Inleiding Analyse

Dictaat

E.P. van den Ban

Voorwoord

Dit dictaat wordt gebruikt bij het eerstejaars college Inleiding Analyse. Het is als op zichzelf staande tekst te bestuderen. Het dictaat behandelt de stof die aan het eind van de cursus beheerst moet worden.

Van de student wordt verwacht dat hij/zij bij het college Infinitesimaalrekening reeds kennis gemaakt heeft met een aantal belangrijke technieken, waarbij de nadruk gelegd is op het hanteren daarvan en minder op de theoretische fundering.

In de huidige opzet van de Analyse wordt niet gestreefd naar het grondig funderen van alles wat bij de Infinitesimaalrekening aan de orde is geweest. Gekozen is voor een representatieve aanvullende benadering, met nadruk op een grondige behandeling van een aantal fundamentele principes uit de Analyse. Tesamen vormen die een goede basis voor verdere studie.

De constructie van het systeem der reële getallen wordt niet uitputtend in de hoofdtekst behandeld. Wel is er een appendix aan dit onderwerp gewijd. De volledige axiomatiek van de reële getallen komt evenmin aan de orde. De nadruk wordt gelegd op de eigenschap van volledigheid, die axiomatisch vastgelegd wordt. Bovendien komt een aantal belangrijke gevolgen hiervan voor de Analyse aan de orde, zoals het bestaan van limieten, van extrema en van oplossingen van vergelijkingen. Van de elementaire functies worden slechts de exponentiële en de logarithmische functie rigoreus ingevoerd. De lezer krijgt zo een representatief idee van de mogelijkheid de Analyse vanuit fundamentele principes op te bouwen.

In de voorbeelden en opgaven wordt vrijelijk gebruik gemaakt van begrippen en objecten die bij de Infinitesimaalrekening ingevoerd zijn. In logische zin is de in dit dictaat opgebouwde theorie echter onafhankelijk van hetgeen bij Infinitesimaalrekening ontwikkeld is.

Notatie

In dit dictaat gebruiken we de volgende notaties die afwijken van de notaties bij het college 'Wat is Wiskunde.'

(a) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$; wij beschouwen dus ook 0 als natuurlijk getal en schrijven $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

(b) Als A, B verzamelingen zijn, dan betekent $A \subset B$ dat ieder element van A ook tot B behoort. Bij 'Wat is Wiskunde' was de notatie $A \subseteq B$ gebruikelijk. Verder gebruiken wij de notatie $A \subsetneq B$ voor de uitspraak $A \subset B$ en $A \neq B$. Bij 'Wat is Wiskunde' was hiervoor de notatie $A \subset B$ gebruikelijk.

(c) Intervallen worden als volgt genoteerd, voor $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$:

$$[a, b\,] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \quad]\,a, b\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Verder gebruiken we bijvoorbeeld de notatie: $[a, \infty\,[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$.

Tenslotte gebruiken we nog de notatie $a := b$ voor de uitspraak ‘a is per definitie gelijk aan b.’

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Limieten en continuïteit

1.1 De afstand in $\mathbf{R}^n$

In deze paragraaf behandelen we het afstandsbegrip op de Euclidische ruimte. Dit afstandsbegrip zal later een belangrijke rol spelen bij de behandeling van het limietbegrip.

De verzameling reële getallen noteren we met $\mathbb{R}$. Het n-voudige Cartesisch product van $\mathbb{R}$ noteren we met $\mathbb{R}^n$. De elementen van $\mathbb{R}^n$ zijn geordende rijtjes $(x_1, \ldots, x_n)$ van n reële getallen, *vectoren* (of punten) genaamd. In het algemeen gebruiken we de kortere notatie x voor een rijtje $(x_1, \ldots, x_n)$. De reële getallen x_i, met $1 \leq i \leq n$, heten de componenten of *coördinaten* van x. In $\mathbb{R}^n$ is een *optelling* gedefinieerd: als $x = (x_1, \ldots, x_n)$ en $y = (y_1, \ldots, y_n)$, dan is

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

Verder is een *vermenigvuldiging met reële scalairen* gedefinieerd: als $x = (x_1, \ldots, x_n)$ en $\lambda \in \mathbb{R}$, dan is

$$\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Hierbij wordt voldaan aan de bekende axioma's voor een lineaire ruimte met het grondlichaam $\mathbb{R}$, die behandeld worden in het college Lineaire Algebra.

Voor de introductie van een limietbegrip op $\mathbb{R}^n$ zullen we een *afstandsbegrip* op $\mathbb{R}^n$ nodig hebben. Zo'n afstandsbegrip kan gedefinieerd worden met behulp van het *standaardinproduct*. Het standaardinproduct op $\mathbb{R}^n$ is per definitie de afbeelding $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die aan een tweetal vectoren $x = (x_1, \ldots, x_n)$ en $y = (y_1, \ldots, y_n)$ het getal

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

toevoegt. Men gaat gemakkelijk na dat deze afbeelding inderdaad voldoet aan de (in de lineaire algebra geïntroduceerde) eigenschappen die een inproduct karakteriseren. Hieronder zetten we deze eigenschappen nog eens op een rij. Voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ geldt:

(a) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,

(b) $\langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,

(c) $\langle x, x\rangle \geq 0$,

(d) $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$.

Voor $1 \leq i, j \leq n$ definiëren we het *Kronecker symbool* δ_{ij} als volgt

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{als} \quad i = j; \\ 0 & \text{als} \quad i \neq j. \end{cases}$$

De vectoren $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ vormen de *standaardbasis* van $\mathbb{R}^n$. Met behulp van de hierboven ingevoerde Kronecker symbolen noteren we deze basis gemakkelijker als volgt

$$e_i := (\delta_{i1}, \dots, \delta_{in}), \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Ten opzichte van het standaardinproduct op $\mathbb{R}^n$ is dit een *orthonormale* basis, d.w.z. $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ voor alle $1 \leq i, j \leq n$. Merk op dat $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, voor elke $x \in \mathbb{R}^n$.

Als $x \in \mathbb{R}^n$, dan definiëren we de *Euclidische lengte* of *norm* van x door

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}. \tag{1.1}$$

Merk op dat deze definitie geoorloofd is wegens eigenschap (c) van het inproduct.

Opmerking 1.1 De lezer kan hier terecht het bezwaar aanvoeren dat de *wortelfunctie* $\sqrt{\cdot} : [0, \infty[\to [0, \infty[$ niet rigoreus gedefinieerd is. In het vervolg zullen we voorlopig veronderstellen dat deze functie gedefinieerd is als de unieke functie $w : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ die voldoet aan $w(x) \geq 0$ en $w(x)^2 = x$ voor alle $x \geq 0$. Van deze functie veronderstellen we bekend dat hij strikt monotoon stijgend is, d.w.z. $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow 0 < w(x_1) < w(x_2)$, voor alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Uit de ontwikkelde theorie van limieten en continuïteit voor functies op $\mathbb{R}$ zal blijken dat deze definitie correct is en dat de zo gedefinieerde functie w continu is, zie Voorbeeld 3.49 en Stelling 5.6.

Het lijkt erop dat we zo een cirkelredenering volgen: via de bovenstaande definitie van de Euclidische norm gebruiken we de wortelfunctie in de verdere ontwikkeling van de theorie. Die theorie gebruiken we vervolgens voor de definitie van de wortelfunctie. Toch is er geen sprake van een cirkelredenering. De wortel is alleen nodig in (1.1) voor $n \geq 2$. Voor $n = 1$ kan de bovenstaande definitie geïnterpreteerd worden als $\|x\| := |x|$ voor $x \in \mathbb{R}$. Alleen de voor $\mathbb{R}$ ontwikkelde theorie zal nodig blijken te zijn voor een correcte definitie van de wortelfunctie.

Het volgende resultaat zal een belangrijke rol spelen bij de ontwikkeling van het afstandsbegrip.

Lemma 1.2 (Ongelijkheid van Cauchy-Schwarz) *Voor ieder tweetal $x, y \in \mathbb{R}^n$ geldt:*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|. \tag{1.2}$$

De bovenstaande ongelijkheid is een gelijkheid dan en slechts dan als x en y lineair afhankelijk zijn (dus $x \in \mathbb{R}y$ of $y \in \mathbb{R}x$).

Bewijs: Laat $x, y \in \mathbb{R}^n$ gegeven zijn. Als $x = 0$ of $y = 0$ dan valt er niets te bewijzen, dus we mogen veronderstellen dat $x \neq 0$ en $y \neq 0$. Beschouw de functie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $\varphi(t) = \langle x + ty, x + ty \rangle$. Uit de positiviteit van het inproduct (eigenschap (c)) volgt dat $\varphi(t) \geq 0$ voor alle $t \in \mathbb{R}$. Anderzijds levert uitwerken dat φ een kwadratische functie is: $\varphi(t) = at^2 + bt + c$, met $a = \|y\|^2,\ b = 2\langle x, y \rangle,\ c = \|x\|^2$. Uit $\varphi \geq 0$ volgt voor de bij φ behorende discriminant dat $b^2 - 4ac \leq 0$, zie Appendix 1.7. Hieruit volgt dat

$$\langle x, y \rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 = \frac{1}{4}(b^2 - 4ac) \leq 0. \tag{1.3}$$

Dit levert de gewenste schatting (1.2).

Wegens (1.3) is de schatting (1.2) een identiteit precies dan als de bovenstaande discriminant gelijk aan 0 is. In dat geval heeft de kwadratische functie φ precies één nulpunt t_0, zie wederom Appendix 1.7. Daarvoor geldt: $\varphi(t_0) = 0$, dus $\|x + t_0 y\| = 0$, waaruit weer volgt dat $x = -t_0 y$, dus x en y zijn lineair afhankelijk. □

De Euclidische norm heeft de volgende eigenschappen:

Lemma 1.3 *Voor alle* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *en* $\lambda \in \mathbb{R}$ *geldt:*

(a) $\|x\| \geq 0$ *en* $\|x\| = 0 \iff x = 0$;

(b) $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$;

(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (driehoeksongelijkheid).

Bewijs: De eerste twee bewijst men zonder moeite uit de eigenschappen van het inproduct. Voor het bewijs van de derde eigenschap (de driehoeksongelijkheid) gebruikt men de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\
&= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.
\end{aligned}$$

□

Opmerking 1.4 (a) Teken twee vectoren x en y in $\mathbb{R}^2$. Dan is $x + y$ de vectoriële som van x en y. De punten 0, x en $x + y$ bepalen een driehoek waarvan de zijden lengten $\|x\|$, $\|y\|$ en $\|x + y\|$ hebben. Verklaar nu zelf de naam driehoeksongelijkheid.

(b) De Euclidische norm is een speciaal geval van een algemener begrip van *norm*. Is E een (wellicht oneindig dimensionale) reële lineaire ruimte dan verstaat men onder een norm op E een afbeelding $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ met de eigenschappen (a) t/m (c) uit het bovenstaande lemma (voor alle $x, y \in E,\ \lambda \in \mathbb{R}$).

Het volgende resultaat zal verderop gebruikt worden in tal van argumenten die schattingen betreffen.

Gevolg 1.5

(a) ('Herhaalde driehoeksongelijkheid') *Voor alle* $m \geq 2,\ x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ *geldt:*

$$\|x_1 + \cdots + x_m\| \leq \|x_1\| + \cdots + \|x_m\|.$$

(b) ('Omgekeerde driehoeksongelijkheid') *Voor alle* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *geldt:*

$$\|x - y\| \geq |\, \|x\| - \|y\| \,|\,.$$

Bewijs: De eerste ongelijkheid volgt door herhaald toepassen van de driehoeksongelijkheid. Voor de tweede ongelijkheid merken we op dat

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|,$$

waaruit volgt dat

$$\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|. \tag{1.4}$$

Op soortgelijke wijze ziet men in dat

$$\|x - y\| \geq \|y\| - \|x\| = -(\|x\| - \|y\|). \tag{1.5}$$

De omgekeerde driehoeksongelijkheid volgt door combinatie van de twee gevonden ongelijkheden (1.4) en (1.5). □

Opmerking 1.6 Merk op dat in deze redenering alleen algemene eigenschappen van de norm gebruikt worden; de ongelijkheden (a) en (b) gelden derhalve voor iedere norm.

Tenslotte zullen we de volgende ongelijkheden vaak gebruiken als we de norm van een vector met zijn componenten vergelijken.

Lemma 1.7 (Relaties tussen norm en coördinaten) *Voor elke* $x \in \mathbb{R}^n$ *geldt:*

(a) $|x_i| \leq \|x\|$ *voor alle* $1 \leq i \leq n$.

(b) $\|x\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$.

