ die, *per definitie* aftelbaar is. In de tweede tabel wordt Cantor's diagonaal methode toegepast. In de tweede tabel doen we dus (tegen beter weten in) een poging alle elementen uit de verzameling $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ af te tellen, wat mislukt.

Blz. 48, it. 1: Vermenigvuldig met het product van alle noemers.

Blz. 48, it. 2: $\mathbb{N}$ is aftelbaar, dus voor iedere n is $\mathbb{N}^n$ aftelbaar, dus $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^n$ is aftelbaar. Ga na dat de laatste verzameling 1-op-1 correspondeert met elementen uit $\mathbb{N}[X]$.

Blz. 48, it. 3: Zij $p_1, p_2, p_3, \dots$ een aftelling van $\mathbb{Q}[X]$. Het is (hopelijk) bekend dat iedere n^e -graads veelterm precies n complexe wortels heeft, waarvan een aantal $k \leq n$ reëel is. Dus iedere veelterm p_i bezit in ieder geval eindig veel reële wortels.

De volgende rij is een aftelling van verzameling reële nulpunten van veeltermen over $\mathbb{Q}$:

alle wortels van p_1 , alle wortels van p_2 , alle
wortels van $p_3, \dots$

Blz. 48, it. 4.31: Definieer stratum

$S_n = \{\text{alle veeltermen met constanten binnen } [-n, n],$
en niet meer dan n termen,
 n factoren per term,
en n variabelen per term}

De beperking op factoren impliceert automatisch een beperking op exponenten. Ga na dat S_n eindig is. Vorm $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. Een aftelbare vereniging van aftelbare verzamelingen is aftelbaar.

Blz. 49, it. 1: Waar, als je aanneemt dat er zich eindig veel mensen op de campus bevinden. (Een juiste aanname.)

Blz. 49, it. 2: Waar, als je aanneemt dat er zich eindig veel mensen op deze wereld bevinden.

Blz. 49, it. 3: Waar, als je aanneemt dat er dat er eindig veel zandkorrels op de wereld liggen.

Blz. 49, it. 4: Onbekend of deze uitspraak waar is. Momenteel¹ is namelijk onbekend of het universum eindig is. Mocht dat zo zijn dan is deze bewering waar. Als het universum aftelbaar oneindig of overaftelbaar oneindig is, dan is de bewering hoogstwaarschijnlijk omwaar,—tenzij kabouter Plop daadwerkelijk aan de wieg heeft gestaan van aftelbaar veel (in het aftelbare geval) of overaftelbaar veel (in het overaftelbare geval) stukjes materie.

Blz. 49, it. 5: Waar: alleen 2 is niet oneven.

Blz. 49, it. 6: Onwaar. Stel van niet. Dan zijn eindig veel priemgetallen niet deelbaar door zeven, en de rest wel. Maar dat kan niet. Wat er zijn oneindig veel priemgetallen dus “de rest” is een oneindige verzameling. Priemgetallen zijn niet deelbaar door zeven, dus alle getallen in de rest zijn niet deelbaar door zeven.

Blz. 49, it. 7: Waar: “slechts” aftelbaar oneindig veel reële getallen zijn geheel.

Blz. 49, it. 8: Waar: “slechts” aftelbaar oneindig veel reële getallen kunnen geschreven worden als een breuk.

Blz. 49, it. 9: Waar: “slechts” aftelbaar oneindig veel reële getallen kunnen een oplossing zijn van een veelterm met rationale coëfficiënten. (Zie onderdeel 6De stelling van Schröder-BernsteinItem.273 van Opgave 4.30De stelling van Schröder-Bernsteinopgave.30 op blz. 48De stelling van Schröder-Bernsteinopgave.30.)

Blz. 49, it. 10: Waar. De verzameling van oneindige bitstrings is overaftelbaar. (Geloof je dit niet, zet ze dan op een rij en pas Cantor's diagonaal-argument toe.) De verzameling bitstrings met eindig veel 1-en is echter “slechts” aftelbaar. Eén manier om die verzameling af te tellen is ze te zien als een verzameling eindige bitstrings, waarbij elke bitstring een oneindige staart van nullen bezit. Elke eindige bitstring heeft maar één zo'n staart en de verzameling eindige bitstrings is aftelbaar.

Blz. 51, it. 4.33: De relatie $\leq_1$ op de klasse V van alle verzamelingen is : $(A, B \text{ en } C \text{ zijn elementen van } V)$

– *reflexief:* Voor elke A geldt dat $A \leq_1 A$. De identieke functie op A is immers een injectie van A naar A .

¹2013.

- *anti-symmetrisch*: Als $A \leq_1 B$ en $B \leq_1 A$, dan $A =_1 B$. Dit volgt direct uit Schröder-Bernstein. Een subtiel punt is dat anti-symmetrie eigenlijk een sterkere eis stelt aan $\leq_1$: namelijk *identiteit* ($A = B$ in bovenstaande formule) in plaats van *gelijkmatigheid* ($A =_1 B$). $\leq_1$ voldoet duidelijk niet aan deze sterkere eis. Omdat $=_1$ hier echter meer passend is dan $=$, zou het beter zijn de definitie van *anti-symmetrie* wat af te zwakken.
- *transitief*: als $A \leq_1 B$ en $B \leq_1 C$ dan $A \leq_1 C$. Immers als f een injectie is van A naar B en g is een injectie van B naar C , dan is $g \circ f$ een injectie van A naar C . We gaan dit laatste voor de goede orde even na. Stel dat $g \circ f(x) = g \circ f(y)$, dus $g(f(x)) = g(f(y))$. Dan $f(x) = f(y)$ want g is injectief. Maar dan $x = y$ want f injectief. $\square$

Blz. 51, it. 4.34: Bijvoorbeeld: ‘even snel lopen als’ en ‘even rijk zijn als’.

Blz. 52, it. 1: 5.

- Voor $\{1\}$ is er één mogelijke relatie: $\{\{1\}\}$.
- Voor $\{1, 2\}$ zijn er twee mogelijke relaties: $\{\{1, 2\}\}$ en $\{\{1\}, \{2\}\}$.
- Voor $\{1, 2, 3\}$ zijn er vijf: $\{\{1, 2, 3\}\}$, $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$, $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$, $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.

Je ziet dat er een patroon ontstaat: de equivalentieklassen voor $\{1, \dots, n+1\}$ ontstaan uit die van $\{1, \dots, n\}$ door het element $n+1$ bij één van de klassen uit de vorige generatie te stoppen, óf in een eigen singleton klasse te stoppen.

Blz. 52, it. 2:

$$B_n = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} B_{n-1-j} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{n-1-j} B_{n-1-j} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} B_j.$$

Immers,

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

voor alle n en k .

Blz. 52, it. 4.36: –

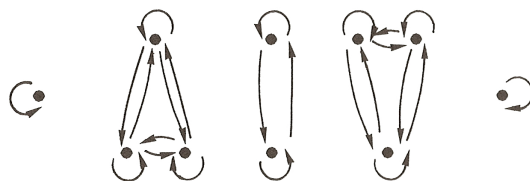
$[1]_R = \{x \in N \mid x \text{ is oneven}\} = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ (de verzameling oneven natuurlijke getallen)

– $[0]_R = \{x \in N \mid x \text{ is even}\} = \{0, 2, 4, \dots\}$

Blz. 52, it. 4.37: 121 klassen: voor ieder jaar één, ook voor de baby's van 0.

Blz. 52, it. 4.38: De pijlrelatie induceert 3 equivalentie-klassen.

Blz. 53, it. 4.39: De equivalentierelatie



Blz. 53, it. 4.40: $[\emptyset]_{=1}$ is de verzameling met als elementen alle verzamelingen die even groot zijn als $\emptyset$. Dit is alleen $\emptyset$ zelf, dus het aantal elementen is 1. De representant $\emptyset$ bevat nul elementen.

Blz. 53, it. 4.41: $2^{\{\emptyset\}}$ is een representant van $[2^{\{\emptyset\}}]_{=1}$ en $2^{\{\emptyset\}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Deze (en daarmee elke andere) representant telt dus 2 elementen.

Blz. 55, it. 4.42: We moeten bewijzen dat $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \Leftrightarrow a = c \text{ en } b = d$. Twee verzamelingen A en B zijn gelijk aan elkaar desda voor elke $x \in A$ geldt dat $x \in B$ en omgekeerd. Laat $A = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ en $B = \{\{c\}, \{c, d\}\}$.

Stel nu eerst dat $A = B$. Dan moet gelden dat $\{a\}$ en $\{a, b\}$ de elementen zijn van B . Er zijn dan twee mogelijkheden:

- $\{a\} = \{c\}$ en $\{a, b\} = \{c, d\}$. Uit het eerste volgt $a = c$ en daarmee uit het tweede ook $b = d$.
- $\{a\} = \{c, d\}$ en $\{a, b\} = \{c\}$. Dit impliceert dat $a = c = d$ en $a = b = c$, kortom $a = b = c = d$.

In beide gevallen geldt dus $a = c$ en $b = d$.

Omgekeerd, als $a = c$ en $b = d$, dan hebben A en B dezelfde elementen, zoals eenvoudig valt na te gaan. Dus dan $A = B$. $\square$

Blz. 55, it. 4.43: Een andere codering is bijvoorbeeld $\langle a, b \rangle = \{\{a, 1\}, \{b, 2\}\}$. Het bewijs is analoog aan het vorige. $\square$

Blz. 59, it. 1: Exponenten van een priemontbinding moeten altijd corresponderen met een rangnummer van een symbool. Dat kan op twee manieren fout gaan: (1) symbolen zijn niet genummerd vanaf 1 of in de nummering zitten gaten; (2) exponenten van een priemontbinding zijn te groot om te kunnen worden terugvertaald naar een symbool. Probleem (1) is op te lossen door alle symbolen doorlopend te nummeren vanaf 1; probleem (2) is op te lossen door grote exponenten te laten verwijzen naar spaties (maar dan heb je geen unieke strings meer) of, als je unieke strings wilt, door geïndexeerde spaties. Door spaties te indexeren, i.e., door er een nummertje aan te hechten ontstaan oneindig veel verschillende spaties.

Blz. 59, it. 2: Afhankelijk van wat je hebt afgesproken:

1. Ongedefinieerd. (Omdat er geen symbolen bij grote getallen horen.)
2. De string “ha” gevolgd door drie spaties: “ha___”.
3. De string “ha” gevolgd door drie geïndexeerde spaties:

“ha_9,761,451_7,116,167_9,761,666”.

Blz. 60, it. 5.5: Ieder programma dat een berekenbare functie f implementeert, kan worden veranderd in een syntactisch ander programma door er spaties of commentaar aan toe te voegen. We krijgen een andere string en dus een ander programma. De parser zal uiteraard terugkomen met eenzelfde structuur, en de semantiek (betekenis) van het programma zal natuurlijk niet afwijken, maar dat is juist wat gevraagd werd.

Blz. 60, it. 5.6: Zolang een programma nog “ bezig ” is, i.e., nog wordt uitgevoerd zonder dat er een resultaat is afgedrukt, kunnen we niet zeggen of j bezig is $f(n)$ te berekenen dan wel gewoon maar doorloopt zonder ooit nog iets af te drukken. Zolang een programma nog “ bezig ” is kunnen we dus in het algemeen nooit weten of het ooit zal stoppen.

Blz. 61, it. 2: De constante functie $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}: x \mapsto 0$ is berekenbaar maar niet inverteerbaar. I.h.a. geldt dat niet-injectieve functies niet inverteerbaar zijn.

Blz. 61, it. 1: Programma j heeft input n onmiddellijk als output terug.

Blz. 61, it. 2: Laat j en j' twee programma's zijn die f resp. f' uitrekenen. Als we $f' \circ f(n)$ willen weten, dan laten we eerst j los op n . Als $f \uparrow n$ zal $f' \circ f \uparrow n$ en zal j terecht niet stoppen. Als $f \downarrow n$ zal j uiteindelijk de waarde $f(n)$ teruggeven, waar j' verder mee aan de slag kan. Als $f' \uparrow n$ zal $f' \circ f \uparrow n$ en zal j' terecht niet stoppen. In het andere geval zal j' de waarde $f(f'(n)) = f' \circ f(n)$ teruggeven.

Blz. 61, it. 3: $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ is bi-jectief heeft dus een inverse f^{-1} . $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ is berekenbaar en injectief. Met het antwoord van Opgave 5.5 Berekenbaarheidstelling.5 (blz. 60 Berekenbaarheidstelling.5) kunnen we dus concluderen dat f^{-1} berekenbaar is. Als $g \circ f$ berekenbaar zou zijn, dan zou $(g \circ f) \circ f^{-1}$ dat ook zijn. (De compositie van twee berekenbare functies is berekenbaar.) Maar

$$(g \circ f) \circ f^{-1} = g \circ (f \circ f^{-1}) = g \circ I = g.$$

Maar g is onberekenbaar. Tegenspraak. (Merk op dat $f \circ f^{-1}$ echt I is, want f^{-1} is totaal en bi-jectief.)

Blz. 61, it. 1: Stel X is beslisbaar. Er is dus een programma $j/1 \in J$ dat over X kan beslissen. Per definitie is de karakteristieke functie dan berekenbaar! Omgekeerd is de implicatie net zo direct: stel dat de karakteristieke functie van X berekenbaar. Er is dus een programma, $j/1$, welke $\chi(X)$ kan uitrekenen. Precies dit programma beslist over lidmaatschap in X !

Blz. 61, it. 2: Schrijf een (mogelijk gigantisch maar altijd eindig) case-statement die lidmaatschap in X verifieert.

Blz. 61, it. 3: Stel dat j_X over X kan beslissen, en j_Y over Y . Zij $n \in \mathbb{N}$ geven. Voor $j_X(n)$ en $j_Y(n)$ na elkaar uit. Dat kan, want zowel $j_X(n)$ als $j_Y(n)$ zijn beslissingsalgoritmen. Combineer na afloop beide antwoorden.

Blz. 61, it. 5.11: De oneindige rij

$$(1 + \frac{1}{2})^2, (1 + \frac{1}{3})^3, (1 + \frac{1}{4})^4, \dots$$

stijgt naar e , en de oneindige rij

$$\frac{1}{(1 - \frac{1}{2})^2}, \frac{1}{(1 - \frac{1}{3})^3}, \frac{1}{(1 - \frac{1}{4})^4}, \dots$$

daalt naar e . (Sneller dan dat de eerste rij naar e stijgt, maar dat is verder irrelevant.)

Een programma om te kunnen beslissen over $E = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < e\}$ zou als volgt kunnen werken. Laat $x \in \mathbb{Q}$ het getal zijn waarvoor we moeten beslissen of het links of rechts van e ligt. (Er geldt $x \neq e$ omdat $e \notin \mathbb{Q}$). Ontwikkel nu steeds om beurten een element uit één van beide reeksen. Overschrijdt de stijgende reeks op enig moment x , dan was $x < e$. Daalt de andere reeks op enig moment onder x , dan was $e < x$. Omdat $x \neq e$ moet één van beide gebeurtenissen ooit plaatsvinden.

Blz. 61, it. 5.12: A problem is decidable if there exists a computer program that decides it. However, we don't need to be able to construct one program. We simply have to prove the existence of a program that decides it. Pick a program M1 that always prints YES and halts, and pick another program M2 that always prints NO and halts. We have two cases: If aliens exist then program M1 does the job, if aliens don't exist then program M2 does the job. So in both cases there is a program that does the job and this problem is hence decidable (of course we don't know which of these two programs actually decides it, but we know that such a program exists!).

In general, for any one question, or any finite number of questions, there is always a decider. Decidability becomes interesting only when the language is infinite. So, the set of all theorems mankind has proven is, trivially, decidable. This does not mean that we are over-trivializing unknown problems. It just means that the theory of computation considers any finite language trivial. The theory of computation is more about the structure of infinite sets (languages) that can be defined using finite means (like a machine). What these sets mean is not, technically speaking, part of the study. This is often a source of great confusion in people who don't understand this difference, but use Turing's undecidability arguments in their philosophical arguments (very similar to how quantum theory is misinterpreted in many arguments).

Voor de Goldbach-functie geldt hetzelfde verhaal. De functie is berekenbaar, maar we weten niet hoe de functie er uit ziet, meer bepaald of deze identiek 1 of identiek 0 is.

Blz. 61, it. 5.13: Veronderstel eerst dat f een totale niet-dalende berekenbare functie is. Als f 's bereik eindig is, dan is f 's bereik zeker beslisbaar. (Maak zo nodig Opgave 2 BeslisbaarheidItem.313, blz. 61 BeslisbaarheidItem.313.) Als f 's bereik oneindig is, dan kunnen we er als volgt over beslissen. Stel $x \in \mathbb{N}$. Enumereer f totdat $f(n) = x$ (print 1) of $f(n) > x$ (print 0,

immers f is niet-dalend). Omdat f een oneindig bereik heeft moet één van de twee gebeurtenissen zich uiteindelijk voordoen.

Veronderstel omgekeerd dat X beslisbaar is. Definieer f door $f(0) = 0$ en

$$f(n) = \begin{cases} n, & n \in X \\ f(n-1), & \text{anders.} \end{cases}$$

Het bereik van f is nu $X \cup \{0\}$ (ga na!). De functie f is nu makkelijk om te zetten naar een functie f' met bereik X , door het eerste stuk (met bereik $\{0\}$) te liften naar het minimum van X . (Tekent de grafiek in geval van onduidelijkheid!) Om aan te tonen dat f niet-dalend is, toen we eerst dat $f(n) \leq n$, voor alle n . Dit kan worden gedaan met volledige inductie naar n . Nu $f(n) = n > n-1 \geq f(n-1)$ danwel $f(n) = f(n-1)$. Dus in beide gevallen $f(n) \geq f(n-1)$. De volgende pseudo-code toont dat f berekenbaar is:

Gegeven: n . $r := n$.

```

zolang  $\chi(X)(r) = 0$  en  $r > 0$  doe {
     $r := r - 1$ 
}

```

Geef r terug.

Blz. 62, it. 5.14: De verzameling X bevat in ieder geval de eerste 34 kwadraten en mogelijk meer. Het programma j kan ergens na die twee uur nog getallen afdrukken (dan bevat X meer), of niet (en dan is X eindig). Dat is alles wat we na twee uur weten.

Blz. 62, it. 1: Stel $j/0$ somt X op. Voeg aan een eind van j een oneindige while-loop o.i.d. toe, zodat we zeker weten dat j nooit zal stoppen. (Wat dat voor zin heeft zien we later.) Het volgende programma, $j'/1$, stopt precies op alle elementen van X :

Stel n is gegeven. Voer j uit, en wacht totdat n wordt afgedrukt.

– Als $n \in X$ zal j dit getal afdrukken.

Programma j' kan dan j onderbreken, en daarna zelf ook stoppen. stoppen.

– Als $n \notin X$ zal j dit getal nooit afdrukken, en zal j , dus ook j' , nooit stoppen.

In de laatste conditie gebruikten we de kennis dat j nooit zal stoppen.

Stel, omgekeerd, dat $j/1$ een programma is dat precies op alle elementen van X stopt. Het volgende programma $j'/0$ somt X op:

Voer j “quasi-parallel” uit op $\mathbb{N}$:

- eerst één stap van $j(0)$
- dan één stap van $j(0)$ en één stap van $j(1)$ (de uitvoering van $j(0)$ is nu twee stappen ver)
- dan één stap van $j(0)$, één stap van $j(1)$, en één stap van $j(2)$ (de uitvoering van $j(0)$ is nu drie stappen ver, de uitvoering van $j(1)$ is twee stappen ver, en de uitvoering van $j(2)$ is één stap ver)

• ...

Als nu alle n waarvoor $j(n)$ eindigt worden afgedrukt, dan krijgen we op deze manier een opsomming van X .

Blz. 62, it. 2: X heet *semi-beslisbaar* als en slechts als er een programma $j/1 \in J$ bestaat dat stopt **en** 1 **afdrukt** op precies alle elementen uit X . Uiteraard zijn programma's die stoppen op input n om te schrijven naar programma's die stoppen op input n en daarna een 1 af drukken, en omgekeerd.

Blz. 63, it. 5.16: Veronderstel dat een niet-lege verzameling $X \subseteq \mathbb{N}$ opgesomd wordt door j . Laat $x_0 \in X$ willekeurig. Beschouw de volgende totale functie f :

$$f(n) = \begin{cases} x & \text{als } f \text{ na } n \text{ stappen resultaat } x \text{ geeft,} \\ x_0 & \text{anders.} \end{cases}$$

(We nemen aan dat per rekenstap hoogstens één getal kan worden afgedrukt. Is dat niet zo, dan verkleinen we de stapgrootte.)

Blz. 63, it. 5.17: De eerste methode is correct maar de tweede methode niet. De eerste methode is correct omdat het altijd mogelijk is de uitvoering van twee programma's te vervlechten door eerst de één wat rekentijd te geven, daarna de ander wat rekentijd te geven, etc. De tweede methode is niet correct omdat het bij opsom-programma's geen zin heeft te gaan wachten op het volgende getal dat wordt afgedrukt, omdat zo'n volgende getal misschien niet meer komt. Herinner dat een opsom-programma niet verplicht is te stoppen na het afdrukken van een eventueel laatste getal.

Blz. 63, it. 1: Zij j en j' programma's die X resp. Y opsommen. Door de uitvoering van j en j' af te wisselen, ontstaat een opsomming van $X \cup Y$. (Herinner dat het afdrukken van doublures niet verboden is.)

Blz. 63, it. 2: Laat j en j' hun uitvoer niet afdrukken, maar wegstoppen in twee datastructuren D resp. D' . Wissel de uitvoering van j en j' af. Stopt j een volgend getal n in D , controleer dan of $n \in D'$, zo ja druk n af. Stopt j' een volgend getal n in D' , controleer dan of $n \in D$, zo ja druk n af.

Blz. 63, it. 5.19: Laat $j/0$ een non-deterministisch programma zijn dat zo af en toe getallen afdrukt. we voeren de volgende notatie in:

$$(0, n_1, \dots, n_k)$$

correspondeert met de situatie dat j inmiddels k keuzes heeft gemaakt met uitkomst $n_1, \dots, n_k$. Dus j wordt vertegenwoordigt door (0) , en f na te hebben gekozen voor 5 bij de eerste keuzemogelijkheid, 3 bij de tweede keuzemogelijkheid en 999 bij de derde keuzemogelijkheid, wordt vertegenwoordigt door $(0, 5, 3, 999)$. Laat s het

aantal stappen zijn sinds de laatste keuzemogelijkheid. Omdat

$$Z = \{(0, n_1, \dots, n_k, s) \mid k \geq 0, n_i \geq 0, 1 \leq i \leq k, s \geq 0\}$$

aftelbaar is (enumereer bijvoorbeeld door $\max\{\max.\text{length}, \max.\text{element}, \max.\text{steps}\}$), alle executie-takken kunnen worden gesimuleerd door een deterministisch programma dat één voor één de elementen van Z afdruckt.

De andere kant van de equivalentie is makkelijk, omdat ieder deterministisch programma per definitie een non-deterministisch programma is. (Een non-deterministisch programma is immers een programma waar op bepaalde punten verschillende het berekeningstraject *kan* vertakken.)

Blz. 63, it. 5.20: Laat $j/0$ de verzameling X opsommen, en laat $j'/0$ de verzameling Y opsommen. Voer j en j' pseudo-gelijktijdig uit door hun uitvoering te vervlechten. Drukt j een getal m af, druk dan alle paren

$$\{(m, y) \mid y \text{ reeds afgedrukt door } j'\}$$

af. Drukt j' een getal n af, druk dan alle paren

$$\{(x, n) \mid x \text{ reeds afgedrukt door } j\}$$

af. Op deze manier wordt $X \times Y$ opgesomd.

Blz. 63, it. 5.21: Allemaal door herhaald toepassen van het resultaat van Opgave 5.18 Opsombaarheidopgave.18 en 5.20 Opsombaarheidopgave.20. Officieel gaat dit met volledige inductie naar het aantal gebruikte verzamelingstheoretische operatoren.

Blz. 63, it. 1: Laat X_i opgesomd worden door programma j_i , waarbij $i \geq 0$. Voer de programma's $\{j_i\}_{i=0}^\infty$ incrementeel quasi-parallel uit:

- eerst één stap van j_0
- dan één stap van j_0 en één stap van j_1 (de uitvoering van j_0 is nu twee stappen ver)
- dan één stap van j_0 , één stap van j_1 , en één stap van j_2 (de uitvoering van j_0 is nu drie stappen ver, de uitvoering van j_1 is twee stappen ver, en de uitvoering van j_2 is één stap ver)
- ...

Uiteindelijk wordt alles uit $\cup_{i=1}^\infty X_i$ afgedrukt.

Blz. 63, it. 2: In Opgave 4.23 De stelling van Schröder-Bernsteinopgave.23, blz. 47 De stelling van Schröder-Bernsteinopgave.23 zagen we al dat het aftelbaar oneindige product van eindige verzamelingen helaas niet meer aftelbaar is. Dus zeker niet opsombaar. (Immers, niet aftelbaar impliceert niet opsombaar.)

Blz. 63, it. 5.23: Vermoedelijk niet. Wij kunnen i.i.g. niet bewijzen dat de aftelbare doorsnijding $\cap_{i=1}^\infty X_i$ opsombaar is. Het is ook niet erg waarschijnlijk: ook met dovetailing moet een getal bij de opsomming van *alle* instanties zijn verschenen alvorens het afgedrukt mag worden.

Blz. 64, it. 5.24: – Iedere beslisbare verzameling is opsombaar: zij X beslisbaar. Vanwege beslisbaarheid is er een programma j die voor iedere $n \in \mathbb{N}$ kan bepalen of $n \in X$. Schrijf nu het volgende programma j' om X op te sommen:

Laat j voor elk van de getallen $n = 0, 1, 2, \dots$ achtereenvolgens bepalen of $n \in X$. Zo ja, druk dan n af. Op deze manier wordt X opgesomd.

- Als een verzameling zowel opsombaar als complementair opsombaar is, dan is die verzameling beslisbaar: laat j een programma zijn dat X opsomt, en laat j' een programma zijn dat $\mathbb{N} \setminus X$ opsomt. Schrijf nu het volgende programma k om te beslissen of $n \in X$:

Laat n gegeven zijn. Voer j en j' pseudo-gelijktijdig uit door hun executie te vervlechten. Als j het getal n afdruckt, concludeer $n \in X$, en stop. Als j' het getal n afdruckt, concludeer dan dat $n \notin X$, en stop. Omdat

$$n \in \mathbb{N} = X \cup (\mathbb{N} \setminus X)$$

kunnen we er zeker van zijn dat één van beide programma's uiteindelijk n zal afdrukken.

Blz. 65, it. 5.25: Zij j een programma dat over X kan beslissen. Schrijf een programma j' als volgt

Laat n gegeven zijn. Check of n even is. Als n even is, deel het door twee, en laat j controleren of $n/2 \in X$. Zo ja, laat j' dan 1 teruggeven, zo nee, laat j' dan 0 teruggeven. Als n oneven is, dan kan het zeker geen tweevoud zijn van een element in X , laat j' dan 0 teruggeven.

Blz. 65, it. 5.26: De uitwerking van deze opgave lijkt op de uitwerking van Opgave 5.18 Opsombaarheidopgave.18. Laat $j/0$ de verzameling X opsommen, en laat $j'/0$ de verzameling Y opsommen. Het programma j'' dat twee disjuncte verzamelingen X' en Y' afdruckt, zó dat

$$X' \subseteq X, Y' \subseteq Y, \text{ en } X' \cup Y' = X \cup Y,$$

ziet er als volgt uit:

Voer j en j' pseudo-gelijktijdig uit door hun uitvoering te vervlechten met de zwaluwstaart-methode. Houd ook weer in twee datastructuren D en D' bij wat j en j' afdrukken. Als j op het punt staat een getal n af te drukken, controleren we eerst of het al niet door j' is afgedrukt. Is dat het geval, dan wordt nu niets afgedrukt. Als j' op het punt staat een getal n af te drukken, controleren we eerst of het al niet door j is afgedrukt. Is dat het geval, dan wordt er weer niets afgedrukt. Op deze manier drukken j en j' twee disjuncte verzamelingen X' en Y' af die aan de gewenste eisen voldoen.

Blz. 65, it. 5.27: Zij X een oneindige opsombare verzameling. Per definitie van opsomming bestaat er dus een programma $\pi/0$ welke X kan opsommen. Als deze opsomming geen doublures bevat, zijn we klaar, immers de functie die elk natuurlijk getal n afbeeldt op het n -de opgesomde getal is een totale berekenbare injectieve functie met beeld X (ga na!). (Voor de volledigheid: een implementatie van f , het programma $j/1$, zou als volgt kunnen werken. Het ontvangt een getal, n , en laat π achtereenvolgens n keer opsommen. Het n -de getal is dan het beeld van f .)

Als π 's opsomming wel doublures bevat, dan valt er wel een programma $\pi'/1$ te bedenken dat X opsomt zonder doublures (ga na!). Dit programma $\pi'/1$ implementeert dan weer een totale berekenbare injectieve functie met beeld X .

Blz. 65, it. 1: Neem een Diofantische vergelijking $f(n, x_1, \dots, x_k) = 0$. Nu maken we een algoritme dat gewoon alle mogelijke waarden probeert voor $n, x_1, \dots, x_k$, in stijgende volgorde van de som van hun absolute waarden, en printen n elke keer als $f(n, x_1, \dots, x_k) = 0$. Dit algoritme zal uiteraard altijd lopen en precies een lijst van de n waarvoor $f(n, x_1, \dots, x_k) = 0$ heeft een oplossing in $x_1, \dots, x_k$.

Blz. 73, it. 6.1: Bijvoorbeeld de volgende redenering:

Als ik slaap, studeer ik niet.
 Als ik niet slaap, studeer ik wel.

Deze redenering is ongeldig, want ik kan wakker zijn en toch niet studeren.

Blz. 73, it. 6.2: Een tegenvoorbeeld is bijvoorbeeld

Als ik mijn planten geen water geef, gaan ze dood.
 Mijn planten gaan dood.
 Ik geef mijn planten geen water.

Deze redenering is ongeldig, want planten kunnen ook doodgaan door te weinig zonlicht of door te veel water.

Blz. 76, it. 7.1:

a	1	0
1	0	1
0	1	0

Blz. 77, it. 7.2: $\wedge, \vee, a$ en $\leftrightarrow$ zijn commutatief. $\rightarrow$ is niet commutatief.

Blz. 77, it. 7.3: We geven de waarheidstafel bij wijze van uitzondering zowel in uitgebreide vorm (links) als in de verkorte (rechts).

p	q	$(p \leftrightarrow q)$	$\neg(p \leftrightarrow q)$	$\neg$	$(p \leftrightarrow q)$
1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1

Bijvoorbeeld $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$ en $p \leftrightarrow \neg q$ zijn logisch equivalent met de gegeven formule.

Blz. 78, it. 7.4: De grammatica genereert 72 zinnen. Immers, Z wordt herschreven tot het rijtje $C D E C D$, zodat er $3 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 = 72$ zinnen zijn.

Blz. 78, it. 7.5: De regel $Z ::= a Z$ kan willekeurig vaak worden toegepast, resulterend in het rijtje $a a a \dots a Z$ waaruit met de tweede regel $a a a \dots a b$ kan worden afgeleid. Er zijn aldus oneindig veel zinnen afleidbaar.

Algemener: een (BNF) herschrijfgrammatica produceert een oneindig aantal zinnen als er uit het startsymbool (Z) een indirecte afleiding (van 0 of meer stappen, notatie $\Rightarrow^*$) bestaat naar een rijtje met een zg. **recursief** of **nestend** element. Preciezer: (u, v, x, y en z zijn willekeurige rijtjes eindsymbolen, u en v niet beide leeg)

- $Z \Rightarrow^* x A y$ (met als randgeval $A = Z$),
- $A \Rightarrow^+ u A v$, dat wil zeggen A levert in één of meer stappen een rijtje op waar A weer deel van uitmaakt (dit maakt het symbool A en daarmee de grammatica 'nestend')
- $A \Rightarrow^+ z$, dus A kan ook tot een eindrijtje worden herschreven.

Blz. 80, it. 7.6: – Basisstap: de propositieletter p begint met een p .

- Inductiestap: als A een propositieletter is en A begint met een p , dan begint A' ook met een p . □

Blz. 80, it. 7.7: Bewijs: (met inductie naar de grootte van de verzameling A)

- Basisstap: als A nul elementen heeft, dat wil zeggen $A = \emptyset$, dan heeft $2^{\langle A \rangle} = 2^{\langle \emptyset \rangle} = \{\emptyset\}$ dus $1 = 2^0$ element.
- Inductiestap: stel dat voor elke verzameling A met $n - 1$ elementen geldt dat $2^{\langle A \rangle}$ 2^{n-1} elementen bevat (de zg. *inductiehypothese*).

Neem nu een verzameling A met n elementen. Kies een vast element $a \in A$. Elke deelverzameling van A bevat a wel of niet. $2^{\langle A \rangle}$ bevat dus alle deelverzamelingen van $A - \{a\}$ plus al deze deelverzamelingen uitgebreid met a . In formule:

$$2^{\langle A \rangle} = 2^{\langle A - \{a\} \rangle} \cup \{X \cup \{a\} \mid X \in 2^{\langle A - \{a\} \rangle}\}$$

Het aantal elementen van $2^{\langle A \rangle}$ is dus $2 \times 2^{n-1} = 2^n$. □

Blz. 80, it. 7.8:

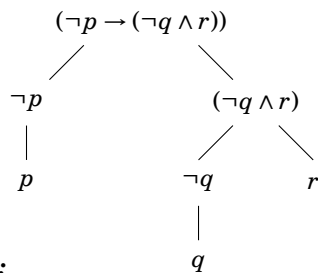
- | | |
|-----------------|------------------|
| 1. onwelgevormd | 8. onwelgevormd |
| 2. onwelgevormd | 9. onwelgevormd |
| 3. welgevormd | 10. welgevormd |
| 4. welgevormd | 11. onwelgevormd |
| 5. onwelgevormd | 12. welgevormd |
| 6. welgevormd | 13. onwelgevormd |
| 7. onwelgevormd | 14. welgevormd |

N.B. Bij 2, 9 en 13 mag blijken het vervolg van § 7.4De syntaxis van de propositielogica section.7.4 ‘welgevormd’ staan.

Blz. 80, it. 7.9: De verzameling welgevormde formules van $\mathcal{T}$ is *aftelbaar*. Een manier om dat in te zien is de volgende. De verzameling is oneindig omdat alle formules van de vorm $\neg \neg \dots \neg p$ er toe behoren. Verder is ze een deelverzameling van de verzameling van alle rijtjes over het eindige alfabet $\{p, q, r, \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Zoals we weten uit § 4.2Aftelbaar versus overaftelbaar section.4.2 is deze verzameling tekenrijtjes aftelbaar. Dus moet de verzameling welgevormde formules van $\mathcal{T}$ ook aftelbaar zijn.

Blz. 81, it. 7.10: De verzameling welgevormde formules van deze $\mathcal{T}$ is eveneens aftelbaar. Het bewijs hiervan is volkomen analoog aan het vorige. Cruciaal hierbij is dat in § 4.2Aftelbaar versus overaftelbaar section.4.2 (opdracht 4.5Aftelbaar versus overaftelbaar opgave.5) is bewezen dat ook bij een *aftelbaar* alfabet de verzameling tekenrijtjes aftelbaar is.

Blz. 81, it. 7.11: Het bereik van het eerste negatie-teken is $(p \wedge (q \vee \neg r))$. Het bereik van het tweede negatie-teken is r .



Blz. 81, it. 7.12:

Het bereik van het eerste negatie-teken is p en van het tweede q .

Blz. 81, it. 7.13:

naaktloper ::=

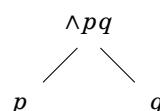
propositieletter | $\neg$ *formule* |
formule $\wedge$ *formule* | *formule* $\vee$ *formule* |
formule $\rightarrow$ *formule* |
formule $\leftrightarrow$ *formule*

formule ::=

propositieletter | $\neg$ *formule* |
(*formule* $\wedge$ *formule*) | (*formule* $\vee$ *formule*) |
(*formule* $\rightarrow$ *formule*) | (*formule* $\leftrightarrow$ *formule*)

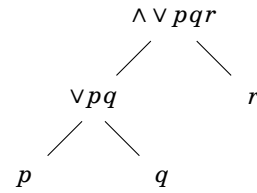
Blz. 82, it. 7.14: – p is identiek aan zijn constructieboom en is al in infixnotatie.

– $\wedge pq$ heeft als constructieboom



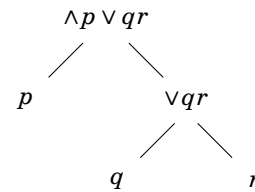
Deze formule correspondeert met $p \wedge q$.

– $\wedge \vee pqr$ heeft als constructieboom



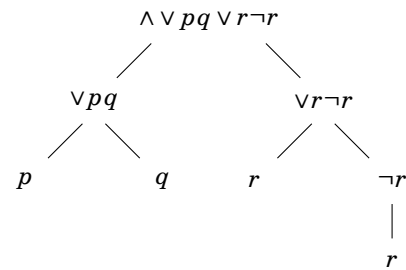
Deze formule correspondeert met $(p \vee q) \wedge r$.

– $\wedge p \vee qr$ heeft als constructieboom



Deze formule correspondeert met $p \wedge (q \vee r)$.

– $\wedge \vee pq \vee r \neg r$ heeft als constructieboom



Deze formule correspondeert met $(p \vee q) \wedge (r \vee \neg r)$.

Blz. 82, it. 7.15: – elke propositieletter uit P is een welgevormde formule van $\mathcal{T}$;

– als φ een welgevormde formule van $\mathcal{T}$ is, dan $\neg \varphi$ ook;
als φ en ψ welgevormde formules van $\mathcal{T}$ zijn, dan $\wedge \varphi \psi$, $\vee \varphi \psi$, $\rightarrow \varphi \psi$ en $\leftrightarrow \varphi \psi$ ook;

– niets anders is een welgevormde formule van $\mathcal{T}$.

Blz. 82, it. 7.16:

formule ::=

propositieletter | $\neg$ *formule* |
 $\wedge$ *formule* *formule* | $\vee$ *formule* *formule* |
 $\rightarrow$ *formule* *formule* | $\leftrightarrow$ *formule* *formule*

Blz. 82, it. 7.17: 1. p 4. $pqr \vee \wedge$

2. $pq \wedge$ 5. $pq \vee rr \neg \vee \wedge$

3. $pq \vee r \wedge$ 6. $r \neg \neg$

Blz. 82, it. 7.18: – elk element van P is een welgevormde formule van $\mathcal{T}$;

– als φ en ψ welgevormde formules van $\mathcal{T}$ zijn, dan $\varphi \neg$, $\varphi \psi \wedge$, $\varphi \psi \vee$, $\varphi \psi \rightarrow$ en $\varphi \psi \leftrightarrow$ ook;

– niets anders is een welgevormde formule van $\mathcal{T}$.

Blz. 82, it. 7.19: – als $p \in P$ dan is (p) een (atomaire) welgevormde formule van $\mathcal{T}$;

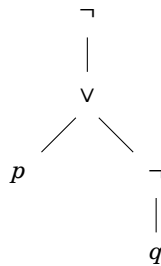
– als φ en ψ propositieletters of niet-atomaire welgevormde formules van $\mathcal{T}$ zijn, dan zijn $(\neg\varphi)$, $(\wedge\varphi\psi)$, $(\vee\varphi\psi)$, $(\rightarrow\varphi\psi)$ en $(\leftrightarrow\varphi\psi)$ ook welgevormde formules;

– niets anders is een welgevormde formule van $\mathcal{T}$.

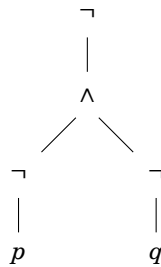
Blz. 82, it. 7.20: 1. de structuurboom van $\neg\neg\neg p$ is:



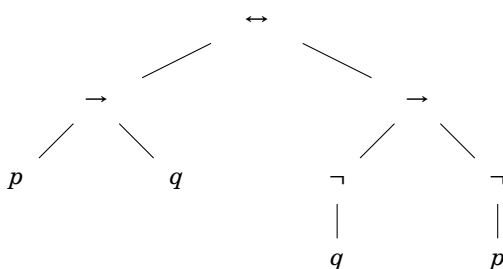
2. de structuurboom van $\neg(p \vee \neg q)$ is:



3. de structuurboom van $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ is:



4. de structuurboom van $((p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p))$ is:



Blz. 84, it. 8.1:

$\neg$	$(p \wedge q)$			$(\neg p \vee \neg q)$	$\neg q$	q
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0

De formules hebben dezelfde waarheidswaarde voor elke interpretatie van de proposities p en q , de waarheidstafels (althans de hoofdkolommen) zijn immers gelijk.

Blz. 84, it. 8.2:

1.

φ	$\vee$	$\neg$	φ
1	1	0	1
0	1	1	0

2.

$(\varphi \wedge \psi)$	$\rightarrow$	φ
1 1 1	1	1
0 0 1	1	0
1 0 0	1	1
0 0 0	1	0

3.

φ	$\rightarrow$	$(\varphi \vee \psi)$		
1	1	1	1	1
0	1	0	1	1
1	1	1	1	0
0	1	0	0	0

4.

$\neg$	φ	$\rightarrow$	$(\varphi \rightarrow \psi)$		
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0

5.

$((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$					$\rightarrow$	φ
1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0

6.

$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi))$	$\rightarrow$	$((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$		
1 1 1 1 1	1	1	1	1
0 1 1 1 1	1	0	1	1
1 1 0 1 1	1	1	0	1
0 1 0 1 1	1	0	1	1
1 0 1 0 0	1	1	1	0
0 1 1 0 0	1	0	1	1
1 1 0 1 0	1	1	0	0
1 1 0 1 0	1	1	0	0
0 1 0 1 0	1	0	1	0

Blz. 85, it. 8.3: De formule $\neg(p \rightarrow p)$ is de enige contradictie. Dit blijkt uit de bijbehorende waarheidstabel die laat zien dat de waarde van de gehele formule steeds 0 is, ongeacht de waarde van de propositieletter:

$\neg$	$(p \rightarrow p)$		
0	1	1	1
0	0	1	0

Alle andere formules zijn tautologieën. Bij wijze van voorbeeld maken we een waarheidstafel voor 4.)

$(p \wedge q)$	$\leftrightarrow$	$\neg$	$(\neg p \vee \neg q)$
1 1 1	1	1	0 1 0
0 0 1	1	0	1 0 1
1 0 0	1	0	0 1 1
0 0 0	1	0	1 1 0

Blz. 85, it. 8.4: Als φ een tautologie is, dan geldt voor elke waardering V dat $V(\varphi) = 1$. Voor elke waardering V geldt nu ook dat $V(\neg\varphi) = 0$; $\neg\varphi$ is dus een contradictie.

Omgekeerd, als φ een contradictie is, dan geldt voor elke waardering V dat $V(\varphi) = 0$, dus ook dat $V(\neg\varphi) = 1$; $\neg\varphi$ is dan een tautologie. $\square$

Blz. 85, it. 8.5: Bijvoorbeeld: p of $p \rightarrow q$.

Blz. 86, it. 8.6: Alleen in rijen waar beide premissen waar zijn (aangegeven door 1) moet de waarde van de conclusie onderzocht worden: deze moet dan steeds 1 zijn, wil de redenering geldig zijn.

φ	φ	$\rightarrow$	ψ	ψ
1	1	1	1	1
0	0	1	1	1
1	1	0	0	0
0	0	1	0	0

Blz. 86, it. 8.7:

φ	$\rightarrow$	ψ	$\neg$	ψ	$\neg$	φ
1	1	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0

Blz. 86, it. 8.8: 1.

φ	$\rightarrow$	ψ	ψ	$\rightarrow$	χ	φ	$\rightarrow$	χ
1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	1	0

2.

φ	$\vee$	ψ	φ	$\rightarrow$	χ	χ	$\vee$	ψ
1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	1	1	1	1	0
1	1	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0

Blz. 86, it. 8.9: 1.

φ	$\neg$	$\neg$	φ
1	1	0	1
0	0	1	0

2.

$\neg$	φ	φ	$\rightarrow$	$(\psi \wedge \neg \psi)$
0	1	1	0	1 0 0 1
1	0	0	1	1 0 0 1
0	1	1	0	0 0 1 0
1	0	0	1	0 0 1 0

3.

$\neg$	$(\varphi \wedge \psi)$	$\neg$	φ	$\vee$	$\neg$	ψ
0	1 1 1	0	1	0	0	1
1	0 0 1	1	0	1	0	1
1	1 0 0	0	1	1	1	0
1	0 0 0	1	0	1	1	0

4.

$\neg$	$(\varphi \vee \psi)$	$\neg$	φ	$\wedge$	$\neg$	ψ
0	1 1 1	0	1	0	0	1
0	0 1 1	1	0	0	0	1
0	1 1 0	0	1	0	1	0
1	0 0 0	1	0	1	1	0

Blz. 86, it. 8.10: Definities uitschrijven.

Blz. 87, it. 1: Ja. Een kortere DNF is bijvoorbeeld $\neg p \vee (p \wedge \neg q)$.

Blz. 87, it. 2: Nee. Zie verder het antwoord van Opgave 8.23 Normaalvormen met tableauxopgave.23.

Blz. 88, it. 8b: Suppose a CNF C is equivalent to (7Conjunctieve normaalvormenItem.432). Suppose further that there is a clause in which proposition letter p does not occur. This is impossible, for choose a model m such that $m \models p$. Flip valuation of p . Clause is still false, while (7Conjunctieve normaalvormenItem.432) becomes true. If all proposition letter must occur in every clause, then it is easy to see that there must be as many clauses as there are rows in the corresponding truth table with a 1. Hence, C must be exponentially large.

Blz. 91, it. 8.14: 1. Dat $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \models (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$ blijkt uit het volgende tableau:

waar $\varphi \wedge (\psi \vee \chi)$ $\varphi, \psi \vee \chi$			onwaar $(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$ $\varphi \wedge \psi, \varphi \wedge \chi$		
waar ψ		onwaar	waar χ		onwaar
waar	onwaar	φ	waar	onwaar	onwaar
				φ	χ

Dat $(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \models \varphi \wedge (\psi \vee \chi)$ blijkt uit:

waar $(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$		onwaar $\varphi \wedge (\psi \vee \chi)$	
waar		waar	onwaar
			$\psi \vee \chi$
			ψ, χ
waar $\varphi \wedge \psi$ φ, ψ	onwaar $\varphi \wedge \chi$ φ, χ	waar $\varphi \wedge \psi$ φ, ψ	onwaar $\varphi \wedge \chi$ φ, χ

Beide tableaux sluiten: de formule-schema's zijn dus logisch equivalent. $\square$

2. Een tableau voor $\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \models (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ is:

waar $\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$			onwaar $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$		
waar φ		onwaar	waar $\psi \wedge \chi$ ψ, χ		onwaar
waar	onwaar	$\varphi \vee \psi$ φ, ψ	waar	onwaar	onwaar
				$\varphi \vee \psi$ φ, ψ	$\varphi \vee \chi$ φ, χ

Een tableau voor $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \models \varphi \vee (\psi \wedge \chi)$ is:

waar $(\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$ $\varphi \vee \psi, \varphi \vee \chi$		onwaar $\varphi \vee (\psi \wedge \chi)$	
waar		waar	onwaar
			χ
			onwaar
waar φ	onwaar ψ	waar φ	onwaar χ

De tableaux sluiten weer: ook deze formule-schema's zijn dus logisch equivalent. $\square$

Blz. 91, it. 8.15: – α -links:

waar $\varphi \wedge \psi$		onwaar	
waar φ	onwaar ψ	waar ψ	onwaar φ

– $\wedge$ -rechts:

waar		onwaar $\varphi \wedge \psi$	
waar φ, ψ	onwaar	waar	onwaar ψ, φ

waar $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ $\varphi \wedge \psi$ φ, ψ		onwaar $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi$ χ			
waar	onwaar φ	waar $\psi \rightarrow \chi$		onwaar	
		waar	onwaar ψ	waar χ	onwaar

Een bewijs van $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi \models \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ is:

waar $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi$ φ ψ				onwaar $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)$ $\psi \rightarrow \chi$ χ	
waar		onwaar $\varphi \wedge \psi$		waar χ	onwaar
waar	onwaar φ	waar	onwaar ψ		

2. Het bewijs voor de ene kant van de equivalentie is:

onwaar $\varphi \wedge \psi$	onwaar φ, ψ	waar ψ	onwaar φ
	waar	onwaar ψ	onwaar φ

Het linker subtableau sluit niet; de redenering is dus ongeldig.