Bewijs: De eerste ongelijkheid volgt uit

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \geq |x_i|^2.$$

De tweede ongelijkheid volgt uit de herhaalde driehoeksongelijkheid. Immers

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n\| \\ &\leq \|x_1 e_1\| + \cdots + \|x_n e_n\| = |x_1|\|e_1\| + \cdots + |x_n|\|e_n\| \\ &= |x_1| + \cdots + |x_n|. \end{aligned}$$

□

Met behulp van de door (1.1) gedefinieerde norm kunnen we als volgt een afstandsbegrip op $\mathbb{R}^n$ definiëren.

Definitie 1.8 Als $x, y \in \mathbb{R}^n$ dan definiëren we de (Euclidische) *afstand* van x tot y door

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

Opmerking 1.9 Merk op dat de norm $\|x\|$ van een vector $x \in \mathbb{R}^n$ gelijk is aan zijn afstand $d(0, x)$ tot de oorsprong.

Lemma 1.10 *De Euclidische afstand d op $\mathbb{R}^n$ voldoet aan de volgende eigenschappen, voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.*

(a) $d(x, y) \geq 0, \quad en \quad d(x, y) = 0 \iff x = y;$

(b) $d(x, y) = d(y, x)$ (symmetrie);

(c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (driehoeksongelijkheid).

Bewijs: Uit Lemma 1.3 (a) volgt direct dat $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$. Ook volgt eruit dat

$$d(x, y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y.$$

Uit Lemma 1.3 (b) volgt dat

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \|x - y\| \\ &= \|-(x - y)\| = \|y - x\| = d(y, x). \end{aligned}$$

Tenslotte volgt uit Lemma 1.3 (c) dat

$$\begin{aligned} d(x, z) = \|x - z\| &= \|(x - y) + (y - z)\| \\ &\leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

□

Verklaar zelf de naam 'driehoeksongelijkheid' voor de schatting in bewering (c) van het bovenstaande lemma.

1.2 Limieten van functies

Laat A en B verzamelingen zijn. Met een afbeelding $f : A \supset\!\!\to B$ zullen we bedoelen een afbeelding $f : D \to B$, met D een deelverzameling van A. De verzameling D heet het domein van f en wordt genoteerd met $\mathrm{Dom}(f)$. De notatie $f : A \supset\!\!\to B$ kan opgevat worden als samentrekking van de notatie

$$f : A \supset \mathrm{Dom}(f) \to B,$$

en bewijst nuttige diensten in situaties waarbij we niet telkens het domein van f willen specificeren. Is B een lineaire ruimte, dan noemen we een afbeelding $f : A \supset\!\!\to B$ ook wel een B-waardige functie, gedefinieerd op een deel van A.

Opmerking 1.11

(a) Het is gemakkelijk om te kunnen spreken van de functie $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$, zonder expliciet het domein te noemen. Wij zullen de conventie hanteren dat voor een zo gegeven functie het domein de grootste deelverzameling van $\mathbb{R}$ is waarop de formule zinvol is. Dus, in dit geval, $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Het is gemakkelijk om te kunnen spreken van de functie $r : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$, gegeven door

$$r(x) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 - x_2^2}.$$

Met de hierboven genoemde conventie blijkt uit de gegeven formule dat het domein $\mathrm{Dom}(r)$ van r bestaat uit de punten $x \in \mathbb{R}^2$ met $x_1 \neq \pm x_2$.

(c) Er zijn situaties waarin het van belang kan zijn een ander domein te kiezen dan het voor de hand liggende. Als zo'n situatie zich voor doet dan zullen we dit expliciet aangeven.

We geven nu een precieze definitie van het begrip limiet voor een functie $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$.

Definitie 1.12 (Limiet van een functie) Laat $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ een functie zijn, en $a \in \mathbb{R}^n$ en $b \in \mathbb{R}^m$ punten. Men zegt dat f in a de limiet b heeft, notatie

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

als voor ieder positief reëel getal $\varepsilon > 0$ een positief reëel getal $\delta > 0$ bestaat met de volgende eigenschap:

$$\text{als} \quad x \in \mathrm{Dom}(f) \quad \text{en} \quad d(x, a) < \delta \quad \text{dan} \quad d(f(x), b) < \varepsilon. \tag{1.6}$$

Men zegt ook wel dat $f(x)$ convergeert naar b als x naar a gaat, in formule: $f(x) \to b$ als $x \to a$.

Opmerking 1.13 Men is wellicht gewend om op de volgende manier over limieten na te denken: als x willekeurig dicht bij a komt, dan komt $f(x)$ willekeurig dicht bij b te liggen. Het nadeel van deze uitspraak is dat het niet duidelijk is wat het betekent dat een getal dicht bij een ander getal komt te liggen.

De bovenstaande definitie kan goed als volgt gelezen worden. De constante $\varepsilon > 0$ kan gezien worden als voorgeschreven foutenmarge waarmee $f(x)$ een benadering voor b moet zijn. Bij iedere willekeurige gegeven $\varepsilon > 0$ moet een $\delta > 0$ te vinden zijn die de begrenzing van een afwijking beschrijft. Ligt x dicht bij a, met een afwijking kleiner dan δ, dan benadert $f(x)$ het punt b, met foutenmarge $\varepsilon > 0$.

Tenslotte merken we op dat de uitspraak (1.6) ook in de volgende veel voorkomende vorm geschreven kan worden

$$\text{als} \quad x \in \mathrm{Dom}(f) \quad \text{en} \quad \|x - a\| < \delta \quad \text{dan} \quad \|f(x) - b\| < \varepsilon.$$

Voorbeeld 1.14 In dit voorbeelden illustreren we hoe de definitie van limiet gebruikt kan worden om concrete uitspraken over limieten te bewijzen.

We zullen *bewijzen* dat

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}.$$

Deze uitspraak valt in het bovenstaande kader, met $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+x}$, dus $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, en met $a = 1$ en $b = \frac{1}{2}$.

Bewijs: Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. (Commentaar: Het is prettig om deze $\varepsilon > 0$ vast te leggen. Omdat we geen enkele beperking aan ε opleggen, zal de nu volgende redenering gelden voor iedere $\varepsilon > 0$.) We stellen ons nu ten doel bij deze ε een $\delta > 0$ te vinden zo dat

$$x \in \mathrm{Dom}(f),\ |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x) - \frac{1}{2}| < \varepsilon.$$

Eerst laten we de precieze waarde van $\delta > 0$ in het midden. Gaandeweg zullen we de geschikte eisen op het spoor komen. We merken op dat voor alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ met $|x-1| < \delta$ geldt

$$|f(x) - \frac{1}{2}| = |\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}| = |\frac{1-x}{2(1+x)}| = \frac{|1-x|}{2|1+x|} < \frac{\delta}{2|1+x|}. \tag{1.7}$$

De noemer gaat naar nul als x de waarde -1 nadert; dit kunnen we vermijden door een eis aan δ op te leggen. Zorgen we ervoor dat $\delta < 1$ (eerste eis op δ), dan zien we dat uit $|x-1| < \delta$ volgt $x \in]1-\delta, 1+\delta[$, dus $x > 1-\delta > 0$. Hieruit volgt weer dat $x+1 > 1$, dus $0 < |x+1|^{-1} < 1$. Gebruiken we dit in (1.7) dan zien we dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ met $|x-1| < \delta$ geldt:

$$|f(x) - \frac{1}{2}| < \frac{\delta}{2}.$$

Na deze vereenvoudiging zien we wat de tweede (en laatste) conditie op δ moet zijn, namelijk $\delta < 2\varepsilon$. Want dan volgt uit $|x-1| < \delta$ dat $|f(x) - \frac{1}{2}| < \varepsilon$. □

Het bovenstaande bewijs is nogal lang geworden omdat we ook de procedure gegeven hebben waarmee we bij $\varepsilon > 0$ een geschikte $\delta > 0$ vinden. Voor een correct bewijs is dit niet vereist. We kunnen bij willekeurige $\varepsilon > 0$ ook meteen $\delta > 0$ geven en vervolgens aantonen dat aan de definitie van limiet voldaan is. Het bewijs dat zo ontstaat hebben we hieronder in zijn geheel opgeschreven.

Bewijs: Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Neem $\delta > 0$ zo dat $\delta < \min(1, 2\varepsilon)$. Laat verder $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ voldoen aan $|x-1| < \delta$. Dan geldt $x \in]1-\delta, 1+\delta[$, dus $x > 0$, dus $|1+x| > 1$. Er volgt dat

$$|f(x) - \frac{1}{2}| = |\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}| = |\frac{1-x}{2(1+x)}| = \frac{|1-x|}{2|1+x|} < \frac{\delta}{2|1+x|} < \frac{\delta}{2\cdot 1} < \varepsilon.$$

Hiermee is aangetoond dat voor elke $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ met $|x-1| < \delta$ geldt: $|f(x) - \frac{1}{2}| < \varepsilon$. Dus

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}.$$

□

Het laatste bewijs wordt gekenmerkt door de logische opbouw, waarbij steeds in kleine stappen conclusies uit de voorafgaande tekst getrokken worden. Dit maakt het gemakkelijker de correctheid van het bewijs te verifiëren. Later zal blijken dat dit vooral extra helderheid geeft in gecompliceerdere situaties. In de huidige wiskundige literatuur (boeken en wetenschappelijke artikelen) - en ook in dit dictaat - wordt daarom bijna uitsluitend voor de tweede manier van het presenteren van een bewijs gekozen. De kunst daarbij is de gevolgde redenering zo helder mogelijk over het voetlicht te brengen. Wij raden de lezer aan zich deze stijl eigen te maken door veel te oefenen.

Nadeel van de genoemde stijl is dat aan de lezer overgelaten wordt te achterhalen hoe men de redenering gevonden heeft. We raden de lezer aan dit wel steeds te proberen, met voldoende kladpapier bij de hand. Alleen door op een dergelijke actieve manier met de stof om te gaan kan men wiskunde leren.

Voorbeeld 1.15 We geven ook een voorbeeld van een situatie waarbij niet aan de definitie van limiet voldaan is. Definieer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{als} \quad x \neq 0; \\ 0 & \text{als} \quad x = 0. \end{cases}$$

Bewering: Het is *niet* zo dat $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

Bewijs: Zij $\varepsilon = 1$ en zij $\delta > 0$ willekeurig. Neem $x = 0$. Dan geldt $x \in \mathrm{Dom}(f)$ en $|x-0| < \delta$, maar $|f(x) - 1| = |0 - 1| = 1 \geq \varepsilon$. $\square$

Het volgende resultaat is bijna vanzelfsprekend, maar komt toch zo vaak voor, dat we het apart noemen.

Lemma 1.16 *Zij* $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$ *en* $b \in \mathbb{R}^m$. *Dan zijn de volgende beweringen gelijkwaardig.*

(a) $\lim_{x\to a} f(x) = b$;

(b) $\lim_{x\to a} d(f(x), b) = 0$.

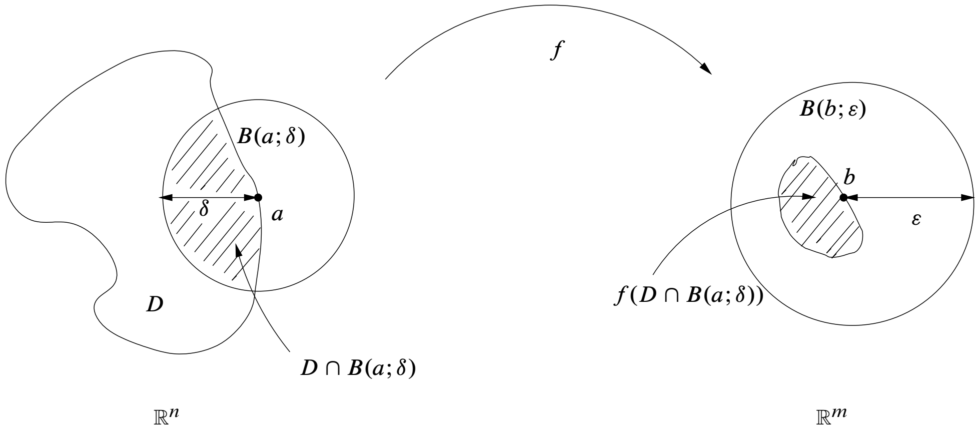
Bewijs: '(a) $\Rightarrow$ (b)': Stel dat (a) geldt. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Dan bestaat er een $\delta > 0$ zo dat voor alle $x \in \mathrm{Dom}(f)$ met $d(x, a) < \delta$ geldt $d(f(x), b) < \varepsilon$. Voor zulke x geldt dan ook $|d(f(x), b) - 0| = d(f(x), b) < \varepsilon$. Dus (b) geldt.