Blz. 92, it. 8.17: – $\leftrightarrow$ -links:

waar $\varphi \leftrightarrow \psi$		onwaar	
waar φ, ψ	onwaar	waar	onwaar φ, ψ

– $\leftrightarrow$ -rechts:

waar		onwaar $\varphi \leftrightarrow \psi$	
waar φ	onwaar ψ	waar ψ	onwaar φ

Blz. 92, it. 8.18: 1. Het bewijs van $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \models (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi$ luidt:

onwaar $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \wedge (\varphi \wedge \psi)$	onwaar φ, ψ	onwaar $\psi \rightarrow \chi$	onwaar χ
	waar	onwaar $\psi \rightarrow \chi$	onwaar χ

Voor de andere kant:

onwaar $\varphi \leftrightarrow \psi$	onwaar φ	onwaar
		waar
	waar ψ	onwaar
		waar
waar $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$ $\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \varphi$	onwaar ψ	onwaar
		waar
	waar φ	onwaar
		waar

3. De ene kant van het bewijs is:

waar $\varphi \rightarrow \psi$ $\neg \psi$ φ		onwaar $\neg \psi \rightarrow \neg \varphi$ $\neg \varphi$ ψ	
waar	onwaar	waar	onwaar
	φ	ψ	

De andere kant is:

waar $\neg \psi \rightarrow \neg \varphi$ φ		onwaar $\varphi \rightarrow \psi$ ψ	
waar	onwaar	waar	onwaar
	$\neg \psi$	$\neg \varphi$	
ψ			φ

4. De ene kant is:

waar $\varphi \rightarrow \neg \psi$ ψ φ		onwaar $\psi \rightarrow \neg \varphi$ $\neg \varphi$	
waar	onwaar	waar	onwaar
	φ	$\neg \psi$	
			ψ

En de andere kant:

waar $\psi \rightarrow \neg \varphi$ φ ψ		onwaar $\varphi \rightarrow \neg \psi$ $\neg \psi$	
waar	onwaar	waar	onwaar
	ψ	$\neg \varphi$	
			φ

Blz. 92, it. 8.19: 1. $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ is een tautologie want:

waar $p \wedge (p \rightarrow q)$ $p, p \rightarrow q$		onwaar $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ q	
waar	onwaar	waar	onwaar
	p	q	

2. $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$ is een tautologie want:

waar $\neg q \wedge (p \rightarrow q)$ $\neg q, p \rightarrow q$ p		onwaar $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$ $\neg p$ q	
waar	onwaar	waar	onwaar
	p	q	

3. $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ is een tautologie want:

waar $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$ $p \rightarrow q, q \rightarrow r$ p		onwaar $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ $p \rightarrow r$ r			
waar	onwaar	waar		onwaar	
	p	q			
		waar	onwaar	waar	onwaar
			q	r	

4. $p \rightarrow (p \rightarrow p)$ is een tautologie want:

waar	onwaar
p	$p \rightarrow (p \rightarrow p)$
p	$p \rightarrow p$
	p

5. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ is een tautologie want:

waar $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ $p \rightarrow q$ p	waar q	onwaar p		
	waar	onwaar	waar	onwaar
	waar	onwaar	waar	onwaar
onwaar $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$ $p \rightarrow r$ r		onwaar	waar	onwaar

Blz. 95, it. 8.23: Op zich zijn DNFs (of CNFs) niet uniek. Bij een bestaande DNF, bijvoorbeeld

$$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r),$$

kunnen altijd extra literals worden ingebracht. Dat kan op het hoogste niveau, zoals in bijvoorbeeld

$$(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r) \vee (p \wedge s \wedge \neg s),$$

maar ook op component-niveau, zoals bijvoorbeeld

$$(p \wedge \neg q \wedge s) \vee (\neg p \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge r \wedge \neg s).$$

(Zie hoe s afhankelijkheden introduceert.) Combinaties daarvan zijn ook mogelijk.

Sluiten we dergelijke “verduinningen” uit, dus eisen we dat onderdelen niet over de hele linie hetzelfde atoom of de ontkenning ervan mogen bevatten (eerste t.v.b.) en dat onderdelen geen complementair paar literals mogen bevatten (tweede t.v.b.), zelfs dan zijn DNFs nog niet uniek, vanwege de volgorde van de literals, i.e., $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge r)$ is syntactisch niet gelijk aan $(\neg q \wedge p) \vee (\neg p \wedge r)$, maar wel logisch equivalent.

Eisen we ook nog dat literals in een bepaalde volgorde staan (een alfabetische volgorde ligt voor de hand), pas dan zijn DNFs (en CNFs) uniek.

Blz. 96, it. 8.24: – Dat $\{\wedge, \neg\}$ functioneel volledig is, is als volgt in te zien. Stelling 8.1 Functionele volledigheidstelling.1 garandeert dat er bij iedere n -plaatsige operatie op $\{0, 1\}$ een formule φ is die deze

operatie als waarheidstabel heeft, waarbij φ hoogstens de connectieven $\neg$, $\wedge$ en $\vee$ bevat. Alleen $\vee$ willen we in het onderhavige geval er niet bij hebben; $\vee$ kunnen we echter elimineren door gebruik te maken van de volgende logische equivalentie:

$$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

- Voor $\{\rightarrow, \neg\}$ volgt de functionele volledigheid geheel analoog aan het vorige geval. Het enige verschil is dat we zowel $\wedge$ als $\vee$ moeten herschrijven in termen van $\rightarrow$ en $\neg$. Dit kan als volgt: (vergelijk de afkortingen uit § 9.6 Beslisbaarheid, correctheid, volledigheidsection.9.6)

$$\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$$

$$\varphi \vee \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \rightarrow \psi$$

- Dat $\{\vee, \neg\}$ functioneel volledig is volgt weer analoog, maar nu met gebruik van de logische equivalentie:

$$\varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$$

Blz. 96, it. 8.25: We bewijzen dat $\{\wedge, \vee\}$ niet functioneel volledig is door te laten zien dat *negatie*, c.q. de functie $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ zodat $f(0) = 1$ en $f(1) = 0$, niet uitdrukbaar is in een formule φ die behalve één propositieletter p alleen $\wedge$ en $\vee$ mag bevatten. Met inductie naar de opbouw van zulke φ is namelijk zelfs te bewijzen dat φ dezelfde waarheidswaarde heeft als p :

- Als $\varphi = p$ dan geldt dit uiteraard.
- Stel de bewering geldt voor willekeurige formules α en β die uitsluitend met p , $\wedge$ en $\vee$ zijn opgebouwd. We moeten nu aantonen dat de bewering ook voor $\alpha \vee \beta$ en $\alpha \wedge \beta$ geldt. Dit volgt echter onmiddellijk uit de tabel:

p	α	β	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \wedge \beta$
1	1	1	1	1
0	0	0	0	0

Blz. 96, it. 8.26: We bewijzen dat $\{\neg, \leftrightarrow\}$ niet functioneel volledig is door te laten zien dat *disjunctie*, *conjunctie* en *implicatie* niet uitdrukbaar zijn met alleen $\neg$ en $\leftrightarrow$, aldus:

Waarheidstafels van formules die met p , q en $\leftrightarrow$ (en evt. $\neg$) gemaakt zijn hebben altijd een *even* aantal enen (0, 2 of 4) per kolom; dit is weer met inductie te bewijzen. Disjuncties als $p \vee q$ (preciezer: de tweeplaatsige operatie die hiervan de waarheidstafel is) hebben echter een oneven aantal enen en nullen, en kunnen dus nooit uitdrukbaar zijn met behulp van $\neg$ en $\leftrightarrow$.

Blz. 96, it. 8.27: Om aan te tonen dat $\{\wedge, \rightarrow\}$ functioneel onvolledig is, moeten we zoeken naar een waarheidsfunctie die niet uitdrukbaar is met een formule waarin alleen $\wedge$ en $\rightarrow$ voorkomen. Met Stelling 8.1 Functionele volledigheidstelling.1 volstaat het te zoeken naar een logische formule in $\{\wedge, \vee, \neg\}$ die niet kan worden uitgedrukt met $\{\wedge, \rightarrow\}$. We draaien de zaak om: om een niet-uitdrukbare formule te vinden, proberen we eerst te ontdekken welke eigenschappen $\wedge$ en $\rightarrow$

bezitten, om dan vervolgens met een formule te komen die deze eigenschap *niet* heeft.

Laten we $\wedge$ en $\rightarrow$ eens nader bekijken:

x	y	$\wedge(x, y)$	x	y	$\rightarrow(x, y)$
0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Als we proberen een regelmatigheid te ontdekken in combinaties van $\wedge$ en $\rightarrow$, zien we al snel dat 1-tupels altijd weer op 1 afgebeeld worden. Ook met (meer ingewikkelde) combinaties van $\wedge$ en $\rightarrow$ blijft dit zo. Om dit in te zien, kunnen we een willekeurige waarheidsfunctie f louter met behulp van $\wedge$ en $\rightarrow$ construeren, en vaststellen dat het tuple $(1, 1, 1, 1, 1)$ afgebeeld wordt op 1.

$$f : \{0, 1\}^5 \rightarrow \{0, 1\} :$$

$$(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) \mapsto (p_5 \rightarrow p_4) \wedge ((p_1 \wedge p_3) \rightarrow p_2)$$

Ook bij andere waarheidsfuncties van $\{0, 1\}^n$ naar $\{0, 1\}$ die louter met behulp van $\wedge$ en $\rightarrow$ zijn geconstrueerd, kunnen we vaststellen dat zij $(1, \dots, 1)$ afbeeld op 1. (Eigenlijk moeten we dit netjes bewijzen,—dit doen we straks.) Dus elke waarheidsfunctie die $(1, \dots, 1)$ *niet* afbeeld op 1, kan niet uitgedrukt worden met een $\{\wedge, \rightarrow\}$ -waarheidsfunctie. In het bijzonder kan de negatie niet uitgedrukt worden met een $\{\wedge, \rightarrow\}$ -waarheidsfunctie, omdat de negatie een functie is van $\{0, 1\}$ naar $\{0, 1\}$, die 1 afbeeld op een waarde ongelijk aan 1. Informeel is het bewijs nu rond, we moeten het alleen nog netjes uitwerken:

Bewering: een waarheidsfunctie $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ die louter met behulp van de functies $\wedge$ en $\rightarrow$ is geconstrueerd beeldt $(1, \dots, 1)$ af op 1.

Bewijs: met inductie naar de complexiteit van f .

- (Basis.) De meest eenvoudige $\{\wedge, \rightarrow\}$ -waarheidsfuncties zijn $\wedge$ en $\rightarrow$ zelf. Uit bovenstaande waarheidstafels blijkt dat deze functies inderdaad $(1, 1)$ op 1 afbeelden.
- (Inductiestap.) Als f een samengestelde $\{\wedge, \rightarrow\}$ -waarheidsfunctie is, dan is f samengesteld uit twee eenvoudiger functies g en h , hetzij als $f = g \wedge h$, hetzij als $f = g \rightarrow h$. Per inductie mogen we aannemen dat g en h elk 1-tupel afbeelden op 1. Uit bovenstaande waarheidstafels kunnen we weer aflezen dat de laatste stap, i.e., $g \wedge h$ of $g \rightarrow h$, dan ook weer in 1 resulteert.

N.B.: de meest eenvoudige $\{\wedge, \rightarrow\}$ -waarheidsfuncties zijn $\wedge$ en $\rightarrow$ zelf, en niet bijvoorbeeld de projectie-waarheidsfuncties

$$P_i : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i,$$

$1 \leq i \leq n$, of de constante waarheidsfuncties

$$\perp : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto 0$$

en

$$T : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\} : (x_1, \dots, x_n) \mapsto 1.$$

Immers, $\{\wedge, \rightarrow, \perp\}$ is wél functioneel volledig, getuige de identiteit $\neg\varphi \equiv \varphi \rightarrow \perp$.

Blz. 96, it. 8.28: – Met de Quine dolk:

$$\begin{aligned} \varphi \wedge \psi &:= (\varphi \dagger \varphi) \dagger (\psi \dagger \psi) \\ \varphi \vee \psi &:= (\varphi \dagger \psi) \dagger (\varphi \dagger \psi) \\ \varphi \rightarrow \psi &:= ((\varphi \dagger \varphi) \dagger \psi) \dagger ((\varphi \dagger \varphi) \dagger \psi) \\ \varphi \leftrightarrow \psi &:= ((\varphi \dagger \varphi) \dagger \psi) \dagger ((\psi \dagger \psi) \dagger \varphi) \end{aligned}$$

– Met de Sheffer streep:

$$\begin{aligned} \varphi \wedge \psi &:= (\varphi | \psi) | (\varphi | \psi) \\ \varphi \vee \psi &:= (\varphi | \varphi) | (\psi | \psi) \\ \varphi \rightarrow \psi &:= (\varphi | (\psi | \psi)) \\ \varphi \leftrightarrow \psi &:= ((\varphi | \varphi) | (\psi | \psi)) | (\varphi | \psi) \end{aligned}$$

Blz. 96, it. 8.29: In principe zijn er zestien binaire operatoren. De eerste acht zijn:

x	y	$\circ_1$	$\circ_2$	$\circ_3$	$\circ_4$	$\circ_5$	$\circ_6$	$\circ_7$	$\circ_8$	...
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	...
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	...
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	...
		$\wedge$				$\vee$				...

De laatste acht zijn:

	$\circ_9$	$\circ_{10}$	$\circ_{11}$	$\circ_{12}$	$\circ_{13}$	$\circ_{14}$	$\circ_{15}$	$\circ_{16}$
...	1	1	1	1	1	1	1	1
...	0	0	0	0	1	1	1	1
...	0	0	1	1	0	0	1	1
...	0	1	0	1	0	1	0	1
...	$\dagger$	$\leftrightarrow$				$\rightarrow$		$ $

(Let op de symmetrie in de verticale midden-as.)

Van $|$ (nand) en $\dagger$ (nor) weten we dat ze op zichzelf functioneel compleet zijn. We moeten bewijzen dat de anderen dat niet zijn.

Laten we eerst kijken welke operatoren $\circ_i$ er niet in slagen om $\neg$ uit te drukken. Dit zijn alle operatoren die gesloten zijn op $\{0\}$ of $\{1\}$. Immers deze operatoren kunnen van een 0 nooit meer een 1 maken en omgekeerd. Vanwege geslotenheid op $\{0\}$ mogen we concluderen dat $\{\circ_1, \dots, \circ_8\}$ als verzameling operatoren incompleet is, laat staan alle deelverzamelingen, laat staan singleton-deelverzamelingen (individuele elementen). Vanwege geslotenheid op $\{1\}$ is de verzameling operatoren $\{\circ_{10}, \circ_{12}, \circ_{14}, \circ_{16}\}$ incompleet, en daarmee ook alle deelverzamelingen. Daarmee vallen meteen twaalf operatoren af waaronder bekende binaire operatoren zoals $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$, en $\rightarrow$.

Als kandidaat-compleet blijven over $\circ_9$, $\circ_{11}$, $\circ_{13}$, en $\circ_{15}$. Twee daarvan, te weten $\circ_9$, en $\circ_{15}$ hoeven we niet verder te analyseren, want dat zijn $\dagger$ (nor) en $|$ (nand) waarvan we weten dat ze compleet zijn. Blijven over $\circ_{11}$ en $\circ_{13}$. Wat valt daar nog verder over op te merken? Welke regelmatigheden kunnen we vinden die bewaard

(invariant) blijven onder herhaalde toepassing? Eén regelmatigheid (er zijn er meer) is dat zowel $\circ_{11}$ als $\circ_{13}$ evenveel 0-en als 1-en produceren. Omdat $\wedge$ (of $\vee$ of $\rightarrow$) deze eigenschap niet heeft, kan $\wedge$ niet worden uitgedrukt met combinaties van operatoren uit de verzameling $\{\circ_{11}, \circ_{13}\}$. Daarmee is de verzameling $\{\circ_{11}, \circ_{13}\}$ incompleet en daarmee ook alle deelverzamelingen, in het bijzonder $\{\circ_{11}\}$ en $\{\circ_{13}\}$.

Blz. 96, it. 8.30: – $\dagger$ -links:

waar	onwaar
$\varphi \dagger \psi$	φ, ψ

– $\dagger$ -rechts:

waar		onwaar	
φ		$\varphi \dagger \psi$	
waar	onwaar	waar	onwaar
φ		ψ	

– $|$ -links:

waar		onwaar	
$\varphi \psi$			
waar	onwaar	waar	onwaar
	φ		ψ

– $|$ -rechts:

waar	onwaar
φ, ψ	$\varphi \psi$

Blz. 101, it. 1m:

1.	$\neg p \rightarrow q$	ass
2.	$\neg(p \vee q)$	ass
3.	p	ass
4.	$p \vee q$	I $\vee$, 3
5.	$\perp$	G $\neg$, 2, 4
6.	$\neg p$	I $\neg$, 3–5
7.	q	G $\rightarrow$, 1, 6
8.	$p \vee q$	I $\vee$, 7
9.	$\perp$	G $\neg$, 2, 8
10.	$\neg\neg(p \vee q)$	I $\neg$, 2–9
11.	$p \vee q$	$\neg\neg$ -regel, 10

Blz. 101, it. 1: Stel dat $\neg\varphi \vdash \varphi$. Dan bestaat er per definitie van $\vdash$ dus een bewijs voor φ uit $\neg\varphi$:

1.	$\neg\varphi$	ass
..	...	
..	...	
n.	φ	

Laten we dit even noteren met

1.	$\neg\varphi$	ass
$\pi.$	Π	
n.	φ	

De zin daarvan is dat we dan van de stippeltjes af zijn ($\pi = \{2, \dots, n-1\}$ en $\Pi = \{\varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}\}$).

Als we nu kijken naar dit bewijs, dan zien we dat we eigenlijk een tegenspraak hebben afgeleid: we hebben φ afgeleid uit $\neg\varphi$. Laten we dit in de Fitch-afleiding zélf expliciet maken door de G $\neg$ -regel toe te passen (regel $n+1$). Omdat $\perp$ is afgeleid kunnen we vervolgens concluderen dat de aanname op de 1e regel onjuist is, i.e., we passen de I $\neg$ -regel toe om $\neg\neg\varphi$ te concluderen en $\neg\varphi$ in te trekken. Nu zijn er geen aannames meer. De dubbele negatie mag tenslotte worden weggehaald met de $\neg\neg$ -regel.

1.	$\neg\varphi$	ass
$\pi.$	Π	
n.	φ	
n+1.	$\perp$	G $\neg$, 1, n
n+2.	$\neg\neg\varphi$	I $\neg$
n+3.	φ	$\neg\neg$ -regel, n+2

Blz. 103, it. 9.4: 1. Kies in axioma-schema 1 $\varphi = p$ en $\psi = p$.

2. Kies in axioma-schema 1 $\varphi = p \rightarrow q$ en $\psi = p$.

3. Kies in axioma-schema 2 $\varphi = p$, $\psi = q$ en $\chi = p$.

4. Kies in axioma-schema 2 $\varphi = p$, $\psi = q$ en $\chi = p \rightarrow q$.

5. Kies in axioma-schema 3 $\varphi = \neg p$, en $\psi = q \rightarrow r$.

Blz. 104, it. 9.5:

1	$\neg\neg q \rightarrow \neg\neg p$	[premissie]
2	$(\neg\neg q \rightarrow \neg\neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$	[ax 3]
3	$\neg p \rightarrow \neg q$	[MP uit 1 en 2]
4	$(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$	[ax 3]
5	$q \rightarrow p$	[MP uit 3 en 4]
6	q	[premissie]
7	p	[MP uit 5 en 6]

Blz. 104, it. 9.6:

1	$p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow s))$	[premissie]
2	p	[premissie]
3	$q \rightarrow (r \rightarrow s)$	[MP uit 1 en 2]
4	q	[premissie]
5	$r \rightarrow s$	[MP uit 3 en 4]
6	r	[premissie]
7	s	[MP uit 5 en 6]

Blz. 104, it. 9.7:

- 1 $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ [ax 1]
- 2 $(p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p))$ [ax2]
- 3 $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p)$ [MP uit 1 en 2]

Blz. 105, it. 9.8:

- 1 φ [premissie]
- 2 $\varphi \rightarrow \psi$ [gegeven stelling]
- 3 ψ [MP uit 1 en 2]

Blz. 105, it. 9.9: Bewijs: analoog aan het bewijs van de deductiestelling in de tekst plegen we inductie naar de lengte van de afleiding van ψ uit $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1}$.

- als de lengte van de afleiding 1 is dan zijn er 3 mogelijkheden:
 - ψ is een axioma dan ook $\vdash \varphi_{n+1} \rightarrow \psi$ (zie bewijs tekst) dus zeker $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi_{n+1} \rightarrow \psi$.
 - als $\psi = \varphi_{n+1}$, dan volgt het verlangde weer vanwege $\vdash \psi \rightarrow \psi$.
 - $\psi \in \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Dan redeneren we weer als in het eerste geval:

- 1 ψ [premissie]
- 2 $\psi \rightarrow (\varphi_{n+1} \rightarrow \psi)$ [ax 1]
- 3 $\varphi_{n+1} \rightarrow \psi$ [MP uit 1 en 2]

Dus ook in dit geval $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi_{n+1} \rightarrow \psi$.

- stel de bewering geldt voor alle formules $\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}, \psi$ waarvoor ψ in hoogstens k stappen uit $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}\}$ afleidbaar is. Bekijk nu een dergelijke afleiding die precies $k + 1$ stappen vergt. Omdat deze afleiding meer dan 1 stap telt, moet de laatste stap een toepassing van MP zijn, zeg uit χ en $\chi \rightarrow \psi$. De laatste twee formules zijn dus zelf in hoogstens k stappen afgeleid; dus geldt

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi_{n+1} \rightarrow (\chi \rightarrow \psi) \text{ en } \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \varphi_{n+1} \rightarrow \chi$$

Net als in het tekstbewijs volgt de gewenste conclusie hieruit met behulp van axioma 2:

$$(\varphi_{n+1} \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)) \rightarrow ((\varphi_{n+1} \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi_{n+1} \rightarrow \psi))$$

en tweemaal Modus Ponens. $\square$

Blz. 106, it. 9.10: – Alle axioma's zijn tautologieën. Voor axioma-schema 2 is dit reeds bewezen in opdracht 5.23.6.; voor axioma-schema 3 in 5.35.3. Voor axioma's volgens schema 1 maken we bijvoorbeeld het volgende semantische tableau:

waar	onwaar
φ	$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
ψ	$\psi \rightarrow \varphi$
ψ	φ

- Dat de relatie van logisch-gevolg-zijn de regel Modus Ponens respecteert, met andere woorden dat $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \models \psi$ is al bewezen in opdracht 5.27, maar blijkt wellicht nog eenvoudiger uit het volgende tableau:

waar		onwaar	
$\varphi, \varphi \rightarrow \psi$		ψ	
waar	onwaar	waar	onwaar
	φ	ψ	

- Parallel aan het deductieve bewijs (van $\Sigma \vdash \varphi$) is er dus een bewijs voor het overeenkomstige logische gevolg (van $\Sigma \models \varphi$). Dit is verder te formaliseren tot een bewijs met inductie naar de lengte van de afleiding. $\square$

Blz. 107, it. 9.11: Bewijs: als Γ inconsistent is, dan is er een formule φ zodat $\Gamma \vdash \varphi$ en $\Gamma \vdash \neg \varphi$. Laat nu $\Gamma \subseteq \Gamma'$. Omdat de in de afleidingen van φ en $\neg \varphi$ gebruikte premissen uit Γ ook in Γ' voorkomen, geldt eveneens $\Gamma' \vdash \varphi$ en $\Gamma' \vdash \neg \varphi$. Dus Γ' is inconsistent. $\square$

Blz. 107, it. 9.12: Bekijk een verzameling P van propositieletters en kies een $p \in P$, dan is $P \not\models \neg p$ (want de waardering die alle propositieletters waar maakt toont aan dat $P \not\models \neg p$ en de correctheid van het systeem doet de rest). Dus is volgens stelling 9.7 Beslisbaarheid, correctheid, volledigheidstelling, 7 de verzameling P consistent.