'(b) $\Rightarrow$ (a)': Stel dat (b) geldt. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Dan bestaat er een $\delta > 0$ zo dat voor alle $x \in \mathrm{Dom}(f)$ met $d(x, a) < \delta$ geldt $|d(f(x), b) - 0| < \varepsilon$. Voor zulke x geldt dus ook $d(f(x), b) = |d(f(x), b)| < \varepsilon$. Dus (a) geldt. $\square$

Men kan de definitie van limiet meetkundig visualiseren door gebruik te maken van bollen.

Definitie 1.17 Is $a \in \mathbb{R}^n$ en $r > 0$ dan definiëren we de (open) *bol* met middelpunt a en straal r door

$$B(a; r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, a) < r\}.$$



Figuur 1: Visualisatie van $f(D \cap B(a;\delta)) \subset B(b;\varepsilon)$

Opmerking 1.18 Als $n = 1$, dan is $B(a;r)$ gelijk aan $]\,a-r, a+r\,[$, het open interval bestaande uit de punten $x \in \mathbb{R}$ met $a - r < x < a + r$.

Met behulp van de bolnotatie kan de uitspraak (1.6) herschreven worden als de volgende gelijkwaardige bewering, waarbij we de notatie $D = \mathrm{Dom}(f)$ gebruiken,

$$f(D \cap B(a;\delta)) \subset B(b;\varepsilon). \tag{1.8}$$

Zie Figuur 1 voor een visualisatie van deze uitspraak.

Volledigheidshalve tonen we de gelijkwaardigheid van de uitspraken (1.6) en (1.8) aan. Veronderstel eerst dat (1.6) geldt en laat $x \in D \cap B(a;\delta)$ willekeurig zijn. Dan geldt $x \in D$ en $d(x,a) < \delta$. Er volgt dat $d(f(x),b) < \varepsilon$ ofwel $f(x) \in B(b;\varepsilon)$. Hiermee is aangetoond dat $x \in D \cap B(a;\delta) \Rightarrow f(x) \in B(b;\varepsilon)$, dus (1.8). We hebben aangetoond dat (1.6) $\Rightarrow$ (1.8).

Om de omgekeerde implicatie aan te tonen veronderstellen we dat (1.8) geldt. Laat $x \in D$ en $d(x,a) < \delta$. Dan is $x \in D \cap B(a;\delta)$, dus $f(x) \in f(D \cap B(a;\delta)) \subset B(b;\varepsilon)$, dus $d(f(x),b) < \varepsilon$. Hiermee is aangetoond dat uit $x \in \mathrm{Dom}(f)$ en $d(x,a) < \delta$ volgt dat $d(f(x),b) < \varepsilon$, dus (1.6) geldt. We hebben aangetoond dat (1.8) $\Rightarrow$ (1.6).

Uit de geldigheid van de twee genoemde implicaties volgt dat de beweringen (1.6) en (1.8) gelijkwaardig zijn. De definitie van limiet kan derhalve ook als volgt geformuleerd worden.

Definitie 1.12' Laat $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ een functie zijn, en $a \in \mathbb{R}^n$ en $b \in \mathbb{R}^m$ punten. Dan betekent

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

dat voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat

$$f(\mathrm{Dom}(f) \cap B(a;\delta)) \subset B(b;\varepsilon).$$

Opmerking 1.19 Er kan zich de merkwaardige situatie voordoen dat een functie $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ meer dan één limiet heeft voor $x \to a$. Dit gebeurt als er een $\delta > 0$ bestaat zo dat $B(a;\delta) \cap \mathrm{Dom}(f) = \emptyset$.

Bewering: Veronderstel dat er een $\delta > 0$ bestaat zo dat $B(a;\delta) \cap \mathrm{Dom}(f) = \emptyset$. Dan geldt voor elke $b \in \mathbb{R}^m$ dat $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

Bewijs: Zij $b \in \mathbb{R}^m$ willekeurig en zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies $\delta > 0$ zo dat $B(a;\delta) \cap \mathrm{Dom}(f) = \emptyset$. Dan geldt $f(\mathrm{Dom}(f) \cap B(a;\delta)) = f(\emptyset) = \emptyset \subset B(b;\varepsilon)$. Dus $\lim_{x\to a} f(x) = b$, wegens Definitie 1.12'. □

Als er een $\delta > 0$ bestaat zo dat $B(a;\delta) \cap \mathrm{Dom}(f) = \emptyset$ dan heeft ieder punt $x \in \mathrm{Dom}(f)$ een afstand minstens δ tot het punt a; deze situatie is in de praktijk totaal oninteressant voor het nemen van een limiet. Sommige auteurs eisen daarom in de definitie van limiet dat de bovenstaande situatie zich niet voordoet. Dit garandeert wel de eenduidigheid van de limiet, zoals in het onderstaande zal blijken.

Definitie 1.20 Zij $A \subset \mathbb{R}^n$. Onder een *limietpunt* van A verstaan we een punt $a \in \mathbb{R}^n$ met eigenschap dat

$$\text{voor alle} \quad \delta > 0 \quad \text{geldt:} \quad B(a;\delta) \cap A \neq \emptyset.$$

De verzameling van alle limietpunten van A heet de *afsluiting* van A, en wordt genoteerd met $\overline{A}$.

Opmerking 1.21 Uit de bovenstaande definitie volgt dat ieder punt van A een limietpunt van A is; dus $A \subset \overline{A}$.

Het volgende resultaat drukt uit dat $\lim_{x\to a} f(x)$ hoogstens één waarde kan hebben als a een limietpunt van $\mathrm{Dom}(f)$ is.

Lemma 1.22 (Eenduidigheid van de limiet) *Zij $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ een functie, en a een limietpunt van* $\mathrm{Dom}(f)$. *Veronderstel dat $b, c \in \mathbb{R}^m$ en dat*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \textit{en} \quad \lim_{x\to a} f(x) = c.$$

Dan $b = c$.

Bewijs: Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Dan bestaan er $\delta_1 > 0$ en $\delta_2 > 0$ zo dat voor $x \in \mathrm{Dom}(f)$ geldt:

$$d(x,a) < \delta_1 \Rightarrow d(f(x),b) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{en} \quad d(x,a) < \delta_2 \Rightarrow d(f(x),c) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zij $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Dan is $\delta > 0$. Aangezien a een limietpunt van $\mathrm{Dom}(f)$ is, bestaat er een $x \in B(a;\delta) \cap \mathrm{Dom}(f)$. Voor deze x geldt $d(x,a) < \delta_1$ en $d(x,a) < \delta_2$, dus:

$$d(b,c) \leq d(b, f(x)) + d(f(x),c) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Het reële getal $d(b,c)$ is niet-negatief en voldoet wegens het bovenstaande aan $d(b,c) < \varepsilon$ voor elke $\varepsilon > 0$. Hieruit volgt dat $d(b,c) = 0$, dus $b = c$. □

Opmerking 1.23 In het bovenstaande bewijs is het gegeven dat $a \in \overline{\mathrm{Dom}(f)}$ ook daadwerkelijk gebruikt. Het is in het algemeen verstandig om te controleren of in een bewijs ook alle voorwaarden gebruikt zijn.

Ga na dat in het bovenstaande bewijs alle eigenschappen (a)-(c) uit Lemma 1.10 gebruikt zijn, maar geen andere eigenschappen.

1.3 Rekenregels voor limieten

In deze paragraaf behandelen we rekenregels die het ons mogelijk zullen maken tal van limieten te berekenen.

Lemma 1.24 (Eenvoudige limieten)

(a) *Zij* $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ *een functie die constant is, d.w.z., er bestaat een* $c \in \mathbb{R}^m$ *zo dat* $f(x) = c$ *voor alle* $x \in \mathrm{Dom}(f)$. *Dan geldt, voor elke* $a \in \mathbb{R}^n$, *dat* $\lim_{x\to a} f(x) = c$.

(b) *Zij* $a \in \mathbb{R}^n$. *Dan is* $\lim_{x\to a} x = a$.

Bewijs: Het bewijs bestaat uit het controleren dat aan de definitie voldaan wordt. Formuleer het bewijs zelf. □

Zijn $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ functies, dan definiëren we de functie $f + g : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ door

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)).$$

Het domein van de functie $f + g$ wordt dus gegeven door $\mathrm{Dom}(f + g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$.

Lemma 1.25 (Somregel) *Laat* $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ *en* $g : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ *functies zijn, en* $a \in \mathbb{R}^n$ *en* $b, c \in \mathbb{R}^m$ *punten.*

$$\textit{Als} \quad \lim_{x\to a} f(x) = b \quad \textit{en} \quad \lim_{x\to a} g(x) = c \quad \textit{dan} \quad \lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = b + c.$$

Bewijs: Veronderstel dat $\lim_{x\to a} f(x) = b$ en $\lim_{x\to a} g(x) = c$. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Dan bestaat er een $\delta_1 > 0$ zo dat voor $x \in \mathrm{Dom}(f)$ met $d(x, a) < \delta_1$ geldt

$$\|f(x) - b\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.9}$$

Tevens bestaat er een $\delta_2 > 0$ zo dat voor $x \in \mathrm{Dom}(g)$ met $d(x, a) < \delta_2$ geldt

$$\|g(x) - c\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.10}$$

Neem $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$ en laat $x \in \mathrm{Dom}(f + g)$ voldoen aan $d(x, a) < \delta$. Dan is $x \in \mathrm{Dom}(f)$ en $d(x, a) < \delta_1$, dus (1.9) geldt. Voorts is $x \in \mathrm{Dom}(g)$ en $d(x, a) < \delta_2$, dus (1.10) geldt. Combinatie van (1.9) en (1.10) geeft:

$$\begin{aligned} \|(f(x) + g(x)) - (b + c)\| &= \|(f(x) - b) + (g(x) - c)\| \\ &\le \|f(x) - b\| + \|g(x) - c\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Hiermee is bewezen dat voor alle $x \in \mathrm{Dom}(f + g)$ met $d(x, a) < \delta$ geldt $d(f(x) + g(x), b + c) < \varepsilon$. Dus $f(x) + g(x) \to b + c$ als $x \to a$. □

Voor functies $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R}$ en $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definiëren we de functie $fg : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R}^m$ door

$$fg(x) = f(x)g(x), \qquad (x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)).$$

In het bijzonder is $\mathrm{Dom}(fg) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$.

Lemma 1.26 (Productregel) *Laat $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R}$ en $g : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R}^m$ functies zijn, en $a \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^m$.*

$$\text{Als} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \lambda \quad \text{en} \quad \lim_{x\to a} g(x) = b, \quad \text{dan} \quad \lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lambda b.$$

Bewijs: Veronderstel dat aan de hypothese voldaan is. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Definieer

$$\varepsilon' := \min(1, \frac{\varepsilon}{2(1 + \|b\| + |\lambda|)}).$$

Dan bestaat er een $\delta_1 > 0$ zo dat voor $x \in \mathrm{Dom}(f)$ met $d(x,a) < \delta_1$ geldt

$$|f(x) - \lambda| < \varepsilon'. \tag{1.11}$$

Tevens bestaat er een $\delta_2 > 0$ zo dat voor $x \in \mathrm{Dom}(g)$ met $d(x,a) < \delta_2$ geldt

$$\|g(x) - b\| < \varepsilon'. \tag{1.12}$$

Zij nu $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ en laat $x \in \mathrm{Dom}(fg)$ voldoen aan $d(x,a) < \delta$. Dan gelden de schattingen (1.11) en (1.12), en er volgt dat

$$\begin{aligned} \|f(x)g(x) - \lambda b\| &= \|f(x)g(x) - \lambda g(x) + \lambda g(x) - \lambda b\| \\ &\leq \|(f(x) - \lambda)g(x)\| + \|\lambda(g(x) - b)\| \\ &= |f(x) - \lambda|\|g(x)\| + |\lambda|\|g(x) - b\| \\ &\leq \varepsilon'\|g(x)\| + |\lambda|\varepsilon' \\ &\leq \frac{(\|g(x)\| + |\lambda|)}{(1 + \|b\| + |\lambda|)}\frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Uit (1.12) volgt ook dat

$$\|g(x)\| = \|(g(x) - b) + b\| \leq \|g(x) - b\| + \|b\| < \varepsilon' + \|b\| \leq 1 + \|b\|.$$

Combineren we dit met (1.13), dan vinden we dat, voor alle $x \in \mathrm{Dom}(fg)$ met $d(x,a) < \delta$,

$$\|f(x)g(x) - \lambda b\| \leq \left(\frac{1 + \|b\| + |\lambda|}{1 + \|b\| + |\lambda|}\right)\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

We concluderen dat $f(x)g(x) \to \lambda b$ als $x \to a$. $\square$

Opmerking 1.27 Combineren we Lemma's 1.24 (a) en 1.26, dan vinden we dat, voor $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ en $\lambda \in \mathbb{R}$, het volgende geldt.

$$\text{Als} \quad \lim_{x \to a} f(x) = b, \quad \text{dan} \quad \lim_{x \to a} \lambda f(x) = \lambda b.$$

Lemma 1.28 (Quotiëntregel) *Laat $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ een functie zijn, $a \in \mathbb{R}^n$ en $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.*

$$\textit{Als} \quad \lim_{x \to a} f(x) = \lambda, \quad \textit{dan} \quad \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lambda}.$$

Bewijs: Veronderstel dat f voldoet aan de hypothese. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig, en definieer

$$\varepsilon' := \min(\frac{|\lambda|}{2}, \frac{\varepsilon|\lambda|^2}{2}).$$

Dan is $\varepsilon' > 0$ dus er bestaat een $\delta > 0$ met de eigenschap dat voor alle $x \in \mathrm{Dom}(f)$ met $d(x,a) < \delta$ geldt

$$|f(x) - \lambda| < \varepsilon'. \tag{1.14}$$

Laat $x \in \mathrm{Dom}(\frac{1}{f})$ voldoen aan $d(x,a) < \delta$. Dan geldt (1.14), dus ook

$$|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\lambda}| = \left|\frac{\lambda - f(x)}{\lambda f(x)}\right| < \frac{\varepsilon'}{|\lambda|}\frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{\varepsilon|\lambda|}{2|f(x)|}. \tag{1.15}$$

Uit (1.14) volgt ook dat

$$|f(x)| = |\lambda + (f(x) - \lambda)| \geq |\lambda| - |f(x) - \lambda| > |\lambda| - \varepsilon' \geq \frac{1}{2}|\lambda|,$$

dus

$$\frac{1}{|f(x)|} < \frac{2}{|\lambda|}.$$

Combineren we dit met (1.15), dan zien we dat, voor alle $x \in \mathrm{Dom}(f)$ met $d(x,a) < \delta$,

$$|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\lambda}| < \frac{\varepsilon|\lambda|}{2|f(x)|} < \frac{\varepsilon|\lambda|}{2}\frac{2}{|\lambda|} = \varepsilon.$$

Hiermee is aangetoond dat $1/f(x) \to 1/\lambda$ als $x \to a$. □

Opmerking 1.29 Combineren we Lemma's 1.26 en 1.28, dan vinden we, met de gegevens van Lemma 1.26, en als $\lambda \neq 0$, dat het volgende geldt.

$$\text{Als} \quad \lim_{x \to a} f(x) = \lambda \quad \text{en} \quad \lim_{x \to a} g(x) = b, \quad \text{dan} \quad \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} g(x) = \frac{1}{\lambda} b.$$

Voor $m = 1$ geeft dit de bekende quotiëntregel voor de limiet van het quotiënt van twee reëelwaardige functies.

Ten slotte is er nog een belangrijke rekenregel die het mogelijk maakt limieten van vectorwaardige functies te herleiden tot limieten van scalaire functies. Is $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ dan definiëren we de componentfuncties $f_j : \mathrm{Dom}(f) \to \mathbb{R}$, voor $1 \leq j \leq m$, door $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. We schrijven ook wel $f = (f_1, \ldots, f_m)$.

Lemma 1.30 *Laat $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ een functie zijn, en $a \in \mathbb{R}^n$ en $b \in \mathbb{R}^m$ punten. Dan zijn de volgende beweringen gelijkwaardig.*

(a) $\lim_{x\to a} f(x) = b$;

(b) *voor elke* $1 \leq j \leq m$ *geldt* $\lim_{x\to a} f_j(x) = b_j$.

Bewijs: Uit Lemma 1.7 volgt dat voor iedere $1 \leq j \leq m$ en voor iedere $x \in \mathrm{Dom}(f)$ geldt:

$$|f_j(x) - b_j| \leq \|f(x) - b\| \leq \sum_{k=1}^{m} |f_k(x) - b_k|. \tag{1.16}$$

Veronderstel nu dat (a) geldt. Zij $1 \leq j \leq m$. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Wegens (a) bestaat er een $\delta > 0$ zo dat voor alle $x \in \mathrm{Dom}(f)$ met $d(x, a) < \delta$ geldt dat $\|f(x) - b\| < \varepsilon$. Wegens de eerste ongelijkheid in (1.16) volgt dat voor zulke x ook geldt dat $|f_j(x) - b_j| < \varepsilon$. We concluderen dat $\lim_{x\to a} f_j(x) = b_j$. Dit geldt voor iedere j, dus (b) volgt.

Veronderstel nu dat (b) geldt. Wegens Lemma 1.16 geldt voor elke $1 \leq j \leq m$ dat $\lim_{x\to a} |f_j(x) - b_j| = 0$. Wegens de somregel voor limieten, herhaaldelijk toegepast, volgt dat

$$\lim_{x\to a} \sum_{k=1}^{m} |f_k(x) - b_k| = 0. \tag{1.17}$$

Zij $\varepsilon > 0$. Dan bestaat wegens (1.17) een $\delta > 0$ zo dat voor alle $x \in \mathrm{Dom}(f)$ met $d(x, a) < \delta$ geldt: $\sum_{k=1}^{m} |f_k(x) - b_k| < \varepsilon$. Wegens de laatste ongelijkheid in (1.16) geldt voor zulke x ook dat $\|f(x) - b\| < \varepsilon$. We concluderen dat (a) geldt. □

Voorbeeld 1.31 We gebruiken de in het bovenstaande gegeven rekenregels om de volgende limiet te bepalen

$$\lim_{(x,y)\to(0,-2)} \frac{1}{y}\left(\frac{x+y}{x^2+y^2}, \frac{xy-1}{x+y}\right).$$

We geven één keer alle details om precies te laten zien hoe de rekenregels gebruikt worden. Uit Lemma 1.24 volgt dat

$$\lim_{(x,y)\to(0,-2)} (x, y) = (0, -2).$$

Uit het vorige lemma volgt nu dat

$$\lim_{(x,y)\to(0,-2)} x = 0 \quad \text{en} \quad \lim_{(x,y)\to(0,-2)} y = -2.$$

Door toepassing van de productregel leiden we hieruit af dat

$$\lim_{(x,y)\to(0,-2)} x^2 = 0, \quad \lim_{(x,y)\to(0,-2)} y^2 = (-2)\cdot(-2) = 4 \quad \text{en} \quad \lim_{(x,y)\to(0,-2)} xy = 0\cdot(-2) = 0.$$

Door toepassing van de somregel vinden we

$$\lim_{(x,y)\to(0,-2)} x + y = 0 + (-2) = -2 \quad \text{en} \quad \lim_{(x,y)\to(0,-2)} x^2 + y^2 = 0 + 4 = 4,$$

en als we tevens Lemma 1.24 (a) toepassen, dan vinden we

$$\lim_{(x,y)\to(0,-2)} xy - 1 = 0 + (-1) = -1.$$

Door toepassing van de quotiëntregel vinden we

$$\lim_{(x,y)\to(0,-2)} \frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{en} \quad \lim_{(x,y)\to(0,-2)} \frac{xy-1}{x+y} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

Tenslotte vinden we door toepassing van het vorige lemma en van de quotiënt- en de productregel dat

$$\lim_{(x,y)\to(0,-2)} \frac{1}{y}\left(\frac{x+y}{x^2+y^2}, \frac{xy-1}{x+y}\right) = \frac{1}{-2}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right).$$

Een andere belangrijke rekenregel is de substitutieregel. Is $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ een functie, en $B \subset \mathbb{R}^m$ een verzameling, dan is het volledig origineel van B onder f, notatie $f^{-1}(B)$, de deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ gedefinieerd door

$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathrm{Dom}(f) \mid f(x) \in B\}.$$

Is $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ een tweede functie, dan is de samenstelling $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ gedefinieerd door

$$g \circ f(x) = g(f(x)), \qquad (x \in f^{-1}(\mathrm{Dom}(g))).$$

In het bijzonder is $\mathrm{Dom}(g \circ f) = f^{-1}(\mathrm{Dom}(g))$.

Lemma 1.32 (Substitutieregel) *Laat $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ en $g : \mathbb{R}^m \rightarrowtail \mathbb{R}^p$ functies zijn, en $a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$ en $c \in \mathbb{R}^p$ punten.*

$$\textit{Als} \quad \lim_{x\to a} f(x) = b \quad \textit{en} \quad \lim_{y\to b} g(y) = c, \quad \textit{dan} \quad \lim_{x\to a} g(f(x)) = c.$$

Bewijs: Veronderstel dat f en g voldoen aan de hypothesen. Laat $\varepsilon > 0$ willekeurig zijn. Er bestaat een $\delta_1 > 0$ zo dat

$$g(B(b;\delta_1) \cap \mathrm{Dom}(g)) \subset B(c;\varepsilon).$$

Hierbij bestaat een $\delta > 0$ zo dat

$$f(B(a;\delta) \cap \mathrm{Dom}(f)) \subset B(b;\delta_1).$$

Veronderstel nu dat $x \in B(a;\delta) \cap \mathrm{Dom}(g \circ f)$. Dan is x bevat in $B(a;\delta) \cap \mathrm{Dom}(f)$ en $f(x) \in \mathrm{Dom}(g)$, dus

$$f(x) \in f(B(a;\delta) \cap \mathrm{Dom}(f)) \cap \mathrm{Dom}(g) \subset B(b;\delta_1) \cap \mathrm{Dom}(g),$$

waaruit volgt dat $g(f(x)) \in B(c;\varepsilon)$. We concluderen dat $g(f(x)) \to c$ als $x \to a$. $\square$

1.4 Limieten en ongelijkheden

In deze paragraaf behandelen we enige resultaten die de relatie tussen limietgedrag en ongelijkheden tot onderwerp hebben.

Lemma 1.33 (Behoud van ongelijkheden bij limieten) *Laat $D \subset \mathbb{R}^n$ zijn en a een limietpunt van D. Laat $f, g : D \to \mathbb{R}$ functies zijn en veronderstel dat* $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *en* $\lim_{x\to a} g(x) = c$, *met $b, c \in \mathbb{R}$.*

Als $f(x) \leq g(x)$ voor alle $x \in D$, dan geldt ook: $b \leq c$.

Bewijs: Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Dan bestaan er $\delta_1, \delta_2 > 0$ met de eigenschap dat voor elke $x \in D$ geldt:

$$d(x,a) < \delta_1 \Rightarrow f(x) \in]\, b-\varepsilon, b+\varepsilon\, [\quad \text{en} \quad d(x,a) < \delta_2 \Rightarrow g(x) \in]\, c-\varepsilon, c+\varepsilon\, [.$$

Zij $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Dan is $\delta > 0$ en omdat a een limietpunt is van D, is de verzameling $B(a;\delta) \cap D$ niet leeg. Kies een x in die verzameling. Dan geldt $f(x) \leq g(x)$. Tevens geldt $d(x,a) < \delta_1$, dus $f(x) > b - \varepsilon$. Ook geldt $d(x,a) < \delta_2$, dus $g(x) < c + \varepsilon$. We concluderen dat

$$b < f(x) + \varepsilon \leq g(x) + \varepsilon < c + 2\varepsilon.$$

Hiermee is aangetoond dat voor iedere $\varepsilon > 0$ geldt: $b < c + 2\varepsilon$. We concluderen dat $b \leq c$. □

Opmerking 1.34 (Strikte ongelijkheden blijven niet altijd behouden) Uit de veronderstelling dat $f(x) < g(x)$ voor alle $x \in D$ kan niet geconcludeerd worden dat $b < c$. Dit blijkt uit het volgende voorbeeld.

Zij $n = 1$ en $D =]\,0, \infty\,[$. Dan is $a = 0$ een limietpunt van D. Laat $f, g : D \to \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door $f(x) = 0$ en $g(x) = x$. Dan geldt $f(x) < g(x)$ voor alle $x \in D$, maar $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ en $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.