Blz. 107, it. 9.13: Laat V een valuatie zijn van de propositielogische taal $\mathcal{T}$ en noem $\Gamma = \{\varphi \in \mathcal{T} \mid V(\varphi) = 1\}$. Γ beschikt over de verlangde eigenschappen:

- Omdat V een functie is, is er geen formule φ zodat $V(\varphi) = 1$ én $V(\varphi) = 0$. Dus is er geen φ zodat $V(\varphi) = 1$ en $V(\neg \varphi) = 1$. Dus is er ook geen φ zodat $\varphi \in \Gamma$ en $\neg \varphi \in \Gamma$. Kortom, Γ is consistent.
- Stel $\Gamma \subset \Gamma'$, dan is er een $\psi \in \Gamma' - \Gamma$. Omdat $\psi \notin \Gamma$ moet $V(\psi) = 0$. Dus $V(\neg \psi) = 1$, en $\neg \psi$ behoort dus tot Γ , en derhalve ook tot Γ' . Maar $\psi \in \Gamma'$. Dus Γ' is inconsistent. $\square$

Blz. 115, it. 10.1: 1. Sjp

2. Spj

3. Sjj

Blz. 115, it. 10.2: 1. Ish

2. $Kh \rightarrow Wp$

3. $\neg Gshp$

4. $\neg Mh$

5. $Ms \rightarrow Ish$

6. $Ish \vee Ihs$

7. $Gshs$

Blz. 117, it. 10.3: 1. Rxx

2. $\exists y \forall z Sxyz$

3. $\forall y Sxyz$

4. $\exists y Rxy$

5. $Ax \wedge Bx$
6. $Ax \rightarrow Bx$
7. $(Ax \rightarrow Bx) \wedge Cx$
8. Bx

Blz. 117, it. 10.4: – als φ een atomaire formule is die v bevat, dan is die v een vrij voorkomen van een variable (afgekort: vvv) in φ .

- als v een vvv is in φ , dan is v ook een vvv in $\neg\varphi$.
- als v een vvv is in φ of ψ , dan is v ook een vvv in $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ en $(\varphi \leftrightarrow \psi)$.
- als v een vvv is in φ en $v \neq u$, dan is v ook een vvv in $\forall u\varphi$ en $\exists u\varphi$.
- In geen ander geval is v een vvv in φ

Blz. 117, it. 10.5: De formules 6. en 8. zijn open; de variabele x heeft een vrij voorkomen. De andere formules zijn dus gesloten.

- Blz. 118, it. 10.6:** 1. $\forall x\neg\forall y\neg Rxy$
2. $\neg\forall x\neg Ax \vee \forall yBy$
 3. $\neg\forall x\neg\forall y\neg\forall z\neg Sxyz$
 4. $\forall x\neg Ax \vee \forall yBy$
 5. $\neg(\neg\forall x\neg Ax \vee \forall yBy)$ ofwel $\forall x\neg Ax \wedge \neg\forall yBy$.
 6. $\neg\forall x\forall y\forall z\neg(Ax \vee Ryz)$

- Blz. 118, it. 10.7:** 1. $\neg\exists x\neg\exists yRxy$
2. $\exists xAx \vee \neg\exists y\neg By$
 3. $\exists x\neg\exists y\neg\exists zSxyz$
 4. $\neg\exists xAx \vee \neg\exists y\neg By$
 5. $\neg(\exists xAx \vee \neg\exists y\neg By)$ ofwel $\neg\exists xAx \wedge \exists y\neg By$
 6. blijft gelijk

Blz. 120, it. 10.8: Het discussiedomein is voor 1. t/m 4. de verzameling mensen, en voor 5. t/m 7. de verzameling mensen en uitingen. Vertaalsleutel:

a : Annie
 b : Bhagwan
 j : Jan
 Vxy : x volgt y
 Zxy : x zegt y
 Axy : x adoreert y
 Px : x is een profeet
 Qx : x is een profiteur
 Txy : x spreekt y tegen

1. $Pb \vee Qb$ (steeds: hij = Bhagwan)
2. $Pb \rightarrow Aab$

3. $\forall x(Vxb \rightarrow Axb)$
4. $\forall x(\neg Axb \rightarrow \neg Vxb)$
5. $\forall x(Zbx \rightarrow Tjx)$
6. $\forall x(Zbx \rightarrow Tjx)$
7. $\forall x(Zbx \rightarrow \neg\exists y(Vyb \wedge Tyx))$ of $\neg\exists y\exists x(Zbx \wedge Vyb \wedge Tyx)$

Blz. 120, it. 10.9: Discussiedomein: de verzameling mensen. Vertaalsleutel:

- Bx : x is barbier;
 - Sxy : x scheert y .
1. $\forall x((Bx \wedge \neg Sxx) \rightarrow \exists y(By \wedge Sxy))$
 2. $\forall x((Bx \wedge \neg Sxx) \rightarrow \neg\exists y(By \wedge Sxy))$
 3. $\neg\exists x(Bx \wedge \neg Sxx \wedge \forall y(By \rightarrow Sxy))$
 4. $\forall x((Bx \wedge \neg Sxx) \rightarrow \neg\forall ySxy)$
 5. $\forall x((Bx \wedge \neg Sxx) \rightarrow \neg\forall y(\neg Syy \rightarrow Sxy))$

Blz. 121, it. 10.10: 1. $\forall x\forall y((Kyx \wedge Lxy) \rightarrow K'xy)$
 discussiedomein: mensen
 vertaalsleutel:

- Kxy : x is een kind van y ;
 - $K'xy$: x kastijdt y ;
 - Lxy : x heeft y lief.
2. $\neg\exists x(Rx \wedge \neg Dx)$
 discussiedomein: planten
 vertaalsleutel:
 - Dx : x heeft doornen;
 - Rx : x is een roos.
 3. $\neg\forall xTx$
 discussiedomein: hout
 vertaalsleutel: Tx : x is timmerhout.
 Andere mogelijkheid:
 $\neg\forall x(Hx \rightarrow Tx)$
 discussiedomein: voorwerpen
 vertaalsleutel:
 - Hx : x is van hout;
 - Tx : x is van timmerhout.

4. $\neg\forall x(Bx \rightarrow Gx)$
 discussiedomein: voorwerpen
 vertaalsleutel:
 - Bx : x blinkt;
 - Gx : x is van goud.
5. $\forall x\forall y\forall z((Kx \wedge Vxyz) \rightarrow Ozx)$
 discussiedomein: mensen en uitingen
 vertaalsleutel:
 - Kx : x is een kind;
 - Oxy : x slaat y over;

– $Vxyz : x$ vraagt y aan z .

6. $\neg \forall x(\exists y(Ly \wedge My \wedge Dxy) \rightarrow Kx)$

discussiedomein: mensen en messen; vertaalsleutel:

$Dxy : x$ draagt y $Kx : x$ is kok
 $Lx : x$ is lang $Mx : x$ is een mes

Blz. 121, it. 10.11: 1. $\forall x(Ax \rightarrow Bx)$

2. $\forall x(Ax \leftrightarrow Bx)$

3. $(\forall x(Ax \rightarrow Bx) \wedge \forall x(Bx \rightarrow Cx)) \rightarrow \forall x(Ax \rightarrow Cx)$

Blz. 121, it. 10.12: 1. $\neg \exists xOxx$

2. $\forall x\exists y(My \wedge Oyx)$

3. $\forall x\exists y(\neg My \wedge Oyx)$

4. $\exists x\exists yOxy$

5. $\neg \forall x\exists y(Mx \wedge Oxy)$

6. $\neg \forall x\exists y\exists z(\neg My \wedge Mz \wedge Oxy \wedge Oxz)$

7. $\forall x\exists y\exists z(Oyz \wedge Ozx \wedge \neg My)$

8. $\neg \forall x\exists y\exists z(Oxz \wedge Ozy)$

Blz. 121, it. 10.13: 1. ‘Iemand is een kind van Marie.’ of:
 ‘Marie heeft een kind.’

2. ‘Piet is een kleinkind van Marie.’

3. ‘Marie is Piet’s grootmoeder van vaderskant.’

4. ‘Marie en Piet hebben samen een dochter.’

5. ‘Marie heeft een kind en van al haar kinderen is Piet de vader.’

6. ‘Marie heeft een zoon, maar deze heeft geen vader.’

Blz. 121, it. 10.14: 1.

$$\frac{\forall x(Mx \rightarrow Sx) \quad Ms}{Ss}$$

discussiedomein: sterfelijke en onsterfelijke wezens
 vertaalsleutel:

– $Mx : x$ is een mens;

– $Sx : x$ is sterfelijk;

– $s : Socrates$.

2.

$$\frac{\neg \exists x(Vx \wedge Zx) \quad \forall x(Kx \rightarrow Zx)}{\neg \exists x(Kx \wedge Vx)}$$

discussiedomein: dieren
 vertaalsleutel:

– $Kx : x$ is een knaagdier;

– $Vx : x$ is een vis;

– $Zx : x$ is een zoogdier.

Blz. 123, it. 11.1: 1. Onwaar, want 1 staat niet in relatie tot zichzelf.

2. Waar, want 2 staat in relatie tot zichzelf.

3. Waar, want vanuit elk object loopt een pijl naar een object.

4. Onwaar, want er is geen enkel object waaruit pijlen lopen naar alle objecten.

5. Onwaar, want uit 1 loopt wel een pijl naar 2, maar niet naar zichzelf.

6. Waar, want 1 staat niet in de relatie tot zichzelf.

7. Onwaar, vergelijk 5.

8. Waar, want voor 2 staat in relatie tot zichzelf, en naar 2 loopt een pijl.

Blz. 123, it. 11.2:

1. onwaar	4. onwaar	7. onwaar
2. onwaar	5. onwaar	8. waar
3. waar	6. waar	

Blz. 124, it. 11.3:

1. waar	5. onwaar	9. onwaar
2. onwaar	6. waar	10. waar
3. waar	7. onwaar	11. waar
4. waar	8. onwaar	12. waar

Blz. 124, it. 11.4:

1. waar	5. waar	9. waar
2. onwaar	6. onwaar	10. waar
3. onwaar	7. onwaar	11. onwaar
4. onwaar	8. waar	12. waar

Blz. 124, it. 11.5: – $I(a) = 1; I(b) = 2; I(c) = 3;$

– $I(P) = \{3\}$

– $I(R) = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\}$

Blz. 124, it. 11.6:

1. waar	4. waar	7. onwaar	10. onwaar
2. waar	5. waar	8. waar	11. onwaar
3. waar	6. onwaar	9. onwaar	12. waar

Blz. 125, it. 1: Er bestaat een lege verzameling ($\emptyset$).

Blz. 125, it. 2: Geen verzameling heeft zichzelf als element (met de terminologie van Hoofdstuk 4 Oneindigheid chapter.4: elke verzameling heeft de Russell-eigenschap).

Blz. 125, it. 3:

$V \in W \Rightarrow W \notin V$ (dus: ‘ $\in$ ’ is asymmetrisch).

Blz. 125, it. 4: Elke niet-lege verzameling is zelf element van een verzameling.

Blz. 126, it. 11.8: $\mathcal{M}, b \models \emptyset$ als alle formules in Γ vervuld worden door $\mathcal{M}, b$. Deze voorwaarde wordt ledigerwijs vervuld.

Blz. 127, it. 1: Stel φ is een contradictie. Dan is φ onwaar met betrekking tot alle modellen $\mathcal{M}$. Dus $\mathcal{M}, b \not\models \varphi$ voor alle modellen $\mathcal{M}$ en voor alle bedelingen b . Maar dan is φ niet vervulbaar. Omgekeerd gaat de redenering ook op:

- φ onvervulbaar
- $\Rightarrow \mathcal{M}, b \not\models \varphi$ voor alle $\mathcal{M}$ en voor alle b
- $\Rightarrow \varphi$ is onwaar met betrekking tot alle modellen
- $\Rightarrow \varphi$ is een contradictie.

I.p.v. “ $\Rightarrow$ ” hadden we dus net zo goed overal gelijk “ $\Leftarrow$ ” kunnen zetten. Wees hier wel voorzichtig mee.

Blz. 127, it. 2: Volgt direct uit het voorgaande item.

Blz. 127, it. 3: Stel φ is contingent. Dan is deze waar noch onwaar. Het niet onwaar zijn impliceert vervulbaarheid.

Blz. 127, it. 4: Dit spreekt dachten wij voor zich.

Blz. 127, it. 5: Als φ contradictoair is, dan is er een model, $\mathcal{M}$, zo dat $\mathcal{M}, b \not\models \varphi$ voor alle b . Dus zeker niet $\mathcal{M}, b \models \varphi$ voor alle b . Dus φ is niet waar.

Blz. 127, it. 6: Elke contingente formule tegelijkertijd niet waar en niet onwaar. Dus elke contingente formule is een tegenvoorbeeld voor deze implicatie.

Concreet tegenvoorbeeld: $\forall x Rxx$ is niet (altijd) waar: neem maar een model, $\mathcal{M}$, waar R als niet-reflexief wordt geïnterpreteerd. Maar $\forall x Rxx$ is niet onwaar: neem maar een model waar R als reflexief wordt geïnterpreteerd.

Blz. 127, it. 11.10: Per definitie:

- φ is niet waar $\Leftrightarrow$ er is een model $\mathcal{M}$ en een b , zó dat $\mathcal{M}, b \not\models \varphi$.
- φ is niet onwaar $\Leftrightarrow$ er is een model $\mathcal{M}$ is er een b , zó dat $\mathcal{M}, b \models \varphi$.
- φ is contingent $\Leftrightarrow \varphi$ is waar noch onwaar.

Dus:

- φ is contingent
- $\Leftrightarrow \varphi$ is niet onwaar en φ is niet waar
- $\Leftrightarrow$ er is een model $\mathcal{M}_1$ en een b_1 , zó dat $\mathcal{M}_1, b_1 \models \varphi$,
en er is een model $\mathcal{M}_2$ en een b_2 , zó dat $\mathcal{M}_2, b_2 \not\models \varphi$.

Blz. 127, it. 11.11: Twee formules $\varphi, \psi \in \text{SEN}(L)$ heten *logisch equivalent* als

voor alle modellen $\mathcal{M}$: $\mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi$

Blz. 127, it. 11.12:

- | | |
|---|---|
| 1. $\exists x Rxx \wedge Pa$ | 5. $\exists x \exists y Rxy \wedge Pb$ |
| 2. $\exists x Rxb \wedge Px$ | 6. $\forall x \forall y Rxy \rightarrow Px$ |
| 3. $\exists x \exists y Rxy \rightarrow Px$ | 7. $\forall x \forall y Rxy \rightarrow Pb$ |
| 4. $\exists x \exists y (Rxy \wedge Py)$ | 8. $\exists x Px \wedge \exists y Ray$ |

Blz. 127, it. 1:

- Voor een constante c : $[e/v]c = c$.
- Voor een variabele u :

$$[e/v]u = \begin{cases} e & \text{als } u = v, \\ u & \text{als } u \neq v. \end{cases}$$

- Voor een functieterm wordt substitutie inductief toegepast:

$$[e/v]f(x_1, \dots, x_n) = f([e/v]x_1, \dots, [e/v]x_n).$$

Blz. 127, it. 2:

- $[e/v]R(t_1, \dots, t_n) = R([e/v]t_1, \dots, [e/v]t_n)$
- $[e/v]\neg\varphi = \neg[e/v]\varphi$
- $[e/v](\varphi \rightarrow \psi) = ([e/v]\varphi \rightarrow [e/v]\psi)$ en analoog voor $\wedge, \vee, \leftrightarrow$.
- $[e/v]\forall u\varphi = \begin{cases} \forall u\varphi & \text{als } u = v, \\ \forall u[e/v]\varphi & \text{als } u \neq v. \end{cases}$

Blz. 128, it. 11.14: $Hpa \wedge \exists x(Hax \wedge \neg x = p)$

Blz. 128, it. 11.15: De formule is onwaar. Immers, behalve Piet houdt ook individu 3 alleen van Annie.

Blz. 128, it. 11.16: Nu is de formule wel waar. Annie houdt behalve van zichzelf ook nog van iemand anders, en individu 3 houdt alleen van zichzelf. Alleen Piet houdt alleen van Annie.

Blz. 128, it. 11.17: 1. waar; ‘Iedereen houdt van iemand’ (niet noodzakelijk voor iedereen dezelfde persoon).

2. onwaar; ‘Iedereen houdt van iemand anders dan zichzelf.’

3. waar; ‘Wie niet van zichzelf houdt is zielig.’

4. waar; ‘Iemand is zielig en houdt van een ander.’

5. waar; ‘Iedereen die van zichzelf houdt, houdt van geen ander.’

6. waar; ‘Iedereen die van iemand anders houdt is zielig.’

Blz. 129, it. 11.18: De lezing waarin de negatie klein bereik heeft is alleen waar in het model linksonder; de andere lezing is waar in alle modellen behalve die rechtsboven.

Blz. 129, it. 1:

$$\forall xyz((N(x) \wedge A(y) \wedge A(z) \wedge H(x, y) \wedge H(x, z)) \rightarrow y = z)$$

Blz. 129, it. 2: Persoon x bezit minstens één fiets:

$$\exists y(F(y) \wedge H(x, y))$$

Persoon x bezit hoogstens twee auto's:

$$\begin{aligned} \forall uvw((A(u) \wedge A(v) \wedge A(w) \wedge \\ H(x, u) \wedge H(x, v) \wedge H(x, w)) \\ \rightarrow (u = v \vee u = w \vee v = w)) \end{aligned}$$

Iedere Nederlander bezit minstens één fiets en hoogstens twee auto's.

$$\begin{aligned} \forall x(N(x) \rightarrow [\exists y(F(y) \wedge H(x, y)) \wedge \\ \forall uvw((A(u) \wedge A(v) \wedge A(w) \wedge \\ H(x, u) \wedge H(x, v) \wedge H(x, w)) \\ \rightarrow [u = v \vee u = w \vee v = w])]) \end{aligned}$$

Blz. 130, it. 11.20: 1. Object 4

2. Object 4

3. Object 3

4. Object 2

Blz. 131, it. 11.21: 1. Waar; neem bijvoorbeeld $x = 2$.

2. Waar; neem bijvoorbeeld $x = 3$.

3. Onwaar; de disjunctie geldt niet als $x = 2$.

4. Waar; de conjunctie is waar als $x = 3$.

5. Onwaar; voor $x = 3$ geldt de implicatie immers niet.

6. Waar; de objecten waarvoor P geldt zijn 1 en 3; voor $x = 1$ geldt Pfx niet dus klaar, voor $x = 3$ geldt Pfx wel, maar $Pffx$ ook.

Blz. 131, it. 2: O1, O2, O3, O4, O5, EN O9.

Blz. 132, it. 1: (P1) $\forall xx + 1 \neq 0$;

(P2) $\forall xy[x + 1 = y + 1 \rightarrow x = y]$;

(P3) $\forall x(x + 0 = x)$, en $\forall xy[x + (y + 1) = (x + y) + 1]$;

(P4) $\forall x(x \cdot 0 = 0)$, en $\forall xy[x \cdot (x + 1) = (x \cdot y) + x]$;

(P5) voor elke formule φ de universele afsluiting van

$$(\varphi(0) \wedge \forall x[\varphi(x) \rightarrow \varphi(x + 1)]) \rightarrow \forall y\varphi(y).$$

Blz. 132, it. 2: Inductiebasis: $0 + 1 = 0$. Dit is een instantie van axioma P1. Inductiestap:

$$x + 1 \neq x \Rightarrow (x + 1) + 1 \neq (x + 1).$$

De contrapositie hiervan, $(x + 1) + 1 = (x + 1) \Rightarrow x + 1 = x$, is een instantie van P2.

Blz. 132, it. 3: Inductiebasis: we bewijzen de basis voor het getal $s(0)$ oftewel $0 + 1$. (Verder vereenvoudigen kan niet onmiddellijk in de Peano rekenkunde.) Te bewijzen:

$$0 + 1 \neq 0 \rightarrow \exists y(0 + 1 = y + 1).$$

De consequent is onvoorwaardelijk (zonder ons druk te maken over de waarheid van de antecedent) waar: neem $y = 0$. Inductiestap: Stel

$$x \neq 0 \rightarrow \exists y(x = y + 1).$$

Te bewijzen

$$x + 1 \neq 0 \rightarrow \exists y(x + 1 = y + 1).$$

Weer is de consequent onvoorwaardelijk waar: neem $x = y$.

Blz. 133, it. 1: Voor elk getal is er een kleiner ander getal: $\forall x \exists y(y < x)$. Immers, het getal 1 bezit geen voorganger.

Blz. 133, it. 2: Waar in $Q^<$ maar niet in $Z^<$: voor elk tweetal getallen is er een ander getal dat er tussen ligt:

$$\forall xy(x < y \rightarrow \exists z(x < z \wedge z < y)). \quad (12)$$

De ontkenning is dus waar in $Z^<$ maar niet in $Q^<$:

$$\neg \forall xy(x < y \rightarrow \exists z(x < z \wedge z < y)).$$

Blz. 133, it. 3: In de vorige onderdelen vond we een zin, φ , die waar is in $Z^<$ maar niet in $N^<$, en een zin, ψ , die waar is in $Z^<$ maar niet in $Q^<$. De zinnen $\neg\varphi$ en $\neg\psi$ zijn dus respectievelijk waar in $N^<$ maar niet in $Z^<$, en waar in $Q^<$ maar niet in $Z^<$. De conjunctie $\neg\varphi \wedge \neg\psi$ is dus waar in $N^<$ en $Q^<$ maar niet waar in $Z^<$. Desgewenst kan deze zin worden vereenvoudigd.

Blz. 133, it. 4: We gaan eerst een formule construeren die niet waar is in $Q^<$. Van $\mathbb{Q}$ is bekend dat veel verzamelingen geen kleinste bovengrens bezitten. De verzameling

$$d = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2}\},$$

bijvoorbeeld, bezit geen kleinste bovengrens: elke breuk onder de $\sqrt{2}$ is geen bovengrens, en elke breuk boven de $\sqrt{2}$ is een bovengrens, maar geen kleinste bovengrens. Laat $D/1$ een unaire predikaatletter zijn met extensie $(D)_I = d$. Dus

$$\mathcal{M}, b \models D(x) \Leftrightarrow b(x) \in d.$$

Om deze reden is de volgende formule onwaar in $Q^<$:

$$\exists z \forall x(x < z \leftrightarrow D(x)).$$

Er was net immers uitgelegd dat zo'n D -definiërende bovengrens z niet kan bestaan. Noem deze formule χ . De formule χ is wel waar in $N^<$ en $Q^<$ (want neem $z = 2$), dus we moeten nog formules vinden die niet waar zijn in $N^<$ en $Z^<$. Dat is (12). Laten we deze formule ω noemen. Dus $\chi \wedge \omega$ is niet waar in zowel $N^<$, $Q^<$, als $Z^<$.

Tenslotte hopen we aan te tonen dat $\chi \wedge \omega$ geen contradictie is. Hiervoor is het voldoende te tonen dat deze formule vervulbaar is. Welnu, deze formule is natuurlijk vervulbaar in $R^< = \langle \mathbb{R}, < \rangle$. Voor z in χ kan dan $\sqrt{2}$ genomen worden, en ω is natuurlijk ook waar in $R^<$.

Blz. 141, it. 12.4: 1.

$\exists$ -links: $\exists$ -rechts: $\forall$ -links: $\rightarrow$ -links:	waar $\forall x(Ax \rightarrow Bx), \exists xAx$ Ad_1		onwaar $\exists xBx$ Bd_1	
	waar	onwaar	waar	onwaar
		Ad_1	Bd_1	

Het tableau sluit; de redenering is geldig.

2.

$\forall$ r: $\rightarrow$ r: $\wedge$ l: $\rightarrow$ r: $\rightarrow$ l: $\rightarrow$ l:	waar $(Ad_1 \rightarrow Bd_1) \wedge$ $(Bd_1 \rightarrow Cd_1)$ $Ad_1 \rightarrow Bd_1,$ $Bd_1 \rightarrow Cd_1$ Ad_1		onwaar $\forall x(((Ax \rightarrow Bx) \wedge (Bx \rightarrow Cx))$ $\rightarrow (Ax \rightarrow Cx))$ $((Ad_1 \rightarrow Bd_1) \wedge (Bd_1 \rightarrow Cd_1))$ $\rightarrow (Ad_1 \rightarrow Cd_1)$ $Ad_1 \rightarrow Cd_1$ Cd_1	
	waar	onwaar	waar	onwaar
		Ad_1	Bd_1	
			waar	onwaar
			Bd_1	
			waar	onwaar
			Bd_1	

Het tableau sluit; de redenering is dus geldig.