Lemma 1.35 (Insluitstelling) *Laat $D \subset \mathbb{R}^n$ zijn, en $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ een drietal functies met $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ voor alle $x \in D$. Veronderstel dat $a \in \mathbb{R}^n$ en dat er een $\lambda \in \mathbb{R}$ bestaat met*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lambda \quad \textit{en} \quad \lim_{x\to a} h(x) = \lambda.$$

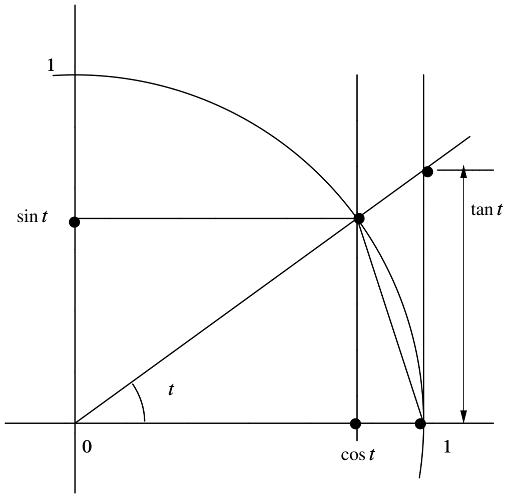
Dan geldt ook

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lambda.$$

Bewijs: Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Dan bestaat er een $\delta > 0$ zo dat voor alle $x \in D$ met $d(x,a) < \delta$ geldt

$$f(x) \in]\, \lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon\, [\quad \text{en} \quad h(x) \in]\, \lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon\, [.$$

(Hier is één $\delta > 0$ gekozen om twee schattingen te realiseren. Ga na waarom dit mag.) Voor alle $x \in D$ met $d(x,a) < \delta$ geldt dus ook $\lambda - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \lambda + \varepsilon$, dus $|g(x) - \lambda| < \varepsilon$. We concluderen dat $g(x) \to \lambda$ voor $x \to a$. □



Figuur 2: Toepassing van de insluitstelling

Voorbeeld 1.36 Als toepassing van de insluitstelling behandelen we de bekende limiet

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1. \tag{1.18}$$

We doen dit met meetkundige argumenten, die uiteindelijk in de analyse ondergebracht kunnen worden. In dit stadium kunnen wij dat niet doen, omdat we (nog) niet beschikken over correcte definities van lengte en oppervlakte. Verder zullen we vrijelijk gebruik maken van goniometrische formules, hoewel we die strikt genomen eerst zouden moeten afleiden. Zelfs de sinus functie hebben we nog niet gedefinieerd. Dit gezegd zijnde is de volgende redenatie toch illustratief voor de kracht van de insluitstelling.

We beschouwen het punt $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$ op de eenheidscirkel in $\mathbb{R}^2$. Zie Figuur 2.

De driehoek $D_1(t)$ met hoekpunten 0, $\sigma(t)$ en $(1, 0)$ heeft oppervlakte $\frac{1}{2} \sin t$. De cirkelsector $S(t)$ tussen de punten 0, $(1, 0)$ en $\sigma(t)$ heeft oppervlakte

$$\text{opp}\, S(t) = \frac{t}{2\pi} \cdot \pi r^2|_{r=1} = \frac{1}{2} t.$$

Tenslotte heeft de driehoek $D_2(t)$ met hoekpunten 0, $(1, 0)$ en $(1, \tan t)$ de oppervlakte $\frac{1}{2} \tan t$. Uit de inclusies $D_1(t) \subset S(t) \subset D_2(t)$, voor $0 < t < \frac{\pi}{2}$, volgt dat

$$\sin t \le t \le \tan t, \qquad (0 < t < \frac{\pi}{2}). \tag{1.19}$$

Aangezien $\sin t > 0$ voor $0 < t < \frac{\pi}{2}$, volgt uit de eerste ongelijkheid ook dat

$$0 \le |\sin t| \le |t|. \tag{1.20}$$

Omdat $\sin(t) = \sin(-t)$, zien we dat (1.20) algemener geldt voor alle $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Met de insluitstelling volgt hieruit dat

$$\lim_{t \to 0} \sin t = 0.$$

Uit $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ volgt dat $\sin^2 t = (1 - \cos t)(1 + \cos t)$, dus

$$|1 - \cos t| = \frac{|\sin t|^2}{|1 + \cos t|} \leq |\sin t|^2.$$

Door nogmaals toepassen van de insluitstelling vinden we dat $\lim_{t \to 0} |1 - \cos t| = 0$, waaruit weer volgt dat

$$\lim_{t \to 0} \cos t = 1. \tag{1.21}$$

Tenslotte volgt uit (1.19), via deling door $\sin t$, gevolgd door inverse nemen, dat

$$\cos t \leq \frac{\sin t}{t} \leq 1,$$

voor $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Alle in de ongelijkheid optredende functies zijn even, dus de ongelijkheid geldt voor alle $t \in]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}[$ met $t \neq 0$. Door gebruik te maken van (1.21) en de insluitstelling, concluderen we tenslotte dat (1.18) geldt.

Voorbeeld 1.37 Uit (1.18) en $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ leiden we met behulp van de substitutiestelling af dat

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 1.$$

1.5 Continuïteit

Met behulp van het limietbegrip kunnen we het begrip continue functie introduceren.

Definitie 1.38 Een functie $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ heet *continu* in een punt $a \in \mathbb{R}^n$ als $a \in \mathrm{Dom}(f)$ en bovendien:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

De functie f heet continu *op een verzameling* $A \subset \mathbb{R}^n$ als f continu is in elk punt $a \in A$. De functie f heet continu als hij continu is op $\mathrm{Dom}(f)$.

Opmerking 1.39 Als f continu is op A, dan geldt in het bijzonder dat $A \subset \mathrm{Dom}(f)$.

Voorbeeld 1.40 Uit de bovenstaande definitie, gecombineerd met Lemma 1.24, volgt dat iedere constante functie op $\mathbb{R}^n$ continu is. Tevens is de functie $x \mapsto x, \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continu.

De rekenregels voor limieten hebben rekenregels voor continuïteit ten gevolge die we in de volgende stellingen op een rijtje zetten.

Lemma 1.41 *Zij* $f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ *een functie, en* $a \in \mathbb{R}^n$ *een punt. Dan zijn de volgende uitspraken gelijkwaardig.*

(a) *De functie* f *is continu in* a;

(b) *Voor iedere* $1 \leq j \leq m$ *is de functie* f_j *continu in* a.

Bewijs: Dit is een direct gevolg van Lemma 1.30 en Definitie 1.38. □

Voorbeeld 1.42 Uit Voorbeeld 1.40 en het bovenstaande lemma volgt dat de coördinaatfuncties

$$x \mapsto x_j, \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

continu zijn.

Lemma 1.43 *Laat* $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ *functies zijn en* $a \in \mathbb{R}^n$ *een punt. Als* f *en* g *continu zijn in* a, *dan is de somfunctie* $f + g$ *dat ook.*

Bewijs: Dit is een direct gevolg van Lemma 1.25 en Definitie 1.38. □

Lemma 1.44 *Laat* $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ *en* $g : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ *functies zijn, en* $a \in \mathbb{R}^n$ *een punt.*

(a) *Als* f *en* g *continu zijn in* a, *dan is* fg *dat ook.*

(b) *Als* f *continu is in* a *en als bovendien* $f(a) \neq 0$, *dan is ook de functie* $1/f : x \mapsto 1/f(x)$ *continu in* a.

Bewijs: Dit is een direct gevolg van Lemma's 1.26 en 1.28 gecombineerd met Definitie 1.38. □

Onder een monomiale veeltermfunctie op $\mathbb{R}^n$ verstaan we een functie $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ van de vorm

$$f : x \mapsto c x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$$

met $c \in \mathbb{R}$ en $k_j \in \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$, voor $1 \leq j \leq n$. Hierbij vatten we x_j^0 op als de constante functie $x \mapsto 1$. Onder een *veelterm-* of *polynomiale functie* op $\mathbb{R}^n$ verstaan we een eindige som van monomiale veeltermfuncties. Onder een *rationale functie* op $\mathbb{R}^n$ verstaan we een functie $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ van de vorm

$$f : x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)},$$

met p en q veeltermfuncties op $\mathbb{R}^n$, $q \neq 0$. Het domein $\mathrm{Dom}(f)$ van een dergelijke functie bestaat uit de punten $x \in \mathbb{R}^n$ met $q(x) \neq 0$.

In het geval dat $n = 1$, is een rationale functie dus een functie van de vorm

$$x \mapsto \frac{a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \cdots + a_0}{b_s x^s + b_{s-1} x^{s-1} + \cdots + b_0},$$

met $r, s \in \mathbb{N}$, $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ voor $0 \leq i \leq r$ en $0 \leq j \leq s$, en $b_s \neq 0$.

Lemma 1.45 *Iedere rationale functie op* $\mathbb{R}^n$ *is continu op zijn domein.*

Bewijs: Dit is een direct gevolg van de Voorbeelden 1.40 en 1.42 gecombineerd met Lemma's 1.43 en 1.44. □

Opmerking 1.46 De volgende bekende functies $\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ zijn continu op hun domein:

$$\sqrt{x}, \quad e^x, \quad \log x, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad \tan x, \quad \arctan x.$$

Men kan precieze definities geven van deze functies en vervolgens hun continuïteit bewijzen. Wij zullen dat -nu nog- niet doen, en de genoemde functies vrijelijk gebruiken in voorbeelden en opgaven. De opbouw van de analyse zal echter niet van het bestaan van deze functies afhangen; later zal dan de theorie van de analyse eventueel gebruikt kunnen worden om de genoemde functies te behandelen. We zullen verderop een paar voorbeelden geven van hoe dit in zijn werk gaat.

Met de genoemde rekenregels en de volgende substitutiestelling kan men vele continue functies 'bouwen'.

Lemma 1.47 *Laat $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ en $g : \mathbb{R}^m \rightarrowtail \mathbb{R}^p$ functies zijn.*

(a) *Is f continu in a en g continu in $f(a)$, dan is de samenstelling $g \circ f$ continu in a.*

(b) *Zijn f en g continu op hun domein, dan is ook $g \circ f$ continu op zijn domein.*

Bewijs: (a) Er geldt dat $a \in \mathrm{Dom}(f)$ en $f(a) \in \mathrm{Dom}(g)$, dus $a \in \mathrm{Dom}(g \circ f)$. De continuïteit van $g \circ f$ in a volgt nu direct uit de substitutieregel voor limieten, Lemma 1.32.

(b) Is $a \in \mathrm{Dom}(g \circ f)$, dan is $a \in \mathrm{Dom}(f)$ en $f(a) \in \mathrm{Dom}(g)$, dus f is continu in a en g is continu in $f(a)$. Met (a) volgt nu dat $g \circ f$ continu is in a. $\square$

Voorbeeld 1.48 We beschouwen de functie $h : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (\sqrt{x + y}, \sin xy)$. Merk op dat $h = g \circ f$, met $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, xy)$, en $g : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}^2$, $(u, v) \mapsto (\sqrt{u}, \sin v)$. De componenten f_1, f_2 zijn veeltermfuncties, dus continu. Met Lemma 1.41 concluderen we dat f continu is. De componenten g_1 en g_2 van g zijn continu op hun domeinen. Derhalve is g continu op zijn domein $\mathrm{Dom}(g) = \mathrm{Dom}(g_1) \cap \mathrm{Dom}(g_2) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \geq 0\}$. We concluderen dat h continu is op zijn domein. De laatste verzameling bestaat uit de punten $(x, y) \in \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$ met $f(x, y) \in \mathrm{Dom}(g)$, dus $\mathrm{Dom}(h) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 0\}$.

1.6 Toepassing: rekenregels voor differentiëren

Met behulp van het limietbegrip kunnen we de afgeleide van een functie $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}^n$ invoeren en rekenregels voor differentiëren afleiden.

Onder een *interval* I in $\mathbb{R}$ verstaan we een verzameling die voorkomt in de onderstaande lijst:

(a) $I = \emptyset$;

(b) I is een verzameling van de vorm $[a, b]$ met $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.

(b) I is een van de verzamelingen $]\,a, b]$, $[a, b\,[$, of $]\,a, b\,[$, met $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$;

(c) I is een van de verzamelingen $]-\infty, a]$, $]-\infty, a\,[$, $[b, \infty\,[$, of $]\,b, \infty\,[$, met $a, b \in \mathbb{R}$;

(d) $I = \mathbb{R}$.

De bovenstaande verzamelingen worden op de gebruikelijke wijze gedefinieerd, dus bijvoorbeeld

$$[a, b\,[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \qquad \text{en} \qquad]-\infty, b\,[:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}.$$

Verderop in het dictaat zullen we een elegantere definitie van een interval geven, zie Definitie 5.1. In de daarop volgende stelling wordt dan bewezen dat het zo gedefinieerde begrip interval overeenkomt met het bovenstaande.

In het vervolg veronderstellen we dat $I \subset \mathbb{R}$ een interval is dat meer dan één punt bevat.

Definitie 1.49 Zij $f : I \to \mathbb{R}^n$ en $a \in I$. De functie f heet *differentieerbaar* in a als er een vector $v \in \mathbb{R}^n$ bestaat met

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = v. \tag{1.22}$$

Is dit het geval, dan wordt de (unieke) limiet v de *afgeleide* van f in a genoemd, en genoteerd met $f'(a)$ of $\frac{df}{dx}(a)$.

Is f differentieerbaar in ieder punt van I, dan heet de functie $x \mapsto f'(x)$, $I \to \mathbb{R}^n$ de afgeleide van f, notatie: f' of $\frac{df}{dx}$.

Opmerking 1.50 Het quotiënt in (1.22) dient gelezen te worden als

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{1}{x - a}\,(f(x) - f(a)) \in \mathbb{R}^n$$

en heet ook wel het *differentiequotiënt* van f in x en a. De afgeleide $f'(a)$ wordt ook wel het *differentiaalquotiënt* van f in a genoemd.

Opmerking 1.51 Aangezien $\lim_{h \to 0}(a + h) = a$, is de uitspraak (1.22) wegens de substitutiestelling voor limieten gelijkwaardig met de uitspraak

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = v. \tag{1.23}$$

We kunnen in de bovenstaande definitie de uitspraak (1.22) dan ook vervangen door (1.23).

Voorbeeld 1.52 Uit de definitie van differentieerbaarheid volgt direct dat, voor iedere $c \in \mathbb{R}^n$, de constante functie $f : I \to \mathbb{R}^n, x \mapsto c$ differentieerbaar is op I. De afgeleide functie wordt gegeven door

$$\frac{d}{dx}c = 0.$$

Uit de definitie volgt tevens direct dat functie $x \mapsto x, I \to \mathbb{R}$ differentieerbaar is met afgeleide

$$\frac{d}{dx}x = 1.$$

Lemma 1.53 *Laat $f : I \to \mathbb{R}^n$ differentieerbaar zijn in a. Dan is f continu in a.*

Bewijs: Voor alle $x \in I \setminus \{a\}$ geldt

$$f(x) - f(a) = (x-a)\frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Zij f_0 de beperking van f tot $I \setminus \{a\}$. Dan volgt met de productregel voor limieten uit het bovenstaande dat

$$\lim_{x \to a} [f_0(x) - f(a)] = 0 \cdot f'(a) = 0.$$

Hieruit concluderen we dat $\lim_{x \to a} f_0(x) = f(a)$, dus ook $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. We concluderen dat f continu is in a. □

Lemma 1.54 (Componentsgewijs differentiëren) *Zij $f = (f_1, \ldots, f_n) : I \to \mathbb{R}^n$ een functie en $a \in I$. De functie f is differentieerbaar in a dan en slechts dan als elk van de functies f_i, voor $1 \leq i \leq n$, differentieerbaar is in a. Is f differentieerbaar in a, dan geldt*

$$f'(a) = (f_1'(a), \ldots, f_n'(a)).$$

Bewijs: Dit is een direct gevolg van Lemma 1.30 en Definitie 1.49. □

Wegens de hierboven beschreven reductie tot componenten beperken we ons hieronder tot scalaire functies.

Lemma 1.55 *Laat $f, g : I \to \mathbb{R}$ differentieerbaar zijn in $a \in I$; zij $\lambda \in \mathbb{R}$. Dan zijn ook de functies $f + g$, fg en λf differentieerbaar in a. Voorts geldt*

(a) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$;

(b) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$;

(c) $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$.

Is bovendien $g(a) \neq 0$, dan is ook de functie f/g differentieerbaar in a, en er geldt:

(d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

Bewijs: Het bewijs berust op de rekenregels voor limieten. Allereerst merken we op dat

$$\frac{[f+g](a+h) - [f+g](a)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{g(a+h) - g(a)}{h},$$

voor $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ met $a + h \in I$. De beide differentiequotiënten in het rechterlid hebben limieten $f'(a)$ respectievelijk $g'(a)$ voor $h \to 0$. Met de somregel voor limieten volgt dat het differentiequotiënt in het linkerlid voor $h \to 0$ de limiet $f'(a) + g'(a)$ heeft. Hieruit volgt dat $f + g$ differentieerbaar is in a met formule (a) voor de afgeleide.

We beschouwen nu het differentiequotiënt voor de functie fg, voor $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ met $a + h \in I$:

$$\begin{aligned}
\frac{(fg)(a+h) - (fg)(a)}{h} &= \\
&= \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} \\
&= \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a+h)}{h} + \frac{f(a)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} \\
&= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} g(a+h) + f(a) \frac{g(a+h) - g(a)}{h}.
\end{aligned}$$

Wegens Lemma 1.53 is g continu in a, en met de substitutiestelling volgt $\lim_{h \to 0} g(a+h) = g(a)$. Met de rekenregels voor limieten zien we dat de uitdrukking in het laatste lid van de bovenstaande reeks gelijkheden een limiet heeft voor $h \to 0$, namelijk $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$. Hieruit volgt de differentieerbaarheid van fg in a, met formule (b) voor de afgeleide.

De constante functie $x \mapsto \lambda$ is differentieerbaar in a met afgeleide 0. Toepassing van de productregel (b) op de functie λf geeft het gewenste resultaat, met formule (c).

We veronderstellen tenslotte dat $g(a) \neq 0$ en beschouwen eerst de functie $1/g$. Uit de continuïteit van g volgt dat er een $\delta > 0$ bestaat zo dat $g(x) \neq 0$ voor alle x in het interval $I_\delta := I \cap \,]a - \delta, a + \delta[$. Het differentiequotiënt van deze functie, voor $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ met $a + h \in I_\delta$, is gelijk aan

$$\frac{\frac{1}{g(a+h)} - \frac{1}{g(a)}}{h} = -\frac{g(a+h) - g(a)}{h} \, \frac{1}{g(a)g(a+h)}$$

(reken na). Zoals gezegd geldt $\lim_{h \to 0} g(a+h) = g(a)$. Met de rekenregels voor limieten volgt nu dat het rechterlid van de bovenstaande identiteit een limiet heeft voor $h \to 0$, namelijk $-g'(a)/g(a)^2$. Hieruit volgt dat $1/g$ differentieerbaar is in a met afgeleide

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g(a)^2}$$

Tenslotte merken we op dat $f/g = f \cdot (1/g)$. Toepassing van (b) en het zojuist afgeleide geeft dat f/g differentieerbaar is in a met formule (d) voor de afgeleide. □

We eindigen deze paragraaf met een bewijs van de kettingregel voor het differentiëren van samengestelde functies.

Stelling 1.56 (De kettingregel) *Zij $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$ een interval dat $f(I)$ bevat, en $g : J \to \mathbb{R}$. Als f en g differentieerbaar zijn in a, respectievelijk $f(a)$, dan is $g \circ f$ differentieerbaar in a, met afgeleide:*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Voor het bewijs van dit resultaat ligt het voor de hand het differentiequotiënt van de samenstelling te herschrijven als

$$\frac{g(f(a+h))-g(f(a))}{h} = \frac{g(f(a+h))-g(f(a))}{f(a+h)-f(a)}\,\frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \tag{1.24}$$

en vervolgens op te merken dat $\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$ en met de substitutiestelling voor limieten te concluderen dat

$$(g\circ f)'(a) = \lim_{y\to f(a)} \frac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = g'(f(a))f'(a).$$

Dit bewijs zou correct zijn als voor voldoend kleine $\delta > 0$ zou gelden $0 < |h| < \delta \Rightarrow f(a+h)-f(a) \neq 0$, zodat de uitdrukking in het rechterlid van (1.24) gedefinieerd is. Er is echter geen enkele garantie dat zo'n δ bestaat. In het geval dat de functie f constant is, is dit onmiddellijk duidelijk. Om de hierboven optredende problemen te vermijden geven we een karakterisering van differentieerbaarheid waarbij het differentiequotiënt vermeden wordt.

Lemma 1.57 *Zij $f : I \to \mathbb{R}^n$, $a \in I$. Dan zijn de volgende uitspraken gelijkwaardig.*

(a) *De functie f is differentieerbaar in a.*

(b) *Er bestaat een $v \in \mathbb{R}^n$ zo dat de functie $\rho : \mathbb{R} \supset\!\!\to \mathbb{R}^n$ gedefinieerd door*

$$\rho(h) = f(a+h) - f(a) - hv$$

voldoet aan

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|\rho(h)\|}{|h|} = 0. \tag{1.25}$$

(c) *Er bestaat een functie $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ die continu is in a, en zo dat*

$$f(x) - f(a) = (x-a)\varphi(x),$$

voor alle $x \in I$.

Is aan de bovenstaande condities voldaan, dan is de vector $v \in \mathbb{R}^n$ in (b) uniek bepaald, en gelijk aan $f'(a)$. Tevens is de functie φ in (c) uniek bepaald, en er geldt dat $\varphi(a) = f'(a)$.

Bewijs: Stel dat (a) geldt en neem $v = f'(a)$. Dan geldt voor $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ met $a + h \in I$ dat

$$\frac{\rho(h)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - v.$$

Wegens de definitie van differentieerbaarheid heeft de uitdrukking in het rechterlid limiet $f'(a) - v = 0$ voor $h \to 0$. Hieruit volgt dat $\lim_{h\to 0} |h|^{-1}\|\rho(h)\| = \lim_{h\to 0} \|h^{-1}\rho(h)\| = 0$, waarmee (b) is aangetoond.

Stel dat (b) geldt. We definiëren de functie $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ door

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{als} \quad x \neq a, \\ v & \text{als} \quad x = a. \end{cases} \tag{1.26}$$

Dan volgt uit het gegeven dat

$$\varphi(a+h) - v = \frac{\rho(h)}{h} \tag{1.27}$$

voor $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ met $a+h \in I$. Uit (1.25) volgt dat $\lim_{h\to 0} \|h^{-1}\rho(h)\| = 0$, dus $\lim_{h\to 0} h^{-1}\rho(h) = 0$, dus het linkerlid van (1.27) heeft limiet 0 voor $h \to 0$. Met behulp van de substitutiestelling volgt hieruit dat $\lim_{x\to a} \varphi(x) = v = \varphi(a)$, dus φ is continu in a.

Veronderstel tenslotte dat (c) geldt. Schrijf φ_0 voor de beperking van φ tot $I \setminus \{a\}$. Dan volgt uit de continuïteit van φ in a direct dat

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \varphi_0(x) = \varphi(a), \tag{1.28}$$

dus f is differentieerbaar in a met afgeleide $f'(a) = \varphi(a)$. We hebben aangetoond dat (a), (b) en (c) gelijkwaardig zijn.

Veronderstel nu dat (a)-(c) gelden, dan rest ons aan te tonen dat φ en v uniek bepaald zijn. Uit (c) volgt dat de beperking φ_0 van φ tot $I \setminus \{a\}$ uniek bepaald is. Anderzijds volgt uit (1.28) dat $\varphi(a) = f'(a)$. Dus φ is uniek bepaald. Als v voldoet aan (b), dan voldoet de functie φ gedefinieerd door (1.26) aan (c). Hieruit leiden we af dat $v = \varphi(a) = f'(a)$, dus v is uniek bepaald en gelijk aan $f'(a)$. □

Bewijs van Stelling 1.56: Volgens Lemma 1.57 (c) bestaat er een unieke functie $\varphi : I \to \mathbb{R}$, continu in a, en zo dat

$$f(x) - f(a) = (x-a)\,\varphi(x), \qquad (x \in I).$$

Volgens het genoemde lemma geldt $\varphi(a) = f'(a)$.

Schrijf $b = f(a)$. Dan bestaat er volgens Lemma 1.57 (c) een unieke functie $\psi : J \to \mathbb{R}$, continu in b, en zo dat

$$g(y) - g(b) = (y-b)\,\psi(y), \qquad (y \in J). \tag{1.29}$$

Volgens het genoemde lemma geldt $\psi(b) = g'(b) = g'(f(a))$. Is $x \in I$, dan is $f(x) \in J$, dus (1.29) geldt met $y = f(x)$. Gebruiken we nog dat $b = f(a)$, dan volgt, voor alle $x \in I$,

$$g(f(x)) - g(f(a)) = (f(x) - f(a))\,\psi(f(x)) = (x-a)\,\varphi(x)\,\psi(f(x)).$$

Wegens Lemma 1.44 (a) en Lemma 1.47 is de functie $x \mapsto \varphi(x)\psi(f(x))$, $I \to \mathbb{R}$ continu in a. Hieruit volgt wegens Lemma 1.57 dat de functie $g \circ f$ differentieerbaar is in a. Bovendien wordt de afgeleide in a gegeven door $(g \circ f)'(a) = \varphi(a)\psi(f(a)) = f'(a)g'(f(a))$.