3.

$\neg$ -rechts: $\exists$ -links: $\neg$ -links: $\exists$ -rechts: $\forall$ -links: $\rightarrow$ -links:	waar $\forall x(Ax \rightarrow Bx), \neg \exists xBx$ $\exists xAx$ Ad_1		onwaar $\neg \exists xAx$ $\exists xBx$ Bd_1	
	waar	onwaar	waar	onwaar
		Ad_1	Bd_1	

Het tableau sluit; de redenering is dus geldig.

4.

$\neg$ -rechts: $\exists$ -links: $\neg$ -links: $\exists$ -rechts: $\forall$ -links: $\rightarrow$ -links:	waar $\forall x(Ax \rightarrow Bx), \neg \exists xAx$ $\exists xBx$ Bd_1		onwaar $\neg \exists xBx$ $\exists xAx$ Ad_1	
	waar	onwaar	waar	onwaar
		Ad_1	Bd_1	

Het tableau sluit niet. De twee open takken leveren hetzelfde tegenvoorbeeld: $M = \langle D, I \rangle$ met $D = \{1\}$, $I(A) = \emptyset$ en $I(B) = 1$.

5.

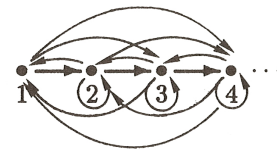
$\exists$ -links: $\neg$ -links: $\forall$ -rechts: $\rightarrow$ -rechts: $\forall$ -rechts: $\forall$ -links: $\rightarrow$ -links:	waar $\exists x \neg Ax$ $\neg Ad_1$ $\forall y(Rd_1y \rightarrow Ad_1)$ $Rd_1d_1 \rightarrow Ad_1$		onwaar $\forall x(\forall y(Rxy \rightarrow Ax) \rightarrow \forall yRxy)$ Ad_1 $\forall y(Rd_1y \rightarrow Ad_1) \rightarrow \forall yRd_1y$ $\forall yRd_1y$ Rd_1d_1	
	waar	onwaar	waar	onwaar
		Rd_1d_1	Ad_1	

De linkertak blijft open en levert het tegenvoorbeeld $M = \langle D, I \rangle$ met $D = \{1\}$, $I(A) = \emptyset$ en $I(R) = \emptyset$.

6.

$\exists$ -links: $\neg$ -links: $\forall$ -rechts: $\rightarrow$ -rechts: $\exists$ -rechts: $\neg$ -rechts: $\forall$ -links: $\rightarrow$ -links:	waar $\exists x \neg Ax$ $\neg Ad_1$ $\forall y(Rd_1y \rightarrow Ad_1)$ Rd_1d_1 $Rd_1d_1 \rightarrow Ad_1$		onwaar $\forall x(\forall y(Rxy \rightarrow Ax) \rightarrow \exists y \neg Rxy)$ Ad_1 $\forall y(Rd_1y \rightarrow Ad_1) \rightarrow \exists y \neg Rd_1y$ $\exists y \neg Rd_1y$ $\neg Rd_1d_1$	
	waar	onwaar	waar	onwaar
		Rd_1d_1	Ad_1	

Het tableau sluit; de redenering is dus geldig.

Blz. 141, it. 12.11: Alleen bij punt 1 is er geen pijl die naar 1 zelf gaat; dit is het enige dat in het tableau verboden is, de rest maakt niet uit. Het begin van het tegenmodel ziet er dus zo uit:**Blz. 142, it. 12.13:** Voor de behandeling van individuele constanten is de volgende regel nodig:

constanten-substitutie: voer voor elke constante c een nieuwe d_i in, en vervang overal in het tableau c door d_i .

De redenering ziet er predikaatlogisch als volgt uit:

$$\neg \exists x(Gx \wedge Vxx), Gs \models \neg Vss$$

waarin

- Gx : x is een Griek;
- Vxy : x veracht y ;
- s : Sokrates.

We testen de geldigheid van deze redenering:

constanten-substitutie:

 $\neg$ -rechts: $\neg$ -links: $\exists$ -rechts: $\wedge$ -rechts:

waar $\neg \exists x(Gx \wedge Vxx), Gs$ Gd_1 Vd_1d_1	onwaar $\neg Vss$ $\neg Vd_1d_1$ $\exists x(Gx \wedge Vxx)$ $Gd_1 \wedge Vd_1d_1$
waar	onwaar Gd_1
waar	onwaar Vd_1d_1

Blz. 154, it. 13.10: Stelling: Voor elke formule φ en fris functiesymbool f geldt dat $\forall x_1, \dots, x_n \exists y \varphi$ vervulbaarheids-equivalent is met $\forall x_1, \dots, x_n [f(x_1, \dots, x_n)/y] \varphi$

Bewijs: Voor het gemak noteren we $x_1, \dots, x_n$ als $\bar{x}$ en $d_1, \dots, d_n$ als $\bar{d}$. In dit bewijs komen deze variabelen resp. constanten namelijk altijd na elkaar voor. Overeenkomstig breiden we de notatie $b(x|d)$ uit tot $b(\bar{x}|\bar{d})$, en de notatie $\forall x \varphi$ tot $\forall \bar{x} \varphi$.

We laten twee dingen zien:

1. Als $\forall \bar{x} \exists y \varphi$ vervult wordt door de combinatie $\mathcal{M}, b$ dan wordt $\forall \bar{x} [f(\bar{x})/y] \varphi$ nog steeds vervult, zij het door de combinatie $\mathcal{M}', b$, waarbij structuur $\mathcal{M}'$ een kleine wijziging is van structuur $\mathcal{M}$.
2. Als $\mathcal{M}, b \models \forall \bar{x} [f(\bar{x})/y] \varphi$ voor een structuur $\mathcal{M}$ en bedeling b , dan vervult dezelfde structuur en bedeling ook $\forall \bar{x} \exists y \varphi$.

(2) $\Rightarrow$ (1): veronderstel dat $\mathcal{M}, b \models \forall \bar{x} [f(\bar{x})/y] \varphi$ voor een structuur $\mathcal{M}$ en bedeling b :

$$\mathcal{M}, b \models \forall \bar{x} [f(\bar{x})/y] \varphi$$

$$\Leftrightarrow \text{voor alle } \bar{d} \in D^n : \mathcal{M}, b(\bar{x}|\bar{d}) \models [f(\bar{x})/y] \varphi$$

Vanwege het substitutielemma mogen we nu de substitutie $f(\bar{x})/y$ omzetten naar een semantische substitutie $y|d$ op de bedeling $b(\bar{x}|\bar{d})$, waarbij

$$d = W_{\mathcal{M}, b(\bar{x}|\bar{d})}(f(\bar{x})) =$$

$$(f)_I(W_{\mathcal{M}, b(\bar{x}|\bar{d})}(\bar{x})) = (f)_I(b(\bar{x}|\bar{d})(\bar{x})) = (f)_I(\bar{d}) :$$

$$\Leftrightarrow \text{voor alle } \bar{d} \in D^n : d = (f)_I(\bar{d}) \text{ en } \mathcal{M}, b(\bar{x}|\bar{d})(y|d) \models \varphi$$

$$\Rightarrow \text{voor alle } \bar{d} \in D^n \text{ is er een } d \in D : \mathcal{M}, b(\bar{x}|\bar{d})(y|d) \models \varphi$$

$$\Leftrightarrow \text{voor alle } \bar{d} \in D^n : \mathcal{M}, b(\bar{x}|\bar{d}) \models \exists y \varphi$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{M}, b \models \forall \bar{x} \exists y \varphi.$$

(1) $\Rightarrow$ (2): vooronderstel dat, voor een willekeurig paar $\mathcal{M}, b$: $\mathcal{M}, b \models \forall \bar{x} \exists y \varphi$.

$$\mathcal{M}, b \models \forall \bar{x} \exists y \varphi$$

$$\Leftrightarrow \text{voor alle } \bar{d} \in D^n : \mathcal{M}, b(\bar{x}|\bar{d}) \models \exists y \varphi$$

$$\Leftrightarrow \text{voor alle } \bar{d} \in D^n \text{ is er een } d \in D : \mathcal{M}, b(\bar{x}|\bar{d})(y|d) \models \varphi (*)$$

Gegeven (*) kunnen we een functie $F : D^n \rightarrow D$ definiëren zodanig dat

$$d =_{Def} F(\bar{d})$$

en F dus voldoet aan (*). Als er meerdere zulke d 's in D bestaan, dan kiezen we een willekeurige d . (We gebruiken hier dus weer impliciet het keuzeaxioma.) Laat vervolgens f een nieuw functiesymbool zijn dat nog niet voorkwam in de lijst van functiesymbolen van $\mathcal{M}$ en definieer $\mathcal{M}'$ als $\mathcal{M}$ plus het nieuwe functiesymbool f .

Blz. 142, it. 12.14: Voor de geldigheid van een redenering maakt het niet uit of je naar een zeker individu verwijst met een *eigen naam* (de constante) of met een *pronomen* (de variabele). De regel is dus: behandel vrije variabelen als constanten.

Blz. 144, it. 1:

$$\forall x(fffx = x), \forall z(ffz = fz) \circ_1 \forall y(fy = y)$$

$$\text{rechts-}\forall, 1, [d/y]$$

$$\circ_2 fd = d$$

$$\text{links-}\forall, 1:1, [d/x]$$

$$fffd = d \circ_3$$

$$\text{links-}\forall, 1:2, [d/z]$$

$$ffd = fd \circ_4$$

$$\text{links-}\forall, 1:2, [f(d)/z]$$

$$fffd = ffd \circ_5$$

$$\text{pas 5 toe in 3}$$

$$ffd = d \circ_6$$

$$\text{pas 4 toe in 6}$$

$$fd = d \circ$$

$\times$

Blz. 144, it. 1:

$$\forall xy(fx = gy) \circ_1 \forall xy(fx = fy)$$

$$\text{rechts-}\forall, [d/x, e/y]$$

$$\circ_2 fd = fe$$

$$\text{links-}\forall, 1, [d/x, d/y]$$

$$fd = gd \circ_3$$

$$\text{links-}\forall, 1, [e/x, d/y]$$

$$fe = gd \circ_4$$

$$= \text{id}$$

$$fe = fe \circ_5$$

$$\text{pas 4 toe in 5}$$

$$gd = fe \circ_6$$

$$\text{pas 6 toe in 3}$$

$$fd = fe \circ$$

$\times$

Blz. 144, it. 1: Deze werd voorgedaan in een eerder voorbeeld.

Interpreteer vervolgens f als F . Dus: $(f)_I =_{Def} F$.

$$\begin{aligned}
 & \text{voor alle } \vec{d} \in D^n \text{ is er een } d \in D : \mathcal{M}, b(\vec{x}|\vec{d})(y|d) \models \varphi \\
 \Leftrightarrow & \text{voor alle } \vec{d} \in D^n \text{ is er een } d \in D : \mathcal{M}', b(\vec{x}|\vec{d})(y|d) \models \varphi \\
 \Rightarrow & \text{voor alle } \vec{d} \in D^n : \mathcal{M}', b(\vec{x}|\vec{d})(y|(f)_I(\vec{d})) \models \varphi \\
 & \vdots \\
 \Leftrightarrow & \text{voor alle } \vec{d} \in D^n : \mathcal{M}', b(\vec{x}|\vec{d}) \models [f(\vec{x})/y]\varphi \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{M}', b \models \forall \vec{x}[f(\vec{x})/y]\varphi.
 \end{aligned}$$

Waarmee bewezen is dat $\forall \vec{x}[f(\vec{x})/y]\varphi$ ook vervulbaar is. $\square$

Blz. 154, it. 1: $\forall x Qx f(x)$.

Blz. 154, it. 2: Qab .

Blz. 154, it. 3: $\forall z(Qab \wedge Rbz)$.

Blz. 154, it. 4: $\forall z(Qf(z)g(z) \wedge Rg(z)z)$.

Blz. 154, it. 5:

$$\forall x \forall y (Rxyz(x, y) \rightarrow (Pyz(x, y)u(x, y) \rightarrow Qf(u(x, y)z(x, y))))$$

Blz. 154, it. 6:

$$\forall x \forall y (Rg(x, y)h(x, y) \rightarrow (Pg(x, y) \rightarrow Qf(h(x, y))))$$

Blz. 159, it. 1e:

1.	$\neg \exists Px$	ass
2.	$\overline{Pa}$	ass
3.	$\exists x Px$	I $\exists$, 2
4.	$\perp$	G $\neg$, 1, 3
5.	$\neg Pa$	I $\neg$
6.	$\forall x \neg Px$	I $\forall$, 5

Toelichting: om $\neg Pa$ te bewijzen voor willekeurige a , beginnen we het tegendeel aan te nemen, te weten Pa . In regel (5) hangt deze a niet meer af van eerdere aannames, en mogen we deze formule daarom veralgemeniseren.

Blz. 159, it. 1f: Als in de vorige uitwerking, alleen dan $\neg Pa$ aannemen.

1.	$\neg \exists \neg Px$	ass
2.	$\overline{\neg Pa}$	ass
3.	$\exists x \neg Px$	I $\exists$, 2
4.	$\perp$	G $\neg$, 1, 3
5.	$\neg \neg Pa$	I $\neg$
6.	Pa	$\neg \neg$ -regel, 5
7.	$\forall x Px$	I $\forall$, 6

Blz. 159, it. 1g: Dit is een goede oefening om de G $\exists$ -regel te leren te beheersen. G $\exists$ -regel twee keer toepassen.

1.	$\exists x \exists y Pxy$	ass
2.	$\overline{\exists y Pay}$	ass
3.	$\overline{Pab}$	ass
4.	$\exists x Pxb$	I $\exists$, 3
5.	$\exists y \exists x Pxy$	I $\exists$, 4
6.	$Pab \rightarrow \exists y \exists x Pxy$	I $\rightarrow$
7.	$\exists y \exists x Pxy$	G $\exists$, 2, 6
8.	$\exists y Pay \rightarrow \exists y \exists x Pxy$	I $\rightarrow$
9.	$\exists y \exists x Pxy$	G $\exists$, 1, 8

Toelichting: in de stap van regel (1) naar regel (2) mogen we niet *direct* Pab neerzetten, omdat de G $\exists$ -regel altijd maar kan worden toegepast op slechts één variabele (cf. 7, 9).

Blz. 159, it. 1h:

1.	$\exists y \forall x Pxy$	ass
2.	$\overline{\forall x Pxb}$	ass
3.	Pab	G $\forall$, 2
4.	$\exists y Pay$	I $\exists$, 3
5.	$\forall x Pxb \rightarrow \exists y Pay$	I $\rightarrow$
6.	$\exists y Pay$	G $\exists$, 1, 5
7.	$\forall x \exists y Pxy$	I $\forall$, 6

Merk op dat hier alle vier de regels I $\exists$, G $\forall$, I $\forall$ en G $\exists$ worden gebruikt.

Blz. 159, it. 1i: Formeel analogon van bewijs uit het ongerijmde (*reductio ad absurdum*):

1.	$\neg \forall x \neg Px$	ass
2.	$\overline{\neg \exists x Px}$	ass
3.	$\overline{Pa}$	ass
4.	$\exists x Px$	I $\exists$, 3
5.	$\perp$	G $\neg$, 2, 4
6.	$\neg Pa$	I $\neg$
7.	$\forall x \neg Px$	I $\forall$, 6
8.	$\perp$	G $\neg$, 1, 7
9.	$\neg \neg \exists x Px$	I $\neg$
10.	$\exists x Px$	$\neg \neg$ -regel, 9

Toelichting: in regel (2) wordt gezegd: stel niet. Om nu tot een tegenspraak (8) te komen, proberen we met een willekeurige constante, a , $\forall x \neg Px$ af te leiden. In (3) zeggen we weer: stel niet.

Blz. 159, it. 2a:

1.	$\exists x(Px \wedge Qx)$	ass
2.	$Pa \wedge Qa$	ass
3.	Pa	$G\wedge, 2$
4.	Qa	$G\wedge, 2$
5.	$\exists xPx$	$I\exists, 3$
6.	$\exists yQy$	$I\exists, 4$
7.	$\exists xPx \wedge \exists yQy$	$I\wedge, 5, 6$
8.	$(Pa \wedge Qa) \rightarrow (\exists xPx \wedge \exists yQy)$	$I\rightarrow$
9.	$\exists xPx \wedge \exists yQy$	$G\exists, 1, 8$

Toelichting: in (2) stellen we $\exists x(Px \wedge Qx)$ voor a willekeurig. (Standaard gebruik van existentiële formule.) Regels (2-4) is “uitpellen,” regels (5-7) is samenstellen. Centrale punt in het bewijs is regel (9): toepassing van $G\exists$.

Blz. 159, it. 2b:

1.	$\forall x(Px \rightarrow Qx)$	
2.	$\exists xPx$	ass
3.	Pa	ass
4.	$Pa \rightarrow Qa$	$G\forall, 1$
5.	Qa	$G\rightarrow, 3, 4$
6.	$\exists xQx$	$I\exists, 5$
7.	$Pa \rightarrow \exists xQx$	$I\rightarrow$
8.	$\exists xQx$	$G\exists, 2, 7$

Toelichting: merk op hoe de existentiële formule (2) weer standaard gebruikt wordt: als $\exists xPx$ (2), stel dan eens dat a die x is (3). Vervolgens kom je bij (7) uit op het verlangde resultaat. $G\exists, 2$ en 7 geven dan $\exists xQx$ onvoorwaardelijk.

Blz. 159, it. 2c:

1.	$\exists x\neg Px$	ass
2.	$\neg Pa$	ass
3.	$\forall xPx$	ass
4.	Pa	$G\forall, 3$
5.	$\perp$	$G\neg, 2, 4$
6.	$\neg\forall xPx$	$I\neg$
7.	$\neg Pa \rightarrow \neg\forall xPx$	$I\rightarrow$
8.	$\neg\forall xPx$	$G\exists, 1, 7$

Toelichting: in regel (2) wordt op de standaard manier $G\exists$ toegepast. Vervolgens wordt, om een tegenspraak te forceren, op regel (3) $\forall xPx$ aangenomen.

Blz. 159, it. 2d:

1.	$\forall x\neg Px$	ass
2.	$\exists xPx$	ass
3.	Pa	ass
4.	$\neg Pa$	$G\forall, 1$
5.	$\perp$	$G\neg, 3, 4$
6.	$Pa \rightarrow \perp$	$I\rightarrow$
7.	$\perp$	$G\exists, 2, 6$
8.	$\neg\exists xPx$	$I\neg$

Toelichting: ook dit is weer een bewijs uit het ongerijmde. Eerst wordt in (2) het tegengestelde aangenomen, met de bedoeling op een tegenspraak (7) uit te komen. Bij (6) hadden we de $I\neg$ -regel kunnen toepassen, maar dat hebben we niet gedaan want anders kwamen we bij $\neg Pa$ terecht wat niet direct leidt tot $\neg\exists xPx$. Dus passen we $I\rightarrow$ toe. De toepassing van de $G\exists$ -regel op (7) is wat typisch (maar verder correct).

Blz. 159, it. 2e:

1.	$\neg\forall xPx$	ass
2.	$\neg\exists x\neg Px$	ass
3.	$\neg Pa$	ass
4.	$\exists x\neg Px$	$I\exists, 3$
5.	$\perp$	$G\neg, 2, 4$
6.	$\neg\neg Pa$	$I\neg$
7.	Pa	$\neg\neg$ -regel, 6
8.	$\forall xPx$	$I\forall, 7$
9.	$\perp$	$G\neg, 1, 8$
10.	$\neg\neg\exists x\neg Px$	$I\neg$
11.	$\exists x\neg Px$	$\neg\neg$ -regel, 10

Toelichting: Net als een eerdere opgave is dit ook een bewijs uit het ongerijmde. In regel (2) zeggen we: “stel niet”. Om een tegenspraak te creëren proberen dan vervolgens $\forall xPx$ te bewijzen. Dit doen we door Pa te bewijzen voor willekeurige a . Op regel (7) blijkt dat a inderdaad willekeurig is.

Blz. 159, it. 2f:

1.	$\forall x(Px \rightarrow Qx)$	
2.	$\exists x\neg Qx$	ass
3.	$\neg Qa$	ass
4.	Pa	ass
5.	$Pa \rightarrow Qa$	$G\forall, 1$
6.	Qa	$G\rightarrow, 4, 5$
7.	$\perp$	$G\neg, 3, 6$
8.	$\neg Pa$	$I\neg$
9.	$\exists x\neg Px$	$I\exists, 8$
10.	$\neg Qa \rightarrow \exists x\neg Px$	$I\rightarrow$
11.	$\exists x\neg Px$	$G\exists, 2, 10$

Blz. 159, it. 2g:

1.	$\forall x(Px \vee Qx)$	
2.	$\exists x\neg Qx$	ass
3.	$\neg Qa$	ass
4.	$Pa \vee Qa$	$G\forall, 1$
5.	Pa	ass
6.	Pa	Herh, 5
7.	$Pa \rightarrow Pa$	$I\rightarrow$
8.	Qa	ass
9.	$\perp$	$G\neg, 3, 8$
10.	$Qa \rightarrow Pa$	$I\rightarrow$
11.	Pa	$G\vee, 4, 7, 10$
12.	$\exists xPx$	$I\exists, 11$
13.	$\neg Qa \rightarrow \exists xPx$	$I\rightarrow$
14.	$\exists xPx$	$G\exists, 2, 13$

Toelichting: een lastige opgave, omdat het bijna onvermijdelijk lijkt dat zowel de $G\forall$ - als de $G\exists$ -regel moeten worden toegepast. (Wij hebben in ieder geval geen bewijs kunnen vinden zonder dat één van deze twee regels worden gebruikt.)

Blz. 159, it. 2h:

1.	$\forall x(Px \rightarrow Qx)$	
2.	$\exists x(Px \wedge Rx)$	ass
3.	$Pa \wedge Ra$	ass
4.	Pa	$G\wedge, 3$
5.	Ra	$G\wedge, 3$
6.	$Pa \rightarrow Qa$	$G\forall, 1$
7.	Qa	$G\rightarrow, 4, 6$
8.	$Qa \wedge Ra$	$I\wedge, 5, 7$
9.	$\exists x(Qx \wedge Rx)$	$I\exists, 8$
10.	$(Pa \wedge Ra) \rightarrow \exists x(Qx \wedge Rx)$	$I\rightarrow$
11.	$\exists x(Qx \wedge Rx)$	$G\exists, 2, 10$

Blz. 160, it. 14.12: x voor y substitueren in $\neg\forall x x = y$ levert $\neg\forall x x = x$, en dat is een contradictie (niet vervulbaar), want elk object is gelijk aan zichzelf.

$\forall y\neg\forall x x = y$ is equivalent met $\forall y\exists x \neg x = y$; deze formule beschrijft de situatie dat er minstens twee objecten zijn; de voorzin van de implicatie is dus vervulbaar. Kortom, elk model met meer dan één object vormt een tegenvoorbeeld met betrekking tot de voorlopige versie van axioma 4.

Blz. 160, it. 14.13: 1. nee; substitutie zou geven:

$Px \wedge \exists x Rxx$ en daarin is de laatste x niet meer vrij waar y eerst wel vrij was.

2. ja; het substitutie-resultaat is $Px \wedge \exists z Rzx$ en x is vrij waar y vrij was.

3. ja; de substitutie verandert de formule niet.

4. nee; het eerste voorkomen van y is voor substitutie vrij, maar erna staat daar de gebonden variabele x .

5. ja; de substitutie verandert de formule niet.

6. ja; op de plaats van de vrije y staat ook na substitutie een vrije variabele (x).