1.7 Appendix: kwadratische functies

Onder een reële *kwadratische functie* op $\mathbb{R}$ verstaan we een functie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeven door

$$\varphi(t) = at^2 + bt + c, \tag{1.30}$$

waarbij $a, b, c \in \mathbb{R}$ gegeven zijn, en $a \neq 0$. Onder een nulpunt van de functie φ verstaan we een punt $t_0 \in \mathbb{R}$ met $\varphi(t_0) = 0$. Van het VWO weet u dat het bestaan van nulpunten samenhangt met het teken van de *discrimant*

$$D := b^2 - 4ac$$

van φ. We vatten de bekende resultaten samen in een lemma. Het bewijs van dit lemma berust op de techniek 'kwadraat afsplitsen,' die u dient te beheersen.

Lemma 1.58 *De kwadratische functie φ gegeven door (1.30) heeft tenminste één nulpunt in $\mathbb{R}$ dan en slechts dan als de discrimant $D = b^2 - 4ac$ voldoet aan $D \geq 0$.*

(a) *Is $D \geq 0$ dan worden de nulpunten gegeven door*

$$t_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};$$

in het bijzonder heeft φ precies één nulpunt als $D = 0$ en precies twee nulpunten als $D > 0$.

(b) *Is $D < 0$ en $a > 0$ dan is $\varphi(t) > 0$ voor alle $t \in \mathbb{R}$.*

(c) *Is $D < 0$ en $a < 0$ dan is $\varphi(t) < 0$ voor alle $t \in \mathbb{R}$.*

Bewijs: Door kwadraat afsplitsen herschrijven we φ als volgt (merk daarbij op dat $a \neq 0$)

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= a\left(t^2 + 2\frac{bt}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c \\ &= a(t + \frac{b}{2a})^2 - \frac{D}{4a}.\end{aligned} \tag{1.31}$$

Hieruit volgt dat, voor $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = 0 \iff \left(2a(t + \frac{b}{2a})\right)^2 = D. \tag{1.32}$$

Heeft φ een nulpunt, dan volgt uit (1.32) dat D een kwadraat is van een reëel getal, dus $D \geq 0$. Is omgekeerd $D \geq 0$, dan is (1.32) te herschrijven als

$$\varphi(t) = 0 \iff t + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{D}}{2a},$$

dus als

$$\varphi(t) = 0 \iff t = -\frac{b}{2a} + \frac{\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

Dus als $D \geq 0$ dan heeft φ tenminste één nulpunt. Hiermee is de gelijkwaardigheid aan het begin van het lemma bewezen. Bovendien volgt uit de bovenstaande redenering meteen dat (a) geldt. In het vervolg bewijzen we nog (c). Het bewijs van (b) gaat analoog.

Veronderstel dat $D < 0$ en dat $a < 0$. Dan geldt dat $-\frac{D}{4a} < 0$ en, voor alle $t \in \mathbb{R}$, dat $a(t + \frac{b}{2a})^2 \leq 0$. Derhalve is de uitdrukking in het rechterlid van (1.31) strikt kleiner dan nul voor alle $t \in \mathbb{R}$ en we concluderen dat (c) geldt. $\square$

Opmerking 1.59 Zoals bekend van het VWO is de grafiek van de functie φ, dat wil zeggen de verzameling

$$\operatorname{graf}\varphi := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \varphi(x)\},$$

een parabool. Met behulp van het bovenstaande lemma leidt men nu gemakkelijk het volgende af. Is $a > 0$ dan is graf φ een 'dalparabool'. Is $D > 0$ dan heeft deze dalparabool twee snijpunten met de x-as; is $D = 0$ dan heeft hij één (raak)punt gemeen met de x-as, en is $D < 0$ dan heeft graf φ een lege doorsnede met de x-as.

Is $a < 0$ dan is de grafiek een 'bergparabool'. Het aantal snijpunten met de x-as wordt beschreven zoals in het bovenstaande.

1.8 Appendix: afwijkende definitie van limiet

De in dit dictaat gegeven definitie van limiet wijkt af van de definitie die in het college Infinitesimaalrekening gegeven wordt. In het onderstaande zullen we ook de laatstgenoemde definitie bespreken en hem vergelijken met de onze.

Definitie 1.60 Zij $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$ en $b \in \mathbb{R}^m$. De uitdrukking

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = b \tag{1.33}$$

betekent het volgende. Voor elke $\varepsilon > 0$ bestaat er een $\delta > 0$ zo dat voor alle $x \in \operatorname{Dom}(f)$ geldt:

$$0 < d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), b) < \varepsilon. \tag{1.34}$$

De notatie $x \neq a$ in de limiet wordt gemotiveerd door het feit dat de uitspraak $0 < d(x, a)$ gelijkwaardig is met $x \neq a$. De formule (1.33) wordt in het bij Infinitesimaalrekening gebruikte boek genoteerd met $\lim_{x \to a} f(x) = b$, dus met weglating van $x \neq a$. De volgende stelling geeft precies aan wat de relatie tussen de beide limietbegrippen is.

Lemma 1.61 *Zij* $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$ *en* $b \in \mathbb{R}^m$.

(a) *Als* $a \notin \operatorname{Dom}(f)$, *dan geldt:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \iff \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = b.$$

(b) *Als* $a \in \mathrm{Dom}(f)$, *dan geldt:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \iff \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = b \quad \textit{en} \quad f(a) = b.$$

Bewijs: (a): Als $a \notin \mathrm{Dom}(f)$, dan geldt voor alle $x \in \mathrm{Dom}(f)$ dat $x \neq a$, dus $d(x,a) < \delta \iff 0 < d(x,a) < \delta$. Hieruit volgt de gelijkwaardigheid van de beide limietuitspraken.

(b): Stel dat $a \in \mathrm{Dom}(f)$. We tonen eerst de implicatie '$\Rightarrow$' aan. Veronderstel daartoe dat $\lim_{x\to a} f(x) = b$. Zij $\varepsilon > 0$. Dan bestaat er dus een $\delta > 0$ met de eigenschap dat voor alle $x \in \mathrm{Dom}(f)$ geldt $d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x),b) < \varepsilon$. Voor $x = a$ is altijd $d(x,a) < \delta$ en daarmee $d(f(a),b) = 0$. Is $0 < d(x,a) < \delta$, dan geldt in het bijzonder dat $d(x,a) < \delta$, dus $d(f(x),b) < \varepsilon$. Hiermee hebben we de implicatie (1.34) aangetoond. Dus $\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = b$.

We tonen vervolgens de omgekeerde implicatie aan. Veronderstel daartoe dat de bewering in het rechterlid van de gelijkwaardigheid geldt. We zullen laten zien dat de bewering in het linkerlid volgt.

Zij $\varepsilon > 0$. Dan bestaat er een $\delta > 0$ met de eigenschap van Definitie 1.60. Zij $x \in \mathrm{Dom}(f)$ en veronderstel dat $d(x,a) < \delta$. Als $x \neq a$, dan geldt dat $0 < d(x,a) < \delta$, dus, wegens de geldigheid van de implicatie (1.34), $d(f(x),b) < \varepsilon$. Als $x = a$, dan geldt dat $d(f(x),b) = d(f(a),b) = d(b,b) = 0 < \varepsilon$. Voor alle $x \in \mathrm{Dom}(f)$ met $d(x,a) < \delta$ geldt dus dat $d(f(x),b) < \varepsilon$. Hieruit volgt dat $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. □

Voorbeeld 1.62 Zij $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $g(x) = 1$ voor $x \neq 0$ en door $g(0) = 0$. Dan geldt niet dat $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$, maar wel

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} g(x) = 1.$$

Opmerking 1.63 Ga met behulp van het bovenstaande lemma na dat een functie $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ continu is in $a \in \mathbb{R}^n$ dan en slechts dan als $a \in \mathrm{Dom}(f)$ en $\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = f(a)$. Gebruik van het andere limietbegrip maakt voor de definitie van continuïteit dus geen verschil.

Opmerking 1.64 In het bewijs van Lemma 1.53 in het dictaat hebben we in feite gebruik gemaakt van de voorgaande opmerking. Uit de differentieerbaarheid van f in a volgt met de productregel voor limieten dat $\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = f(a)$. Hieruit volgt weer de continuïteit van f in a.

Het lijkt alsof het in het college Infinitesimaalrekening gehanteerde limietbegrip prettiger werkt dan het door ons gehanteerde. Er is echter een belangrijk nadeel. De substitutiestelling voor limieten geldt niet zonder meer voor het limietbegrip uit het genoemde college. We lichten dit toe aan de hand van een voorbeeld.

Voorbeeld 1.65 We beschouwen de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = x\sin(1/x)$ voor $x \neq 0$ en $f(0) = 0$. Dan geldt

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = 0$$

(gebruik de insluitstelling om dit in te zien). We definiëren de functie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $g(y) = 1$ als $y \neq 0$ en door $g(0) = 0$. Dan geldt

$$\lim_{\substack{y \to 0 \\ y \neq 0}} g(y) = 1.$$

We zullen aantonen dat de volgende uitspraak niet geldig is

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} g(f(x)) = 1. \tag{1.35}$$

Dit wordt veroorzaakt door het feit dat $f(x)$ de waarde 0 blijft aannemen, hoe dicht we x ook tot 0 laten naderen. Preciezer kunnen we dit als volgt zeggen. Zij $\varepsilon = 1$ en zij $\delta > 0$ willekeurig. Dan bestaat er een positief geheel getal k met $0 < 1/2k\pi < \delta$. Voor $x = 1/2k\pi$ geldt nu $f(x) = (1/2k\pi)\sin 2k\pi = 0$, dus $g(f(x)) = g(0) = 0$, dus $d(g(f(x)), 1) = 1 \geq \varepsilon$, en dus

$$0 < d(x, 0) < \delta \quad \text{en} \quad \text{niet} \;\; d(g(f(x)), 1) < \varepsilon.$$

Voor $\varepsilon = 1$ bestaat er dus een $\delta > 0$ zo dat niet aan de gewenste implicatie (1.34) voldaan is. De uitspraak (1.35) kan dus niet waar zijn.

Hoofdstuk 2

Open en gesloten verzamelingen

2.1 Het visualiseren van functies van meer veranderlijken

Functies $f : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ kunnen we visualiseren door het schetsen van hun grafiek in het vlak. Voor functies $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}^p$ kunnen we nog steeds de grafiek graf f definiëren als deelverzameling van $\mathbb{R}^{n+p} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$:

$$\text{graf}\, f = \{(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mid u \in \text{Dom}(f), \quad v = f(u)\}. \tag{2.1}$$

Het schetsen van deze grafiek is uiteraard lastig als $n + p > 3$; de methode wordt dan ook vooral gebruikt als $n = 2$, $p = 1$. We geven een voorbeeld.

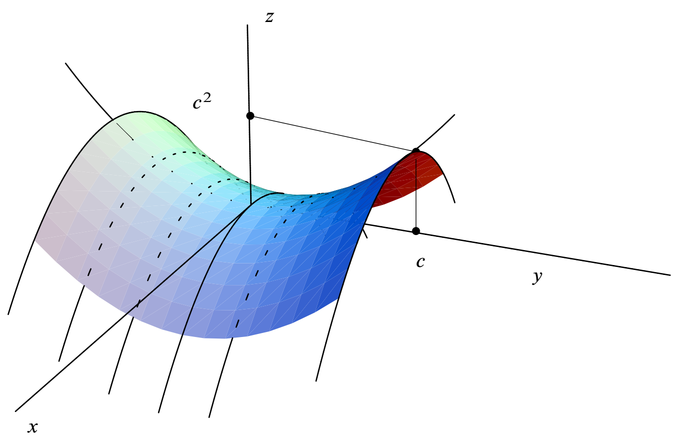
Voorbeeld 2.1 We beschouwen de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x, y) = x^2 + y^2$. De grafiek van deze functie wordt gegeven door

$$\text{graf}\, f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\},$$

of, korter gezegd, door de vergelijking $z = x^2 + y^2$ in $\mathbb{R}^3$. Herschrijven we deze vergelijking als $z = \|(x, y)\|^2$, dan zien we dat de grafiek invariant is onder rotaties rond de z-as. De doorsnijding van de grafiek met het vlak $y = 0$ wordt gegeven door $z = x^2$ en is een parabool. De grafiek van f vinden we door deze parabool rond de z-as te wentelen.

Voorbeeld 2.2 We beschouwen de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door $f(x, y) = y^2 - x^2$. De grafiek van f wordt gegeven door de vergelijking $z = y^2 - x^2$ in $\mathbb{R}^3$. De doorsnijding van deze grafiek met het vlak $y = c$ (met $c \in \mathbb{R}$ een constante) is een 'bergparabool' met top in het punt $(0, c, c^2)$. Deze toppen liggen op een 'dalparabool' in het (y, z)–vlak. De grafiek heeft dus de vorm van een zadel: zie Figuur 3. We komen later op dit voorbeeld terug.