Blz. 161, it. 14.14:

1	$\forall x(Ax \rightarrow Bx)$	[aanname]
2	$\forall x(Ax \rightarrow Bx) \rightarrow (Aa \rightarrow Ba)$	[axioma 4]
3	$Aa \rightarrow Ba$	[MP uit 1 en 2]
4	Aa	[aanname]
5	Ba	[MP uit 3 en 4]

Blz. 161, it. 14.15:

1. $\forall x(\neg Ax \rightarrow \neg Bx)$ [aanname]
2. $\forall x(\neg Ax \rightarrow \neg Bx) \rightarrow (\neg Aa \rightarrow \neg Ba)$ [axioma 4]
3. $\neg Aa \rightarrow \neg Ba$ [MP uit 1 en 2]
4. $(\neg Aa \rightarrow \neg Ba) \rightarrow (Ba \rightarrow Aa)$ [axioma 3]
5. $Ba \rightarrow Aa$ [MP uit 3 en 4]
6. Ba [aanname]
7. Aa [MP uit 5 en 6]
8. $\forall x(Ax \rightarrow Cx)$ [aanname]
9. $\forall x(Ax \rightarrow Cx) \rightarrow (Aa \rightarrow Ca)$ [axioma 4]
10. $Aa \rightarrow Ca$ [MP uit 8 en 9]
11. Ca [MP uit 7 en 10]

Blz. 163, it. 14.16: Voor het bewijs is het handig uit te gaan van het principe:

$$\text{lemma} \quad T \vdash \varphi \iff \bar{T} \vdash \varphi$$

Bewijs van het lemma:

($\Leftarrow$) Omdat $T \subseteq \bar{T}$, geldt dat alle φ die afleidbaar zijn uit T ook afleidbaar zijn uit $\bar{T}$.

($\Rightarrow$) Stel dat φ uit $\bar{T}$ afleidbaar is. Laat de afleiding $\mathcal{A}$ van φ gebruik maken van premissen $\psi_1, \dots, \psi_n$ uit $\bar{T}$. Elke ψ_i is dus per definitie afleidbaar uit T . Dan kunnen we φ ook direct uit T afleiden door eerst de afleidingen van $\psi_1, \dots, \psi_n$ uit T onder elkaar te zetten en dan te vervolgen met afleiding $\mathcal{A}$. $\square$

Nu de eerste bewering: als T consistent is, dan $\bar{T}$ ook.

Bewijs van de bewering: Neem aan dat T consistent is, maar $\bar{T}$ niet. Dan is er een φ waarvoor zowel $\bar{T} \vdash \varphi$ als $\bar{T} \vdash \neg\varphi$. Nu volgt met het lemma dat dan ook $T \vdash \varphi$ en $T \vdash \neg\varphi$, wat in tegenspraak is met de veronderstelde consistentie van T . $\square$

En omgekeerd: Stel dat $\bar{T}$ consistent is, maar T niet. Dan is er een φ zodat zowel $T \vdash \varphi$ als $T \vdash \neg\varphi$; weer met gebruik van het lemma uit het vorige antwoord volgt dat dan $\bar{T} \vdash \varphi$ en $\bar{T} \vdash \neg\varphi$, hetgeen in strijd is met de aanname dat $\bar{T}$ consistent is. $\square$

Blz. 164, it. 14.17: We doen inductie naar de opbouw van φ .

- *Basisstap:* als φ een atomaire formule is en b en b' kennen dezelfde waarden toe aan de vrije variabelen in φ dan zal de waardefunctie W dezelfde waarden toekennen aan alle termen in φ , met als gevolg dat $V_b(\varphi) = V_{b'}(\varphi)$.
- *Inductiestap:* stel voor elke echte deelformule ψ van φ geldt dat als $b(v) = b'(v)$ voor elke vrije variabele v in ψ , dan $V_b(\psi) = V_{b'}(\psi)$ (inductiehypothese). Laat nu b en b' dezelfde waarden geven aan de vrije variabelen in φ . Als φ de vorm $\neg\psi$ heeft, dan volgt hieruit onmiddellijk met behulp van de waarheidsdefinitie voor de connectieven dat $V_b(\varphi) = V_{b'}(\varphi)$. Als $\varphi = \psi \rightarrow \chi$, dan is de inductiehypothese van toepassing op ψ en χ , terwijl V_b en $V_{b'}$ gelijk zijn voor de vrije variabelen in ψ en χ , want die zijn ook vrij in φ ; de waarheidstabel voor $\rightarrow$ doet de rest.

Als φ de vorm $\forall v\psi$ heeft dan heeft ψ mogelijkwerwijs de variabele v vrij. Merk echter op dat desalniettemin uit de inductiehypothese volgt dat $b(v|d)$ en $b'(v|d)$ voor elke vrije variabele in ψ dezelfde waarde opleveren. Hieruit volgt met behulp van de waarheidsdefinitie voor de universele kwantor dat $V_b(\varphi) = V_{b'}(\varphi)$. $\square$

Blz. 167, it. 14.18: ($\Rightarrow$) Bij opdracht 357 is al bewezen dat $\bar{T}$ consistent is als T dat is. $\bar{T}$ is ook *maximaal* consistent, want stel $\varphi \notin \bar{T}$, dan $T \vdash \varphi$, dus (T is volledig) $T \vdash \neg\varphi$. Maar dan is $\bar{T} \cup \{\varphi\}$ inconsistent.

($\Leftarrow$) $\bar{T}$ is consistent dus ook T (zie opdracht 357). T is ook volledig want stel $T \not\vdash \varphi$, dan $\varphi \notin \bar{T}$, dus (stelling 9.11 Beslisbaarheid, correctheid, volledigheidstelling.11) $\neg\varphi \in \bar{T}$, ergo $T \vdash \neg\varphi$. $\square$

Blz. 168, it. 14.19: De zin kan, gegeven zijn aanwezigheid in dit boek niet onwaar zijn! Stel maar dat de zin toch onwaar is. Dan is het enerzijds zo dat er onwaarheden (“fouten”) in dit boek staan, anderzijds vanwege de inhoud van de zin, dat er juist géén fouten instaan. Dit is onmogelijk (als we tenminste ‘fout’ en ‘onwaarheid’ gelijkstellen, en de zin echt *gebruiken* en niet slechts *noemen*). De zin kan echter best waar zijn; we kunnen hem bijvoorbeeld vervullen door hem in een boek te plaatsen ...

Blz. 168, it. 14.20: Stel de zin is waar. Dan geldt dus, dat zegt de zin immers, dat ze onwaar is, hetgeen in tegenspraak is met de aanname.

Stel nu dat de zin onwaar is. Dat is ook wat de zin beweert; de zin is dus waar, hetgeen weer in tegenspraak is met de aanname.

Blz. 168, it. 14.21: De ‘leugenaarszin’ X is waar desda NAX waar is. Verder weten we dat voor elk rijtje Y geldt dat VNAY waar is mits NAYY dat is. Kiezen we dus $X = \text{VNAY}$ dan zitten we al een stuk in de goede richting: dan NA VNAY (de spatie dient slechts de leesbaarheid) $\Leftrightarrow \text{NAX} \Leftrightarrow X \Leftrightarrow \text{VNAY} \Leftrightarrow \text{NAYY}$. Maar de “vergelijking” NA VNAY $\Leftrightarrow$ NAYY heeft natuurlijk een oplossing: $Y = \text{VNA}$. En dus is $X = \text{VNA}$ de gevraagde leugenaarszin.

Deze X is waar, want stel dat VNA VNA afdrukbaar is, dan zegt de correctheid van de machine dat X dan waar moet zijn; maar dan is VNA VNA juist *niet* afdrukbaar! Tegenspraak; dus X is niet afdrukbaar en daarmee waar. We kunnen, desnoods met brute kracht, nagaan dat dit ook het simpelste ware tekenrijtje is dat van zichzelf zegt dat het niet afdrukbaar is.

Blz. 169, it. 15.1: 1. $\exists_t x Zkx \wedge \neg \forall_t x Zkx$

discussiedomein met soorten	vertaalsleutel
• m : mensen	• Zxy : x is ziek op y
• t : tijdstippen	• k : Kortjakje

2. $\forall_d x (Zx \rightarrow \exists_b y Gk y x)$

<i>discussiedomein met soorten</i>	<i>vertaalsleutel</i>	3. $\neg \exists x \in M \exists y \in K : Wxy \rightarrow \neg \exists x \in M \exists y \in K : Vxy$ <i>discussiedomein:</i> mensen en kenbare feiten <i>vertaalsleutel:</i>
d : dagen van de week b : kerken (bidplaatsen) m : mensen	$Gxyz$: x gaat naar y op z Zx : x is een zondag k : Kortjakje	Kx : x is een kenbaar feit; Mx : x is een mens; Vxy : x verklapt y; Wxy : x weet y.
3. $\forall_m x \exists_t y Zxy$		
<i>discussiedomein met soorten</i>	<i>vertaalsleutel</i>	4. $\forall x \in M \exists y \in M : Hxy \wedge \exists x \in M \forall y \in M : Hxy$ <i>discussiedomein:</i> mensen <i>vertaalsleutel:</i>
m : mensen t : tijdstippen	Zxy : x is ziek op y	Hxy : x houdt van y; Mx : x is een mens.

Blz. 170, it. 15.2: 1. $\exists t Zkt \wedge \neg \forall t Zkt$

<i>discussiedomein met soorten</i>	<i>vertaalsleutel</i>	Blz. 171, it. 15.5: $\forall X(\forall x((Dx \wedge Vx) \rightarrow Xx) \rightarrow Xp) \wedge \neg \exists X(\forall x((Sx \wedge Lx) \rightarrow Xx) \wedge Xp)$ waarin:
m : mensen t : tijdstippen	$Z_{(m,t)}xy$: x is ziek op y k_m : Kortjakje	Dx : x is een dictator Lx : x is geliefd Sx : x is een staatshoofd Vx : x is gevreesd
2. $\forall w(Zw \rightarrow \exists y Gkyw)$		p : Pinochet
<i>discussiedomein met soorten</i>	<i>vertaalsleutel</i>	Blz. 172, it. 15.6: $\exists x(\forall y(Ky \leftrightarrow \forall X(Xy \rightarrow Xx)) \wedge Tx)$ waarin:
d : weekdagen b : kerken m : mensen	$G_{(m,b,d)}xyz$: x gaat naar y op z $Z_{(d)}x$: x is een zondag k_m : Kortjakje	Kx : x is een koning Tx : x toort

w is hier een variabele van soort d , en y van soort b .

3. $\forall x \exists t Zxt$

<i>discussiedomein met soorten</i>	<i>vertaalsleutel</i>	Blz. 172, it. 15.7: Het is duidelijk dat $\forall X(Xx \leftrightarrow Xy)$ impliceert dat $\forall X(Xx \rightarrow Xy)$. Het omgekeerde volgt natuurlijk als we kunnen bewijzen dat $\forall X(Xx \rightarrow Xy) \Rightarrow \forall X(Xy \rightarrow Xx)$. Er zijn verschillende manieren om dit aan te tonen:
m : mensen t : tijdstippen	$Z_{(m,t)}xy$: x is ziek op y	(met Leibniz' principe) $\forall X(Xx \rightarrow Xy) \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow y = x \Leftrightarrow \forall X(Xy \rightarrow Xx)$. Dit eenvoudige bewijs kunnen we echter niet gebruiken wanneer we '=' willen <i>definieren</i> in tweede orde logica. (met stof uit § 15.4 Extensionele typenlogica section.15.4) Laat $\forall X(Xx \rightarrow Xy)$ gegeven zijn. Kies nu een willekeurige predikaatvariabele Y. Dan leidt de gegeven formule voor de instantiatie $X = \lambda z[\neg Yz]$ tot: $\neg Yx \rightarrow \neg Yy$. Met contrapositie volgt hieruit $Yy \rightarrow Yx$, en dus in het algemeen $\forall Y(Yy \rightarrow Yx)$, ofwel $\forall X(Xy \rightarrow Xx)$. (met stof uit § 15.5 Syntaxis en semantiek van de extensionele typenlogica section.15.5) Een semantische tegenhanger van het vorige semi-deductieve bewijsje.

x is hier een variabele van soort m .

Blz. 170, it. 15.3: – de vertaling van $\forall_m x \exists_t y Oxy \wedge \exists_m z \forall_t u Ozu$ staat al in de tekst

– $\exists_m x \exists_t y Oxy \rightsquigarrow \exists x(Mx \wedge \exists y(Ty \wedge Oxy))$

– $\forall_t x Zkx \rightsquigarrow \forall x(Tx \rightarrow Zkx)$

– $\exists_m x \forall_t y(k = x \wedge Zxy) \rightsquigarrow \exists x(Mx \wedge \forall y(Ty \rightarrow (k = x \wedge Zxy)))$

Blz. 171, it. 15.4: 1. $\neg \forall x \in M : Ax$

discussiedomein: mensen

vertaalsleutel:

- Ax : x is aardig;
- Mx : x is een mens.

2. $\exists x \in V \forall y \in M : Nxy$

discussiedomein: mensen

vertaalsleutel:

- Mx : x is een man;
- Nxy : x minacht y ;
- Vx : x is een vrouw.

Blz. 172, it. 15.8:

$$\{\langle A, B \rangle \mid A \subseteq D \text{ en } B \subseteq D \text{ en } |A \cap B| \leq 5\}$$

Blz. 172, it. 15.9:

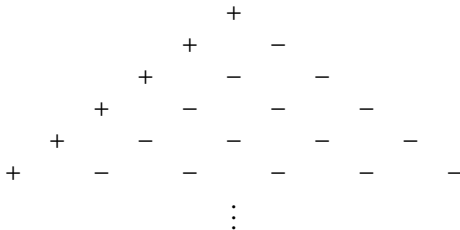
$$\{\langle A, B \rangle \mid A \subseteq D \text{ en } B \subseteq D \text{ en } A \cap B = \emptyset\}$$

Blz. 172, it. 15.10:

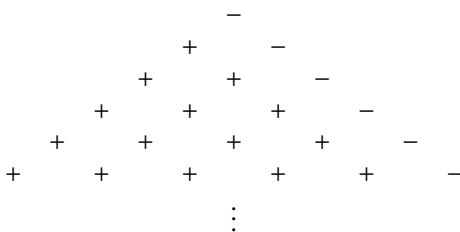
$$\{\langle A, B \rangle \mid A \subseteq D \text{ en } B \subseteq D \text{ en } A \not\subseteq B\}$$

Blz. 174, it. 15.11:

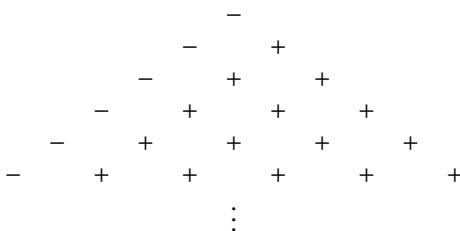
1. **geen:**



2. **niet alle:**



3. **minstens één** (of gewoon **een**):

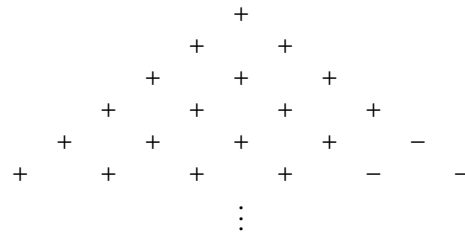


4.

- **geen** en **alle** zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van de verticale as die de piramide middendoor deelt.
- **geen** en **minstens één** zijn elkaars complement (dat wil zeggen alle plussen veranderen in minnen en alle minnen in plussen).
- **geen** en **niet alle** zijn het spiegelbeeld van elkaars complement (of omgekeerd, het complement van elkaars spiegelbeeld).
- **niet alle** en **alle** zijn elkaars complement.
- **niet alle** en **minstens één** zijn elkaars spiegelbeeld.
- **minstens één** en **alle** zijn het spiegelbeeld van elkaars complement (of omgekeerd, het complement van elkaars spiegelbeeld).

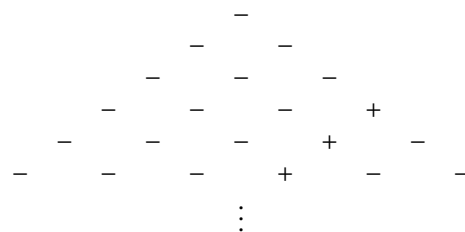
Blz. 174, it. 15.12:

1. **hoogstens drie:**



2. In dit patroon staat een '+' op elke plaats waar in het patroon voor **minstens drie** een '-' staat en bovendien overal op de linker-diagonaal door het $\langle 0, 3 \rangle$. Die diagonaal bestaat in het patroon voor **hoogstens drie** ook uit plussen, en is daar de 'grenslijn' van de driehoek met plussen.

3. **precies drie:**



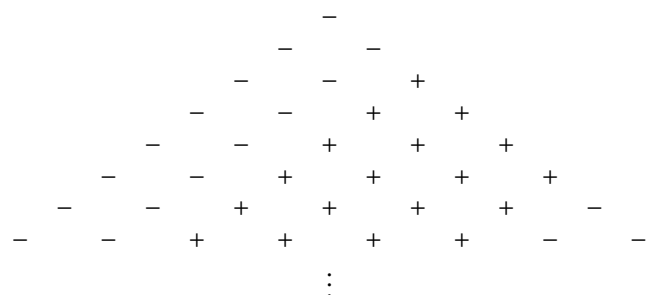
4. In dit laatste patroon staat alleen op de grenslijn van beide andere patronen een '+'. Algemeener: daar waar de patronen voor **minstens drie** en **hoogstens drie** beide een '+' hebben.

5. **Precies drie** kan immers geparafraseerd worden als **hoogstens drie en minstens drie**. Algemeener: *conjunctie* van twee kwantoren levert een piramide-patroon op met plussen op slechts die plaatsen die in beide patronen van de samenstellende kwantoren een plus hadden, kortom de *doorsnijding* van de plus-patronen. Evenzo levert *disjunctie* van kwantoren een piramide-patroon op met plussen op de plaatsen die in minstens één van beide patronen van de samenstellende kwantoren een plus hadden; dat wil zeggen de *vereniging* van de plus-patronen.

Blz. 174, it. 15.13:

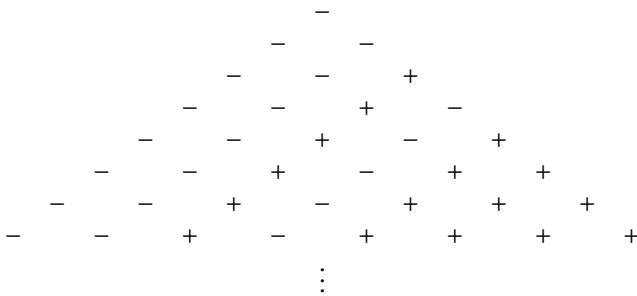
1.

minstens twee en hoogstens vijf:



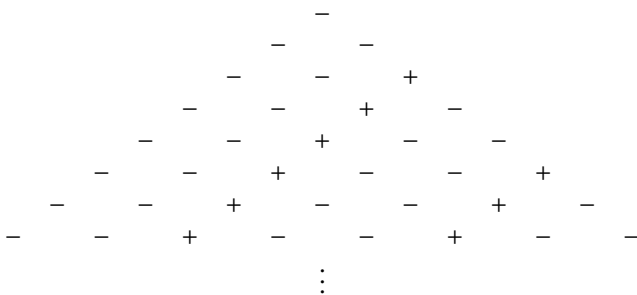
2.

precies twee of minstens vier:



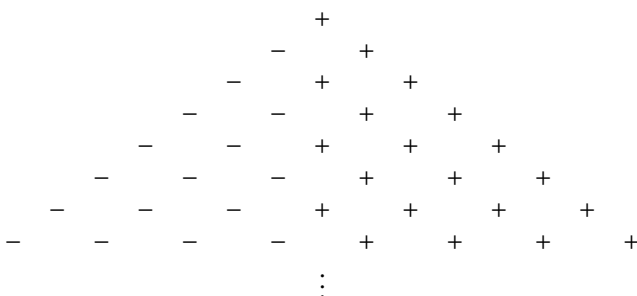
3.

precies twee of precies vijf:



4.

minstens de helft:



Blz. 175, it. 15.14:

1. Niet reflexief. *geen A zijn A* is alleen dan waar als $A = \emptyset$. In de regel zal dit geval zich niet voordoen. In een domein met minstens één mens geldt *geen mensen zijn mensen* niet.
2. Ook niet irreflexief. *geen A zijn A* is niet altijd onwaar. In een domein zonder weerwolven geldt *geen weerwolven zijn weerwolven* wél.
3. Symmetrisch. *geen voetballers zijn hackers* impliceert dat *geen hackers zijn voetballers*. Dit is conform de gegeven interpretatie van *geen*.
4. Niet antisymmetrisch. De voetballers uit het vorige onderdeel hoeven immers niet de hackers te zijn.
5. Niet transitief. Uit *geen hackers zijn voetballers* en *geen voetballer zijn hackers* volgt immers niet dat *geen hackers zijn hackers*.

Blz. 175, it. 15.15:

1. Niet reflexief. *precies twee A zijn A* is waar desda $|A| = 2$; *precies twee voetballers zijn voetballers* is dus onwaar als er meer of juist minder dan twee voetballers zijn.
2. Niet irreflexief. Als er exact twee voetballers in het domein zijn dan is bovenstaande zin juist wel waar.
3. Symmetrisch. Het volgt uit *precies twee voetballers zijn hackers* dat *precies twee hackers zijn voetballers*.
4. Antisymmetrisch. Opnieuw: de voetballers in het vorige voorbeeld hoeven natuurlijk niet precies de hackers te zijn.
5. Niet transitief. Stel maar voor: twee voetballende hackers en een niet-voetballende hacker. Dan is *precies twee H V* waar en *precies twee V H* ook, maar *precies twee H H* niet, want dan $|H| = 3$.

Blz. 175, it. 15.16: 1. We nemen aan dat $\mathcal{Q}$ de conservativiteits- en kwantiteits-eigenschap bezit. Dat $\mathcal{Q}$ reflexief is, wil zeggen: $\forall X \mathcal{Q}XX$. Dit betekent dan dat, hoe we X ook kiezen, op plaats $\langle |X - X|, |X \cap X| \rangle$ in de piramide een '+' moet staan. Als $n = |X|$, dan heeft $\langle 0, n \rangle$ een '+'. De rechterzijde (dat wil zeggen de rechterdiagonaal door $\langle 0, 0 \rangle$) moet dus uit plussen bestaan.

2. Laat de rechterzijde van de piramide uit plussen bestaan en stel dat de kwantor $\mathcal{Q}$ niet reflexief is. Dan is er een verzameling A zo dat niet $\mathcal{Q}AA$. Dan zou er op plaats $\langle 0, |A| \rangle$ in de piramide geen plus staan.

Blz. 175, it. 15.17: $\mathcal{Q}$ is irreflexief. Immers stel van niet, dan is er een A is zodat $\mathcal{Q}AA$. Dan zou er op $\langle 0, |A| \rangle$ in de piramide een plus staan, quod non.

Blz. 176, it. 15.18:

Geen kind is stout

Geen kind is druk en stout

Weinig kinderen aten

Weinig kinderen aten veel

Blz. 176, it. 15.19: De verbale constituent mag het positief polaire *allerminst* bevatten **tenzij** het subject rechts neerwaarts monotoon (= rechts-dalend) is.

Blz. 176, it. 15.20:

Opwaartse monotonie links (linker stijging) van een kwantor

Voor alle X, X', Y : als $\mathcal{Q}XY$ en $X \subseteq X'$ dan $\mathcal{Q}X'Y$.

Neerwaartse monotonie links (linker daling) van een kwantor

Voor alle X, X', Y : als $\mathcal{Q}XY$ en $X' \subseteq X$ dan $\mathcal{Q}X'Y$.

1. links-dalend;
2. links-stijgend;
3. links-stijgend;

4. links-dalend;
5. noch links-stijgend, noch links-dalend;
6. links-dalend.

Blz. 178, it. 15.21:

1. $\lambda x[Px]$;
2. $\lambda x[Px](j)$ en dit levert Pj ;
3. $\lambda Z[\exists x(Px \wedge Zx)]$;
4. $\lambda Z[\exists x(Yx \wedge Zx)]$;
5. Omdat Z niet vrij is voor Y , moet de formule eerst veranderd worden door voor Z een andere letter te nemen, bijvoorbeeld X . De formule wordt dan:
 $\lambda Y[\lambda X[\exists x(Yx \wedge Xx)]](Z)$. Conversie levert vervolgens:
 $\lambda X[\exists x(Zx \wedge Xx)]$;
6. $\lambda Y[Yj]$;
7. $\lambda x[Rax](j) \Rightarrow$ (nogmaals λ -conversie) Raj ;
8. $\lambda Y[Ya](\lambda y[Py]) \Rightarrow \lambda y[Py](a) \Rightarrow Pa$;
9. (na herhaald converteren) $(Pb \wedge Qb) \vee Bb$.

Blz. 178, it. 15.22: 1. $\mathbf{V}(\lambda x[Bxg])$;

2. $\mathbf{T}(\lambda x[\exists yGxy])$;
3. $\mathbf{Z}(\lambda x[\neg \exists yVxy])$;
4. $\mathbf{Z}(\lambda x[\neg Vxx])$;
5. $\neg \mathbf{Z}(\lambda x[\neg \forall yVxy])$.

- Blz. 179, it. 15.23:** 1. de Bakoenin-biografie aan Cornelis geven;
2. door Adriaan aan Cornelis gegeven worden;
 3. van Adriaan de Bakoenin-biografie krijgen.

Blz. 179, it. 15.24: 1. $\lambda x[\exists yGxby]$;

2. $\lambda x[\exists yGybx]$;
3. $\lambda x[\exists yGxyc]$;
4. $\lambda x[\exists yGayx]$;
5. $\lambda x[\forall z\exists yGxyz]$.

Blz. 179, it. 15.25: $\mathbf{P}(\lambda xW(x, \exists yBxy))$

vertaalsleutel: $W(x, p)$: x wil p ; Bxy : x bereikt y ; $\mathbf{P}(X)$: X is prijzenswaardig.

Blz. 180, it. 15.26: $\mathbf{V}$ en $\mathbf{S}$ zijn van het type $\langle\langle e, t \rangle, t\rangle$; $\mathbf{M}$ en $\mathbf{P}$ van type $\langle e, \langle\langle e, t \rangle, t\rangle\rangle$.**Blz. 180, it. 15.27:** $\mathcal{S}$, de vertaling van *snel*, is van het type $\langle\langle e, t \rangle, \langle e, t \rangle\rangle$.**Blz. 181, it. 15.28:** 1. $\lambda x[Gxabc]$ (van type $\langle e, t \rangle$);

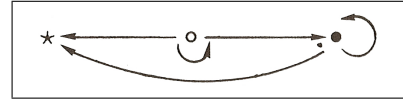
2. $\lambda y[\lambda x[Gxyc]]$ (van type $\langle e, \langle e, t \rangle \rangle$);
3. $\lambda x[Gcbx]$ (van type $\langle e, t \rangle$);
4. $\lambda x[\lambda y[Gcyx]]$ (van type $\langle e, \langle e, t \rangle \rangle$);
5. $\lambda y[\lambda z[\exists xGxyz]]$ (van type $\langle e, \langle e, t \rangle \rangle$);
6. $\lambda x[\exists yGxyc]$ (van type $\langle e, t \rangle$);
7. $\lambda z[\forall x\exists yGxyz]$ (van type $\langle e, t \rangle$).

Blz. 181, it. 15.29:

1. de Bakoenin-biografie geven;
2. de Bakoenin-biografie krijgen;
3. iets geven;
4. iets krijgen.

De uitdrukkingen zijn alle van het type $\langle e, \langle e, t \rangle \rangle$.

Blz. 182, it. 15.30: Om de richting van de pijlen in het diagram hieronder te begrijpen, moet de lezer zich het volgende realiseren. Laat om de gedachten te bepalen $\star$, $\circ$ en $\bullet$ de interpretaties zijn van respectievelijk s , c en p . Dan geldt bijvoorbeeld $I(R)(\star)(\circ) = 1$, en daarmee $V(R(s)(c)) = 1$, oftewel in relationele notatie $V(Rcs) = 1$, en dus $\langle \circ, \star \rangle \in I(R)$: de pijl moet dus van $\circ$ naar $\star$ wijzen en niet omgekeerd!

**Blz. 183, it. 15.31:**

- Als P een n -plaatsige predikaatletter is en $t_1, \dots, t_n$ zijn termen, dan is $Pt_1 \dots t_n$ een welgevormde formule van de MPL;
- Als φ een welgevormde formule is van de MPL, dan $\neg\varphi$ ook.
- Als φ en ψ welgevormde formules zijn van de MPL, dan $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ en $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ ook.
- Als φ een welgevormde formule is van de MPL, en v is een variabele, dan zijn $\forall v\varphi$ en $\exists v\varphi$ ook welgevormde formules van de MPL.
- Als φ een welgevormde formule is van de MPL, dan $\Box\varphi$ en $\Diamond\varphi$ ook.
- Niets anders is een welgevormde formule van de MPL.

Blz. 183, it. 15.32:

- $\exists x\Box Sx$ staat voor: ‘er is iemand die noodzakelijkerwijs wint’.
- $\Box\exists x Sx$ staat voor: ‘het is noodzakelijk dat er iemand wint’.

Blz. 183, it. 15.33: – ‘Het is voor elke speler mogelijk dat hij verliest’ $\rightsquigarrow \forall x\Diamond\neg Sx$;

- ‘Er is een spelsituatie mogelijk waarbij elke speler verliest’ $\rightsquigarrow \Diamond \forall x \neg Sx$.

Blz. 183, it. 15.34: Geen enkele formule is waar.

Blz. 184, it. 15.35: 1. Onwaar, want wereld 1 is toegankelijk voor zichzelf en in 1 geldt $\exists x Rxx$ niet.

2. Waar, want vanuit 2 is alleen 2 toegankelijk en daarin staat $\star$ tot zichzelf in relatie R .
3. Waar, want ook vanuit 3 is slechts 3 toegankelijk; tweemaal dit feit gebruiken en opmerken dat ook hier $\langle \star, \star \rangle \in I(R)$ volstaat.

Blz. 184, it. 15.36: We bewijzen dit uit het ongerijmde. Stel dus dat de te bewijzen bewering onjuist is. Dan is er een model $M = \langle D, W, T, I \rangle$ met T symmetrisch en een wereld $w \in W$ zodat voor een formule φ in dat model $\varphi \rightarrow \Box \Diamond \varphi$ onwaar is w , dus φ is waar in w en $\Box \Diamond \varphi$ onwaar. Uit het laatste volgt dat er een $v \in W$ bestaat waarvoor wTv en $\Diamond \varphi$ onwaar is in v ; dit impliceert op zijn beurt dat voor elke u zodat vTu de formule φ onwaar is. Maar uit de symmetrie van T volgt w zelf zo’n u is, zodat φ in w onwaar zou zijn, wat in tegenspraak is met het eerder gestelde.

Blz. 184, it. 15.37: Als T transitief is, dan geldt het schema $\Box \varphi \rightarrow \Box \Box \varphi$.

We leveren voor de variatie een direct bewijs. Neem een willekeurig model $M = \langle D, W, T, I \rangle$ met T transitief en een wereld $w \in W$ zodat $\Box \varphi$ waar is in w . Kies vervolgens een willekeurige v met wTv ; dan is φ waar in v . Beschouw nu een willekeurige u met vTu . Wegens de transitiviteit van T hebben we nu ook wTu , en dus is φ is waar in u . Derhalve is $\Box \varphi$ waar in v ; en, omdat v een willekeurige T -opvolger is van w , $\Box \Box \varphi$ waar in w . Kortom $\Box \varphi \rightarrow \Box \Box \varphi$ is waar in w , en $\Box \varphi \rightarrow \Box \Box \varphi$ geldig in elk model met een transitieve T .

Blz. 191, it. 16.1: De feiten laten we over aan de gretige lezers van *Ons Koningshuis*. Hier zijn de regels voor *broer*, *zus*, *oom* en *tante*.

```
broer_van(X,Y) :-
    man(X),
    vader_van(V,X), vader_van(V,Y),
    moeder_van(M,X), moeder_van(M,Y),
    X\==Y.

zus_van(X,Y) :-
    vrouw(X),
    vader_van(V,X), vader_van(V,Y),
    moeder_van(M,X), moeder_van(M,Y),
    X\==Y.

oom_van(X,Y) :- ouder_van(0,Y), broer_van(X,0).

tante_van(X,Y) :- ouder_van(0,Y), zus_van(X,0).
```

De bewering $X \neq Y$ drukt uit dat X en Y niet letterlijk identiek zijn: dit is nodig om te coderen dat niemand een broer of zus van zichzelf is. Merk op dat *broer_van* en *zus_van* gevoelig zijn voor volgorde; de antwoorden

$X = \text{beatrix}, Y = \text{margriet}$

en

$X = \text{margriet}, Y = \text{beatrix}$

gelden dus als verschillend.

Blz. 191, it. 16.2: Hier is het gevraagde predikaat:

```
voorouder_van(X,Y) :- ouder_van(X,Y).
voorouder_van(X,Y) :- ouder_van(X,Z),
                        voorouder_van(Z,Y).
```

Blz. 191, it. 16.3: Vooraleer we aan het programmeren slaan is het zaak de strekking van de tekst te doorgronden. Vaart iedereen die een bebaarde man is mee? De eerste regel van het lied schijnt dit te suggereren. Of geldt voor iedereen die meevaart dat het een bebaarde man is? Deze suggestie wordt gewekt door de tweede regel. Wij houden het hier maar op het tweede. Dit leidt tot het volgende programma:

```
man(jan).
man(piet).
man(joris).
man(korneel).
man(klaas).

vrouw(marie).

bebaard(jan)
bebaard(piet).
bebaard(joris).
bebaard(korneel).

vaart_mee(X) :- man(X), bebaard(X).
```

De vraag naar wie er meevaart en het antwoord erop:

```
| ?- vaart_mee(X).

X = jan ;

X = piet ;

X = joris ;

X = korneel ;

no
| ?-
```

In feite wordt een PROLOG programma altijd zo gelezen dat de objecten die aan een definitie voldoen de enige objecten zijn die eraan voldoen. In dit voorbeeld: degenen

die meevaren zijn *precies* de bebaarde mannen. Met andere woorden: als x een man met een baard is dan vaart x mee, en als x meevaart dan is x een man met een baard.

Blz. 192, it. 16.4: Het volgende PROLOG programma volgt de recursieve definitie van de faculteitsfunctie op de voet:

```
fac(0, s 0).
fac(s X, Y) :- fac(X, Z), maal(s X, Z, Y).
```

- Blz. 193, it. 16.5:**
1. Alle lijsten van minstens drie elementen met eerste element a en derde element b .
 2. Alle lijsten met als eerste element een lijst van precies drie elementen waarvan het eerste een a is en het derde een b .
 3. Alle lijsten met als eerste element de lege lijst.
 4. Alle lijsten van twee elementen met als eerste element de lege lijst.
 5. Alle lijsten van drie elementen met als derde element een a .

Blz. 193, it. 16.6: Het predikaat $xyz(X)$ is waar desda X een lijst is met een even aantal elementen.

Blz. 193, it. 16.7: $zyx(X,Y,Z)$ is waar desda Z een lijst is waarin X en Y —in die volgorde—voorkomen als elementen die elkaars burens zijn.

Blz. 194, it. 16.8:

```
laatste(X, [X]).
laatste(X, [_|Y]) :- laatste(X,Y).
```

Blz. 194, it. 16.9: Hier is een recursieve definitie van de omkeerprocedure:

- De lege lijst omkeren levert de lege lijst op.
- Een niet-lege lijst kan als volgt worden omgekeerd: hak de kop eraf, keer dan de staart om, en plak tenslotte de afgehakte kop achter aan de omgekeerde staart.

In PROLOG ziet één en ander er zo uit:

```
keerom([], []).
keerom([Kop|Staart], Lijst) :-
    keerom(Staart, Omgekeerd),
    concat(Omgekeerd, [Kop], Lijst).
```

Blz. 197, it. 16.10: De natuurlijke getallen met nul en de operaties voor optellen en aftrekken vormen geen substructuur van de gehele getallen met diezelfde operaties omdat de natuurlijke getallen niet afgesloten zijn onder de operatie *afrekken*: als m en n natuurlijke getallen zijn met $m < n$ dan is $m - n$ geen natuurlijk getal.

Blz. 199, it. 17.1: $\langle \text{getal} \rangle ::= \langle \text{cijfer} \rangle \mid \langle \text{cijfer} \rangle \langle \text{getal} \rangle$

Blz. 200, it. 17.2: 1. $x := x + 1$ heeft als effect dat de waarde van de variabele x met 1 wordt verhoogd.

2. (als $x < 0$ dan $x := -x$) doet niets wanneer x een positief getal bevat; haalt het minteken weg wanneer x een negatief getal bevat.

3. (als $x > y$ dan $m := x$ anders $m := y$) vult de variabele m met het maximum van x en y .

4. begin $z := x$; $x := y$; $y := z$ einde wisselt de waarden van x en y om met behulp van z ; z en y bevatten na afloop het getal dat eerst in x was opgeslagen.

5. begin $x := y$; $y := x$ einde kopieert de waarde van y in de variabele x ; de oorspronkelijke inhoud van y blijft ongewijzigd; de oorspronkelijke inhoud van x gaat verloren.

6. begin
 $i := 0$;
 $p := 0$;
 zolang $i < x$ doe
 begin $p := p + y$; $i := i + 1$ einde
 einde

berekent het product van x en y , met het resultaat in p , mits x voordat het programma begint groter dan of gelijk is aan 0. Wanneer aan deze voorwaarde niet is voldaan stopt het programma meteen (dan $p = i = 0$); in het andere geval bevat i na afloop de waarde x .

7. begin
 $i := 0$;
 $f := 1$;
 zolang $i < x$ doe
 begin $i := i + 1$; $f := (i * f)$ einde
 einde

berekent de faculteitsfunctie voor x , met het resultaat in f , mits x bij het opstarten van het programma een positieve waarde heeft. Als aan die voorwaarde is voldaan zal i na afloop van het programma de waarde x bevatten; in het andere geval stopt het programma meteen met voor f de waarde 1.

Blz. 200, it. 17.3: Een juiste specificatie is de volgende:

```
{x = X, y = Y}
    begin x := y; y := x einde
{x = Y, y = Y}.
```

Blz. 200, it. 17.4: De specificatie $\{\varphi\} \pi \{\top\}$ is juist voor *elke* beginconditie φ en *elk* programma π . Met andere woorden: deze specificatie zegt in feite niets. Ook zegt de specificatie *niet* dat π termineert.

Blz. 201, it. 17.5: Vervangen van de beginvoorwaarde $x \geq 0$ door $\top$ maakt dat de specificatie het volgende zegt: als het programma termineert dan zal de variabele p na afloop het product van x en y bevatten. Het programma termineert ook altijd, maar wel met de waarde $p = 0$ als x negatief is; in dat geval is $p \neq x \cdot y$ (tenzij $y = 0$).

Blz. 201, it. 17.6: Bijvoorbeeld:

```
{x > 0}
begin
  i := 0;
  y := 0;
  zolang i < x doe
    begin i := i + 1; y := y + i einde
  einde
{y = 1 + 2 + ... + x}.
```

Blz. 201, it. 17.7: Het gevraagde programma is een variant op dat uit de vorige opdracht:

```
{x > 0}
begin
  i := 0;
  y := 0;
  zolang i < x doe
    begin i := i + 1; y := y + (i*(i+1)) einde
  einde
{y = 1^3 + 2^3 + ... + x^3}.
```

Blz. 201, it. 1: Statement, concatenatie (achter elkaar zetten van statements), en if-then-else. Zodra een programma een while-statement bevat geldt niet meer met zekerheid dat $|T(b, \pi)| = 1$. Immers, een while statement kan aanleiding geven tot een oneindige lus.

Blz. 201, it. 2: De bewering $|T(b, \pi)| = 1$ zegt dat het aantal eind-toestanden waarin π ons kan brengen na te zijn gestart in begintoestand b , gelijk is aan 1. Dit zegt ons twee dingen. Ten eerste dat π deterministisch is (telkens hetzelfde verloopt). Immers, de eindtoestand is steeds dezelfde. Ten tweede dat π stopt.

De bewering $|T(b, \pi)| = 0$ zegt dat het aantal eind-toestanden waarin π ons kan brengen na te zijn gestart in begintoestand b , gelijk is aan 0. Dit zegt ons dat π niet stopt. Als het wel stopte moet er tenminste één eindtoestand zijn, maar hier is er geen een.

Blz. 201, it. 17.8: Volgens Definitie 17.3 Formele semantiekdefinitie.3 geldt: $\mathcal{M} \models \{\varphi\} \pi \{\psi\}$ als en slechts als voor alle $b_2 \in T(b_1, \pi)$ geldt: als $\mathcal{M}, b_1 \models \varphi$ dan $\mathcal{M}, b_2 \models \psi$. Maar $T(b_1, \pi)$ is leeg. Dus geldt de voorgaande implicatie ledigerwijs.

Blz. 203, it. 17.9: Een juiste specificatie is:

```
{x = X}
(als x < 0 dan x := -x)
{x = -X ∨ x ≥ 0}.
```

Deze specificatie kan als volgt worden afgeleid met de ‘Als-dan’ regel:

$$\begin{array}{l} \vdash \{x = X \wedge x < 0\} x := -x \{x = -X \vee x \geq 0\} \\ \vdash (x = X \wedge x \geq 0) \rightarrow (x = -X \vee x \geq 0) \\ \hline \vdash \{x = X\} (\text{als } x < 0 \text{ dan } x := -x) \{x = -X \vee x \geq 0\}, \end{array}$$

waarbij de specificatie in de eerste premisse volgt met behulp van het toekenningsaxioma, de regel voor versterking van de beginvoorwaarde en de regel voor

afzwakking van de eindvoorwaarde. De laatste twee regels kunnen immers ook altijd gebruikt worden om voorwaarden te vervangen door logisch equivalente formules.

N.B. Een meer informatieve correctheidsbewering verkrijgen we door, bij dezelfde beginvoorwaarde, de eindvoorwaarde te versterken tot:

$$(x = X \wedge X \geq 0) \vee (x = -X \wedge X < 0).$$

De afleiding verloopt analoog aan de voorgaande.

Blz. 203, it. 17.10: Hier is de specificatie:

```
{x = X ∧ y = Y}
(als x > y dan m := x anders m := y)
{(m = X ∧ X > Y) ∨ (m = Y ∧ X ≤ Y)}.
```

Deze specificatie kan als volgt worden afgeleid met de

Als-dan-anders’ regel:

$$\begin{array}{l} \vdash \{x = X \wedge y = Y \wedge X > Y\} m := x \\ \quad \{(m = X \wedge X > Y) \vee (m = Y \wedge X \leq Y)\} \\ \vdash \{x = X \wedge y = Y \wedge X \leq Y\} m := y \\ \quad \{(m = X \wedge X > Y) \vee (m = Y \wedge X \leq Y)\} \\ \hline \vdash \{x = X \wedge y = Y\} (\text{als } x > y \text{ dan } m := x \text{ anders } m := y) \\ \quad \{(m = X \wedge X > Y) \vee (m = Y \wedge X \leq Y)\}. \end{array}$$

De premissen in deze afleiding kunnen elk worden verkregen door een toepassing van het toekenningsaxioma, de regel voor versterking van de beginvoorwaarde en de regel voor afzwakking van de eindvoorwaarde.

Blz. 204, it. 1: Stel

$$\mathcal{M}, b_1 \models x = 3 \quad (13)$$

en

$$b_2 \in T(b_1, y := x * x). \quad (14)$$

Te bewijzen dat $\mathcal{M}, b_2 \models y = 9$. Dus te bewijzen dat $b_2(y) = 9$. Uit (13) volgt $b_1(x) = 3$. Uit (14) volgt

$$\begin{aligned} b_2 &= b_1(y | b_1(x * x)) \\ &= b_1(y | b_1(x) b_1(x)) \\ &= b_1(y | 3 * 3) \\ &= b_1(y | 9). \end{aligned}$$

Hiermee $b_2(y) = b_1(y | 9)(y) = 9$, wat bewezen moest worden.

Blz. 204, it. 2: Stel

$$\mathcal{M}, b_1 \models x = 3$$

en

$$b_2 \in T(b_1, y := z * z). \quad (15)$$

Te bewijzen dat $\mathcal{M}, b_2 \models y = z^2$. Dus te bewijzen dat $b_2(y) = b_2(z * z)$. We kunnen alvast verklappen dat de eerste voorwaarde er niet toe doet. Die komt dus niet meer

voor in onze redenering. Uit (15) volgt $b_2 = b_1(y|b_1(z * z))$. Hiermee

$$\begin{aligned} b_2(y) &= b_1(y|b_1(z * z))(y) \\ &= b_1(z * z) \\ &= b_1(z) * b_1(z) \\ &= b_2(z) * b_2(z). \end{aligned}$$

De laatste gelijkheid volgt uit het feit dat y en z ongelijke symbolen zijn en dat b_1 en b_2 buiten y (en dus op z) samenvallen.

Blz. 204, it. 3: Stel

$$\mathcal{M}, b_1 \models x \leq 3 \quad (16)$$

en

$$b_2 \in T(b_1, \text{als } x \leq 4 \quad \text{dan } y := x \text{ anders } y := 2 * x) \quad (17)$$

Te bewijzen dat $\mathcal{M}, b_2 \models xy \leq 17$. Dus te bewijzen dat $b_2(x)b_2(y) \leq 17$. Uit (16) volgt $b_1(x) \leq 3$. Omdat $\mathcal{M}, b_1 \models x \leq 4$ is (17) per definitie van de if-then-else semantiek (Def. 17.2 Formele semantiekdefinitie.2, blz. 201 Formele semantiekdefinitie.2) gelijkwaardig aan

$$b_2 \in T(b_1, y := x).$$

Uit dit laatste volgt $b_2 = b_1(y|b_1(x))$. Hieruit volgt dat $b_2(y) = b_1(y|b_1(x))(y) = b_1(x) \leq 3$. Dus $b_1(x)b_2(y) \leq 3 \times 3 = 9 \leq 17$. Nu volgt het gevraagde.

Blz. 204, it. 4: Stel

$$\mathcal{M}, b_1 \models x \leq 3 \quad (18)$$

en

$$b_2 \in T(b_1, \text{als } x \leq 1 \quad \text{dan } y := x \text{ anders } y := x - 1) \quad (19)$$

Te bewijzen dat $\mathcal{M}, b_2 \models xy \leq 9$. Dus te bewijzen dat $b_2(x)b_2(y) \leq 9$. Uit (18) volgt $b_1(x) \leq 3$. Deze informatie blijkt onbruikbaar. We weten namelijk hiermee niet of $\mathcal{M}, b_1 \models x \leq 1$ danwel $\mathcal{M}, b_1 \not\models x \leq 1$. We gaan dus beide takken na.

Stel allereerst $\mathcal{M}, b_1 \models x \leq 1$. Dan is volgens de if-then-else semantiek (19) gelijkwaardig aan

$$b_2 \in T(b_1, y := x),$$

wat volgens de semantiek van het assignment statement zou betekenen dat $b_2 = b_1(y|b_1(x))$. Hieruit volgt

$$\begin{aligned} b_2(x)b_2(y) &= b_1(y|b_1(x))(x) \times b_1(y|b_1(x))(y) \\ &= b_1(x)b_1(x) \\ &= 3 \times 3 \\ &= 9 \\ &\leq 9, \end{aligned}$$

hetgeen gevraagd werd in de post-conditie.

Stel nu $\mathcal{M}, b_1 \not\models x \leq 1$. Dan is volgens de if-then-else semantiek (19) gelijkwaardig aan

$$b_2 \in T(b_1, y := x - 1),$$

wat volgens de semantiek van het assignment statement zou betekenen dat $b_2 = b_1(y|b_1(x) - 1)$. Hieruit volgt

$$\begin{aligned} b_2(x)b_2(y) &= b_1(y|b_1(x) - 1)(x) \times b_1(y|b_1(x) - 1)(y) \\ &= b_1(x)(b_1(x) - 1) \\ &= 3 \times 2 \\ &= 6 \\ &\leq 9, \end{aligned}$$

hetgeen gevraagd werd.

Blz. 204, it. 1: We moet bewijzen

$$\begin{array}{l} \vdash \{ \varphi \} \pi_1 \{ \psi \} \quad (*) \\ \vdash \{ \psi \} \pi_2 \{ \chi \} \quad (**) \\ \hline \vdash \{ \varphi \} \pi_1; \pi_2 \{ \chi \}. \end{array}$$

Stel hiervoor

$$\mathcal{M}, b_1 \models \varphi \quad (20)$$

en

$$b_3 \in T(b_1, \pi_1; \pi_2). \quad (21)$$

(De indices van de bedelingen b_i , $i = 1, 3$ zijn natuurlijk niet toevallig gekozen.) Te bewijzen dat $\mathcal{M}, b_3 \models \chi$.

Uit (21) volgt dat er een b_2 is, zo dat

$$b_2 \in T(b_1, \pi_1) \quad (22)$$

en

$$b_3 \in T(b_2, \pi_2). \quad (23)$$

Uit (20), (22) en (*) volgt

$$\mathcal{M}, b_2 \models \psi. \quad (24)$$

Uit (24), (23) en (**) volgt dan

$$\mathcal{M}, b_3 \models \chi.$$

Blz. 204, it. 2: We moeten bewijzen:

$$\begin{array}{l} \vdash \{ \varphi \wedge \sigma \} \pi \{ \chi \} \quad (*) \\ \vdash \{ \varphi \wedge \neg \sigma \} \rightarrow \chi \quad (**) \\ \hline \vdash \{ \varphi \} (\text{als } \sigma \text{ dan } \pi) \{ \chi \}. \end{array}$$

Stel hiervoor

$$\mathcal{M}, b_1 \models \varphi \quad (25)$$

en

$$b_2 \in T(b_1, \text{als } \sigma \text{ dan } \pi). \quad (26)$$

Te bewijzen dat $\mathcal{M}, b_2 \models \chi$. Uit (26) volgt dat

$$\begin{cases} b_2 \in T(b_1, \pi) & \text{als } \mathcal{M}, b_1 \models \sigma \\ b_2 = b_1 & \text{anders.} \end{cases} \quad (27)$$

We onderscheiden twee gevallen: $\mathcal{M}, b_1 \models \sigma$ en $\mathcal{M}, b_1 \not\models \sigma$.

1. Stel

$$\mathcal{M}, b_1 \models \sigma. \quad (28)$$

Uit (25) en (28) volgt

$$\mathcal{M}, b_1 \models \varphi \wedge \sigma. \quad (29)$$

Uit (27.1), (29) en (*) volgt $\mathcal{M}, b_2 \models \chi$.

2. Stel

$$\mathcal{M}, b_1 \not\models \sigma. \quad (30)$$

Uit (25) en (30) volgt

$$\mathcal{M}, b_1 \models \varphi \wedge \neg \sigma. \quad (31)$$

Uit (27.2), (31) en (**) volgt nu $\mathcal{M}, b_2 \models \chi$.

Blz. 204, it. 3: We moeten bewijzen:

$$\begin{array}{l} \vdash \{\varphi \wedge \sigma\} \pi_1 \{\psi\} \quad (*) \\ \vdash \{\varphi \wedge \neg \sigma\} \pi_2 \{\psi\} \quad (**) \\ \hline \vdash \{\varphi\} (\text{als } \sigma \text{ dan } \pi_1 \text{ anders } \pi_2) \{\psi\}. \end{array}$$

Stel hiervoor

$$\mathcal{M}, b_1 \models \varphi \quad (32)$$

en

$$b_2 \in T(b_1, \text{als } \sigma \text{ dan } \pi_1 \text{ anders } \pi_2). \quad (33)$$

Te bewijzen dat $\mathcal{M}, b_2 \models \psi$. Uit (33) volgt dat

$$\begin{cases} b_2 \in T(b_1, \pi_1) & \text{als } \mathcal{M}, b_1 \models \sigma \\ b_2 \in T(b_1, \pi_2) & \text{anders.} \end{cases} \quad (34)$$

We onderscheiden twee gevallen: $\mathcal{M}, b_1 \models \sigma$ en $\mathcal{M}, b_1 \not\models \sigma$.

1. Stel

$$\mathcal{M}, b_1 \models \sigma. \quad (35)$$

Uit (32) en (35) volgt

$$\mathcal{M}, b_1 \models \varphi \wedge \sigma. \quad (36)$$

Uit (34.1), (36) en (*) volgt $\mathcal{M}, b_2 \models \psi$.

2. Ingeval $\mathcal{M}, b_1 \not\models \sigma$ verloopt het bewijs volledig analoog aan het bewijs van geval 1.

Blz. 206, it. 1: Trek, door herhaaldelijk toepassen van de assignment-regel, de post-conditie naar boven:

$$\begin{array}{l} \{5 + 7 = 12\} \\ x := 2; \\ \{5 + 7 = 12\} \\ y := 8; \\ \{5 + 7 = 12\} \\ x := 5; \\ \{x + 7 = 12\} \\ y := 7; \\ \{x + y = 12\} \end{array}$$

Daar $(x = 2 \wedge y = 3) \rightarrow 5 + 7 = 12$ volgt de correctheid van het besproken Hoare tripel uit Regel 17.1Axioma's en afleidingsregelsregel.1 en herhaaldelijk toepassen van de concatenatie-regel.

Blz. 206, it. 2: De werkwijze is hetzelfde als in het vorige onderdeel.

$$\begin{array}{l} \{(x + y) - y - y = -1\} \\ x := x + y; \\ \{(x - y) - y = -1\} \\ x := x - y; \\ \{x - y = -1\} \\ y := x - y; \\ \{y = -1\} \end{array}$$

Daar $((x + y) - y) - y = -1$ geïmpliceerd wordt door $x = 2 \wedge y = 3$, volgt het gestelde, ook weer uit Regel 17.1Axioma's en afleidingsregelsregel.1 en herhaaldelijk toepassen van de concatenatie-regel.

Blz. 206, it. 3: Trek, door herhaaldelijk toepassen van de assignment-regel, de post-conditie naar boven:

$$\begin{array}{l} \{((x + y) - y)((x + y) - y) = -2\} \\ x := x + y; \\ \{(x - y)((x - y) - y) = -2\} \\ x := x - y; \\ \{x(x - y) = -2\} \\ y := x - y; \\ \{xy = -2\} \end{array}$$

De bewering $((x + y) - y)((x + y) - y) = -2$ kan vereenvoudigd worden tot $2 + x^2 = xy$. Deze bewering wordt door $x = 2 \wedge y = 3$ geïmpliceerd.

Blz. 206, it. 4: De naar boven gewerkte post-conditie ziet er uit als

$$\{-2 * (x - w) = 2\}.$$

Deze wordt inderdaad geïmpliceerd door $x = 2 \wedge w = 3$.

Blz. 206, it. 5: De omhoog gewerkte post-conditie ziet er uit als

$$\{-2 * (x - w) \leq 3\}$$

Deze bewering wordt geïmpliceerd door $x = 2 \wedge w = 3$, want inderdaad geldt $2 \leq 3$.

Blz. 207, it. 1:

$$(x = 2 \rightarrow y = 3) \wedge (x \neq 2 \rightarrow x = 3)$$

als $x = 2$

dan

$$\{y = 3\}$$

$$x := y$$

$$\{x = 3\}$$

anders

$$\{x = 3\}$$

$$y := x$$

$$\{x = 3\}$$

;

$$\{x = 3\}$$

Blz. 210, it. 1: Bij een while loop gaan we altijd eerst zoek naar een invariant η . Maak een tabelletje. Omdat de waarde van x onbekend is vullen voor x maar wat in. (Niet te hoog, anders neemt de executie te veel stappen in beslag.) Neem $x = 3$.

a	x	y
3	3	0
2	3	1
1	3	2
0	3	3

Als $a = 0$ worden het programma uit de while loop gegoooid. Wat is een goede invariant (zonder op de getallen zelf te letten)? Na enig kijken lijkt $\eta = (a + y = x)$ wel een goede. Dat klopt, want η wordt geïmpliceerd door de conditie vlak voor de while loop, en impliceert samen met de negatie van de test $a = 0$ de postconditie $x = y$:

```

{ $x \geq 0$ }
{ $x + 0 = x$ }
 $a := x$ ;
{ $a + 0 = x$ }
 $y := 0$ ;
{ $a + y = x$ }
zolang  $a <> 0$  doe {
     $y := y + 1$ ;
     $a := a - 1$ ;
}
{ $a + y = x \wedge a = 0$ }
{ $x = y$ }

```

Nu nog het binnenste deel van de while loop correct bewijzen. Volgens de while regel is het daarvoor voldoende om $\eta \wedge \sigma = (a + y = x \wedge a \neq 0)$ als pre-conditie, en $\eta = (a + y = x)$ als postconditie te nemen:

```

{ $x \geq 0$ }
{ $x + 0 = x$ }
 $a := x$ ;
{ $a + 0 = x$ }
 $y := 0$ ;
{ $a + y = x$ }
zolang  $a <> 0$  doe {
    { $a + y = x \wedge a \neq 0$ }      (*)
    { $a - 1 + (y + 1) = x$ }    (**)
     $y := y + 1$ ;
    { $(a - 1) + y = x$ }
     $a := a - 1$ ;
    { $a + y = x$ }
}
{ $a + y = x \wedge a = 0$ }
{ $x = y$ }

```

Daar (**) wordt geïmpliceerd door (*), is de afleiding rond. Het bewijs ziet er dan zo uit:

- | | | |
|-----|-------------------------------------|------------------------|
| 1. | $\{x \geq 0\}$ | pre-conditie |
| 2. | $\{x + 0 = x\}$ | assignment-regel 3,4 |
| 3. | $a := x$; | |
| 4. | $\{a + 0 = x\}$ | assignment-regel 5,6 |
| 5. | $y := 0$; | |
| 6. | $\{a + y = x\}$ | Zolang-regel, 8-13 |
| 7. | zolang $a <> 0$ doe { | |
| 8. | $\{a + y = x \wedge a \neq 0\}$ | invariant en guard |
| 9. | $\{a - 1 + (y + 1) = x\}$ | assignment-regel 10,11 |
| 10. | $y := y + 1$; | |
| 11. | $\{(a - 1) + y = x\}$ | assignment-regel 12,13 |
| 12. | $a := a - 1$; | |
| 13. | $\{a + y = x\}$ | invariant |
| 14. | } | |
| 15. | $\{a + y = x \wedge a = 0\}$ | Zolang-regel, 8-13 |
| 16. | $\{x = y\}$ | post-conditie |

Blz. 210, it. 2: Executietabel binnen while loop voor willekeurige x :

x	y
3	0
3	1
3	2
3	3

Invariant: $\eta = (y \leq x)$.

Blz. 210, it. 3: Executietabel binnen while loop voor willekeurige x en y :

a	x	y	z
0	2	3	0
1	2	3	2
2	2	3	4
3	2	3	6

Invariant: $\eta = (ax = z)$.

Blz. 210, it. 4: Executietabel binnen while loop voor willekeurige x en y :

x	y	y_0	z
2	3	3	0
2	2	3	2
2	1	3	4
2	0	3	6

De variabele y houdt bij hoeveel keer x nog bij z opgeteld moet worden. De expressie $y_0 - y$ geeft dus de factor in opbouw in het onaffe product $x(y_0 - y)$. Een geschikte invariant is dus $\eta = x(y_0 - y)$.

Blz. 210, it. 17.16: Hint: maak een tabelletje waar het verloop van alle variabelen in de while loop kan worden gevolgd. Dit suggereert een invariant.

Blz. 212, it. 17.17: Kijk voor de executietabellen in het antwoord van Opgave 17.15Zolangopgave.15 op blz. 210Zolangopgave.15. Met behulp van deze executietabellen kunnen geschikte varianten worden opgesteld.

- **Copy1** (onderdeel 1ZolangItem.988 op blz. 210ZolangItem.988): variant $t = a$.

Immers,

$$\sigma = (a \neq 0),$$

$$\pi = y := y + 1; a := a - 1,$$

zodat

$$\{\sigma, t \geq 0, t = x\} \quad \pi \quad \{t \geq 0, t < x\}$$

correct is:

$$\{a \neq 0 \wedge a \geq 0 \wedge a = x\}$$

$$\{a - 1 \geq 0 \wedge a - 1 < x\}$$

$$y := y + 1;$$

$$\{a - 1 \geq 0 \wedge a - 1 < x\}$$

$$a := a - 1$$

$$\{a \geq 0 \wedge a < x\}$$

Immers,

$$(a \neq 0 \wedge a \geq 0 \wedge a = x)$$

$$\leftrightarrow (a > 0 \wedge a = x) \rightarrow (a - 1 \geq 0 \wedge a - 1 < x).$$

Nu kan het bewijs worden afgemaakt.

- **Copy2** (onderdeel 2ZolangItem.989 op blz. 210ZolangItem.989): variant $t = x - y$.
- **Multi1** (onderdeel 3ZolangItem.990 op blz. 210ZolangItem.990): variant $t = y - a$.
- **Multi2** (onderdeel 4ZolangItem.991 op blz. 210ZolangItem.991): variant $t = y$.

Andere varianten kunnen ook goed zijn.

Blz. 214, it. 17.19: Laten we kijken wat er gebeurt als q op zichzelf wordt losgelaten, i.e., we gaan kijken wat er gebeurt bij de uitvoering van $q(q)$.

- Volgens q 's implementatie geldt dan dat $q(q)$ stopt als en slechts als $h(q, q) = 0$. (Ga na.)
- Anderzijds geeft $h(q, q)$ per definitie van h de uitkomst 0 terug als q **niet** stopt op input q .

Dat is eigenaardig: we hebben afgeleid dat $q(q)$ stopt als en slechts als $q(q)$ niet stopt. Dat kan logisch gezien niet, en dus kunnen we niet anders dan concluderen dat onze oorspronkelijke aanname niet waar kan zijn. Er kan dus geen controle-programma $h/2$ bestaan dat van een willekeurig programma $j/1$ en een willekeurige input i kan controleren of $j(i)$ stopt.

Blz. 215, it. 17.20: Probleem *i*)Het stop-probleemItem.1011 is beslisbaar. Dat is makkelijk in te zien: laat j een Java-programma zijn waarvan moet worden bepaald of het in 10,000 of minder instructies stopt. Simuleer j en houd tijdens de simulatie het aantal instructies bij. Rapporteer JA als de simulatie in 10,000 of minder instructies stopt. Rapporteer anders NEE en stop.

Probleem *ii*)Het stop-probleemItem.1012 is onbeslisbaar. Dit laten we zien door het Java/0-stop

probleem (Voorbeeld 17.18Het stop-probleemvoorbeeld.18, blz. 214Het stop-probleemvoorbeeld.18) te reduceren naar dit probleem.

Laat j een willekeurig Java/0-programma zijn waarvan moet worden bepaald of het stopt. Laat Java-programma j' ontstaan uit j door er een laatste instructie aan toe te voegen die 10,001 of meer karakters afdrukt. (Bijvoorbeeld 10,001 spaties. Om er voor te zorgen dat j' niet eerst vanwege j al vroegtijdig karakters gaat afdrukken, laten we j' alle print-statements van j “inslikken,” bijvoorbeeld door ze naar een ander bestand te leiden.) Eenvoudig is na te gaan dat j stopt als en slechts als j' 10,000 of meer karakters afdrukt. Als probleem *ii*)Het stop-probleemItem.1012) beslisbaar zou zijn, zouden we via j' nu ook kunnen beslissen of j stopt. Dat is in tegenspraak met de onbeslisbaarheid van het stop-probleem, dus probleem *ii*)Het stop-probleemItem.1012 is onbeslisbaar.

Blz. 215, it. 1: We reduceren het Java/0-stop probleem (Voorbeeld 17.18Het stop-probleemvoorbeeld.18, blz. stop-probleem-0) naar dit probleem. Laat j een willekeurig Java/0-programma zijn waarvan moet worden bepaald of het stopt. Om interferentie te voorkomen make we j a -vrij. We voeren een globale substitutie uit op j , zó dat evt. voorkomens van $a \in A$ vervangen worden door een volledig nieuwe teken $\alpha \notin A$. We krijgen een a -vrij programma j' . Bekijk nu programma g :

g : voer j' uit en druk a af als j' stopt.

Eenvoudig is na te gaan dat g het symbool a afdrukt als en slechts als j' stopt. Omdat we hebben aangenomen dat het print-probleem beslisbaar is, kunnen we beslissen of g ooit a afdrukt, en dus of j' stopt. Dat laatste is in tegenspraak met de onbeslisbaarheid van het inputloze stop-probleem.

Blz. 215, it. 2: We reduceren het Java/0-stop probleem naar dit probleem. Laat $j/0$ een willekeurig Java/0-programma zijn waarvan moet worden bepaald of het stopt. We laten het test-programma het programma $j/0$ omzetten naar een programma $j'/1$ dat *niets* met de input doet. Eenvoudig is na te gaan dat $j/0$ stopt als en slechts als $j'/1$ op alle inputs stopt. (Immers inhoud van de input wordt toch niet gebruikt.)

Blz. 215, it. 3: We reduceren het Java/0-stop probleem naar dit probleem. Laat $j/0$ een willekeurig Java/0-programma zijn waarvan moet worden bepaald of het stopt. Laat $s \in J$ een triviaal (en liefst zo kort mogelijk) programma zijn dat niets afdrukt en altijd stopt. Het test-programma g verandert j in j' door j' alle print-statements van j te laten “inslikken,” bijvoorbeeld door ze naar een ander bestand (of /dev/null/) te leiden. Vervolgens gebruikt g het algoritme dat test of twee programma's zich hetzelfde gedragen om te testen of j en s zich hetzelfde gedragen. Eenvoudig is na te gaan dat g concludeert tot programma-equivalentie als en slechts als j' stopt als en slechts als j stopt. Dat zou betekenen dat g kan worden gebruikt om het stop-probleem op te lossen.

Blz. 215, it. 2: Een onbegrensde externe toestand (denk aan pagefile) p zorgt er voor dat de toestandruimte oneindig groot wordt. Nu gaat het cykel-argument niet meer op.

Blz. 219, it. 18.1: Noem de machinetoestand voordat π wordt uitgevoerd b . Wanneer φ niet waar is in b zou elke mogelijke toestand t bereikbaar zijn volgens de alternatieve definitie van T_π . Dit zou betekenen dat de modellen die meer dan 2 toestanden bevatten *indeterministisch* zouden worden. Erger, allerlei ongewenste toestanden zouden toegankelijk worden, bijvoorbeeld kunnen waarden van variabelen die niet in φ of α voorkomen veranderd zijn.

Blz. 219, it. 18.2: als-dan-anders Laat $\pi = (\text{als } \varphi \text{ dan } \alpha \text{ anders } \beta)$, en stel T_α en T_β zijn deterministisch. Kies een willekeurige toestand b . Als $b \models \varphi$ dan is er hoogstens één e zodat $bT_\pi e$ wanneer $\langle b, e \rangle \in T_\alpha$. Als $b \not\models \varphi$ dan evenzo hoogstens één e zodat $bT_\pi e$ namelijk wanneer $\langle b, e \rangle \in T_\beta$.

zolang Laat $\pi = \text{zolang } \varphi \text{ doe } \alpha$, en stel T_α is deterministisch. Kies weer een b . We onderscheiden de volgende mogelijkheden:

1. $b \not\models \varphi$. Dan is er een unieke toestand bereikbaar volgens T_π , want dan $b = e$.
2. $b \models \varphi$. Stel dat er een volgens T_π bereikbare e bestaat. Dan is die e ook uniek. Want er moet een reeks (ook unieke) tussentoestanden $b_1, \dots, b_n$ zijn geweest die φ waar maakten en die opvolgend binnen T_α bereikbaar waren, en waarna er een overgang is naar e waarop φ onwaar is. De lengte van die reeks ligt dan ook vast: voor iedere kortere reeks zou in de eindtoestand φ waar zijn, en dat is uitgesloten; langer kan ook niet want dan zou φ onwaar worden in de (dan) tussentoestand e .

Blz. 220, it. 18.3: We geven een informeel bewijs. De vierde bewering is waar op de verzameling gehele getallen als voor elke begintoestand b :

$$\forall x \forall y [\text{zolang niet } x = y \text{ doe } x := x + 1](x = y)$$

waar is, dus wanneer voor elke b geldt dat

$$[\text{zolang niet } x = y \text{ doe } x := x + 1](x = y)$$

en dat wil weer zeggen dat in een toestand e die uit b bereikbaar is volgens T_π (waarbij $\pi = \text{zolang niet } x = y \text{ doe } x := x + 1$) de formule $x = y$ moet gelden. Om dit na te gaan onderscheiden we drie mogelijkheden:

1. $b(x) < b(y)$. De **zolang**-opdracht verhoogt nu de waarde van x steeds met 1, totdat x en y even groot zijn, te weten $b(y)$. In die toestand geldt uiteraard $x = y$.
2. $b(x) = b(y)$. Omdat de conditie van de **zolang**-opdracht nu niet geldt, zal nu $e = b$ het geval zijn; dus geldt in e dan $x = y$.

3. $b(x) > b(y)$. We redeneren nu analoog aan de derde bewering in het tekstvoorbeeld: door het ophogen van x zal de conditie nu altijd blijven gelden, en het programma blijft in de zolang-lus. Dynamisch volgt dit uit feit dat er dan geen bereikbare eindtoestand bestaat.

Blz. 220, it. 18.4: Als substitutie wel zou zijn toegestaan, dan resulteert dit in:

$$[x/y][x := y + 1](x \neq y) = [x := x + 1](x \neq x).$$

De laatste formule is onvervulbaar want als er een vervullende bedeling b zou bestaan, dan zou $b(x) + 1 \neq b(x) + 1$, hetgeen onmogelijk is. De premisse $\forall y[x := y + 1](x \neq y)$ is echter waar op de structuur $\mathbb{N}$.

Blz. 221, it. 18.5: Bewijs: Opeenvolging is semantisch geldig omdat de deelformules voor en na $\leftrightarrow$ in dezelfde toestanden waar zijn. We gaan dit na.

Stel $[\text{begin } \pi_1; \dots; \pi_n \text{ einde}]\varphi$ is onwaar in b . Dat is precies zo als er een e bestaat zodat $\langle b, e \rangle \in T_{\text{begin } \pi_1; \dots; \pi_n \text{ einde}}$ en φ onwaar is in e . Dit betekent dat er $e_0, e_1, \dots, e_n$ bestaan waarvoor $e_0 = b$, $e_n = e$ en $\langle e_{i-1}, e_i \rangle \in T_{\pi_i}$ voor elke $i = 1, 2, \dots, n$ en φ onwaar is. Dit is equivalent (inductief te bewijzen) met het bestaan van $e_0 (= b), \dots, e_n$ zodat $[\pi_{k+1}] \dots [\pi_n]\varphi$ onwaar is voor elke $k = 0, \dots, n$; kortom als $[\pi_1] \dots [\pi_n]\varphi$ onwaar is in b . $\square$

Blz. 221, it. 18.6: Herformuleren houdt hier natuurlijk in: bewijzen dat beide formules equivalent zijn met gebruik van de overige principes. Vanwege *opeenvolging* geldt

$$[\alpha][\text{zolang } \psi \text{ doe } \alpha]\varphi \iff [\text{begin } \alpha; \text{zolang } \psi \text{ doe } \alpha \text{ einde}]\varphi$$

en daardoor is de rechterkant van het *iteratie-axioma* equivalent met

$$(\psi \rightarrow [\text{begin } \alpha; \text{zolang } \psi \text{ doe } \alpha \text{ einde}]\varphi) \wedge (\neg\psi \rightarrow \varphi)$$

en met het *als-dan-axioma* reduceert dit tot

$$[(\text{als } \psi \text{ dan begin } \alpha; \text{zolang } \psi \text{ doe } \alpha \text{ einde})]\varphi$$

$\square$

Blz. 221, it. 18.7: In $[v := t]\varphi$ zal een vrij in φ voorkomende v gebonden worden, terwijl die in $[t/v]\varphi$ vervangen zal worden. Het effect is in feite hetzelfde en daarom is er geen sprake van een tegenstrijdigheid. Vergelijk de situatie bij $\exists x x = a$ en $a = a$. Overigens kan $[t/v]\varphi$ best nog v als vrije variabele bevatten, bij voorbeeld als $t = v$; in dat geval is t echter ook vrij in $[v := t]\varphi$. Tenslotte wijzen we erop dat open en gesloten formules best logisch equivalent kunnen zijn: denk aan $\forall x x = x$ en $x = x$.

Blz. 222, it. 18.8:

1	$\varphi \rightarrow [\pi_1]\psi$	[gegeven stelling]
2	$\psi \rightarrow [\pi_2]\chi$	[gegeven stelling]
3	$[\pi_1]\psi \rightarrow [\pi_1][\pi_2]\chi$	[uit 2 met stelling 18.1D]
4	$[\pi_1][\pi_2]\chi \leftrightarrow [\text{begin } \pi_1; \pi_2 \text{ einde}]\chi$	[opeenvolging]
5	$[\pi_1]\psi \rightarrow [\text{begin } \pi_1; \pi_2 \text{ einde}]\chi$	[uit 3 en 4 met pL]
6	$\varphi \rightarrow [\text{begin } \pi_1; \pi_2 \text{ einde}]\chi$	[uit 1 en 5 met pL]