Het gedrag van scalaire functies op $\mathbb{R}^2$ of $\mathbb{R}^3$ kan men dikwijls inzichtelijk maken door het schetsen van hun *niveauverzamelingen.*



Figuur 3: $z = y^2 - x^2$

Is $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een scalaire functie en $c \in \mathbb{R}$ een constante dan definiëren we de niveauverzameling N_c voor het niveau c door

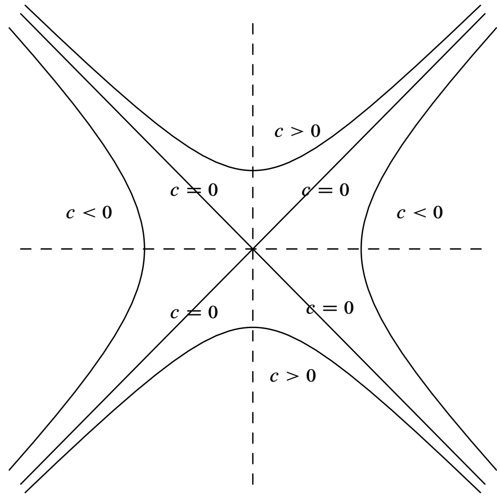
$$N_c = f^{-1}(\{c\}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in \mathrm{Dom}(f), \quad f(x) = c\}.$$

Is $n = 2$ dan spreken we van een *niveaulijn*; is $n = 3$ dan spreken we van een *niveauoppervlak.*

Voorbeeld 2.3 We beschouwen nogmaals de functie uit Voorbeeld 2.1: $f(x, y) = x^2 + y^2$. De niveauverzameling N_c wordt gegeven door de vergelijking $x^2 + y^2 = c$, is dus leeg als $c < 0$, bestaat uit één punt als $c = 0$, en is een cirkel met straal $\sqrt{c}$ als $c > 0$. Merk op dat de niveauverzameling N_c verkregen wordt door de doorsnijding van graf f met het vlak $z = c$ loodrecht te projecteren op het (x, y)-vlak (uiteraard is dit een algemeenheid).

Voorbeeld 2.4 We beschouwen nogmaals de functie $f(x, y) = y^2 - x^2$ uit Voorbeeld 2.2. De niveaulijn N_c wordt gegeven door $y^2 - x^2 = c$. Voor $c = 0$ is dit de vereniging van de lijnen $y = \pm x$. Voor $c > 0$ is N_c een hyperbool in het gebied $|x| < |y|$ (het gearceerde deel in Figuur 4), en voor $c < 0$ is N_c een hyperbool in het gebied $|x| > |y|$. In het bijzonder ziet men dat f strikt groter dan nul is in op de verzameling $|x| < |y|$, en strikt kleiner dan nul op de verzameling $|x| > |y|$.

Voorbeeld 2.5 We beschouwen de functie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x, y, z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2$, met gegeven constanten $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Het niveauoppervlak N_c wordt gegeven door de vergelijking $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = c$. Het is leeg als $c < 0$, bestaat uit de oorsprong als $c = 0$, en is een ellipsoïde als $c > 0$. Meer inzicht in de structuur van N_c voor $c > 0$ verkrijgt men



Figuur 4: Niveaulijnen $y^2 - x^2 = c$

door de lineaire afbeelding $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ te beschouwen die gegeven wordt door de volgende diagonaalmatrix ten aanzien van de standaardbases:

$$\operatorname{mat} L = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{c}{\alpha}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{c}{\beta}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{c}{\gamma}} \end{pmatrix}.$$

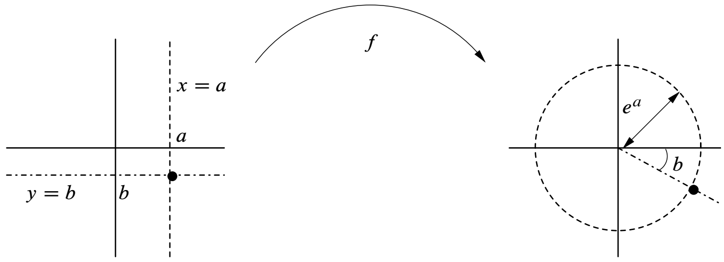
Men gaat gemakkelijk na dat N_c gegeven door $\|L^{-1}(x, y, z)\| = 1$; m.a.w. N_c is het beeld van de eenheidssfeer $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ onder de lineaire afbeelding L.

Tenslotte beschouwen we nog het geval van een afbeelding $f : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}^2$. Het gedrag van zo'n afbeelding kan soms inzichtelijk gemaakt worden door de beelden van de lijnen $x = a$ en $y = b$ (of andere –eventueel gekromde– lijnen) te bestuderen. Als voorbeeld beschouwen we een afbeelding die later een belangrijke rol zal spelen bij de behandeling van de complexe exponentiële functie.

Voorbeeld 2.6 Laat $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gedefinieerd zijn door $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Deze afbeelding beeldt de lijn $x = a$ af op de verzameling

$$C_a = \{(e^a \cos y, e^a \sin y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Dit is de cirkel met middelpunt 0 en straal e^a. Laat men y de gehele $\mathbb{R}$ in positieve richting doorlopen, dan doorloopt het beeld $f(a, y)$ de cirkel C_a oneindig vaak in positieve zin. Daarbij wordt ieder lijnstuk $[b, b + 2\pi[$ ($b \in \mathbb{R}$) bijectief op C_a afgebeeld.



Figuur 5: $\quad f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$

De afbeelding f beeldt de lijn $y = b$ af op de verzameling:

$$R_b = \{e^x(\cos b, \sin b) \mid x \in \mathbb{R}\};$$

dit is de open halfrechte vanuit de oorspong door het punt $(\cos b, \sin b)$ van de eenheidscirkel. Merk op dat f de lijn $y = b$ bijectief afbeeldt op R_b. Zie Figuur 5.

2.2 Continuïteit en topologie

Laat $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een continue functie zijn. In de voorbeelden van de vorige paragraaf is u wellicht opgevallen dat iedere niveauverzameling $N_c = f^{-1}(\{c\})$, voor $c \in \mathbb{R}$, de eigenschap heeft dat N_c elk van zijn limietpunten bevat. Deze eigenschap van een verzameling zal voor de analyse zo belangrijk blijken te zijn, dat we hem een aparte naam geven.

Definitie 2.7 (Gesloten verzameling) Een verzameling $A \subset \mathbb{R}^n$ heet *gesloten* als ieder limietpunt van A tot A behoort.

Opmerking 2.8 De collectie limietpunten van A wordt genoteerd met $\overline{A}$, zie Definitie 1.20. Geslotenheid van A is dus gelijkwaardig met $\overline{A} \subset A$. Aangezien altijd geldt dat $A \subset \overline{A}$, zie Opmerking 1.21, zien we dat geslotenheid als volgt te karakteriseren is.

$$A \text{ is gesloten} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = \overline{A}.$$

We formuleren de hierboven gemaakt observatie over niveauverzamelingen nu in een lemma.

Lemma 2.9 *Laat $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een continue functie zijn. Dan geldt voor iedere $c \in \mathbb{R}$ dat de niveauverzameling $N_c = f^{-1}(\{c\})$ gesloten is.*

Bewijs: Zij $a \in \mathbb{R}^n$ een punt van $\mathbb{R}^n$ dat niet tot N_c behoort. We zullen aantonen dat een dergelijk punt geen limietpunt van N_c is. Schrijf $b = f(a)$. Dan is $b \neq c$. Derhalve is $\varepsilon := d(b, c) > 0$. We merken op dat $c \notin B(b; \varepsilon)$. (De laatste verzameling is in deze situatie gelijk aan $]\, b - \varepsilon, b + \varepsilon\, [$.)

Uit de continuïteit van f in a volgt dat $\lim_{x \to a} f(x) = b$, dus er bestaat een $\delta > 0$ zo dat $f(B(a;\delta)) \subset B(b;\varepsilon)$. Hieruit volgt dat $c \notin f(B(a;\delta))$, dus $B(a;\delta) \cap N_c = \emptyset$. We concluderen dat a geen limietpunt is van N_c.

Uit het bovenstaande volgt dat ieder punt van $\mathbb{R}^n \setminus N_c$ geen limietpunt van N_c is. Hieruit volgt weer dat ieder limietpunt van N_c tot N_c behoort. De verzameling N_c is dus gesloten. $\square$

Opmerking 2.10 Het kan voorkomen dat c in het geheel niet als waarde van f optreedt, dus dat $N_c = \emptyset$. Blijkbaar is de lege verzameling gesloten. Dit is ook te zien uit de definitie: aangezien $\emptyset$ geen limietpunten heeft, geldt iedere uitspraak voor elk limietpunt a van $\emptyset$, in het bijzonder de uitspraak $a \in \emptyset$.

Lemma 2.9 heeft als beperking dat het alleen van toepassing is op functies $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ met als domein $\mathbb{R}^n$. Als voorbeeld van wat er kan gebeuren als $\mathrm{Dom}(f) \neq \mathbb{R}^n$ beschouwen we de functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrowtail \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Het domein van deze functie wordt gegeven door $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. De niveauverzameling N_0 bestaat uit de punten $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ met $xy = 0$, dus $x = 0$ of $y = 0$. We merken op dat de oorsprong $0 = (0, 0)$ een limietpunt is van N_0 : immers voor iedere $\delta > 0$ geldt dat $B(0;\delta) \cap N_0$ (bijvoorbeeld) het punt $(\frac{1}{2}\delta, 0)$ bevat, dus niet leeg is. Echter $0 \notin N_0$, dus N_0 is niet gesloten in $\mathbb{R}^2$. We merken tegelijkertijd op dat ieder *in* $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ *gelegen limietpunt van* N_0 *wel tot* N_0 *behoort.* In deze zin is N_0 gesloten *in* $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Is algemener V een deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ dan kan men, voor een deelverzameling $A \subset V$, spreken over limietpunten van A in V en over geslotenheid van A in V. Voor een continue functie $f : V \to \mathbb{R}$ geldt dan dat iedere niveauverzameling N_c gesloten is in V, maar niet noodzakelijkerwijs in $\mathbb{R}^n$.

Wij zullen de terminologie 'gesloten zijn in' in de volgende paragraaf behandelen in een grotere algemeenheid, namelijk die van een metrische ruimte. Met dit begrip worden als het ware precies die eigenschappen onder de loep genomen die nodig zijn voor het formuleren van begrippen als geslotenheid, limiet en continuïteit.

De ontwikkelde theorie zal later ook in andere situaties toepasbaar blijken te zijn.

2.3 Metrische ruimten

Definitie 2.11 Zij V een verzameling. Onder een *afstand* of *metriek* op V verstaan we een afbeelding $d : V \times V \to \mathbb{R}$ met de volgende eigenschappen, voor alle $x, y, z \in V$,

(a) $d(x, y) \geq 0$, voorts: $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

(b) $d(x, y) = d(y, x)$ (symmetrie);

(c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (driehoeksongelijkheid).

Onder een *metrische ruimte* verstaan we een paar (V, d) met V een verzameling en d een metriek op V.

Voorbeeld 2.12 Uit Lemma 1.10 volgt dat $\mathbb{R}^n$, voorzien van de Euclidische afstand d, een metrische ruimte is. Is V een deelverzameling van $\mathbb{R}^n$, dan voldoet de beperking d_V van d tot $V \times V$ aan de bovenstaande eigenschappen $(a) - (c)$, voor alle $x, y, z \in V$. Derhalve is d_V een metriek op V, die we de geïnduceerde metriek zullen noemen. Iedere deelverzameling van $\mathbb{R}^n$, voorzien van de geïnduceerde metriek, is aldus weer een metrische ruimte.

Voorbeeld 2.13 Is (W, d) een metrische ruimte en $V \subset W$ een deelverzameling, dan is de beperking $d_V := d|_{V \times V}$ een metriek op V die we de op V geïnduceerde metriek zullen noemen.

Voorbeeld 2.14 Is E een lineaire ruimte over $\mathbb{R}$, dan verstaan we onder een norm op E een afbeelding $x \mapsto \|x\|$, $E \to \mathbb{R}$ die voldoet aan de eigenschappen (a) - (c) van Lemma 1.3, voor alle $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Is $\| \cdot \|$ een norm op E, dan gaat men gemakkelijk na dat door $d(x, y) = \|x - y\|$, voor $x, y \in E$, een metriek op E gedefinieerd wordt.

Blijkens Lemma 1.3 is de Euclidische norm een norm op $\mathbb{R}^n$ een voorbeeld van de zojuist genoemde structuur; de bijbehorende metriek is de Euclidische afstand.

Het limiet- en continuïteitsbegrip zijn op natuurlijke wijze uit te breiden tot afbeeldingen tussen metrische ruimten. Door in Definitie 1.12 de ruimten $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ te vervangen door metrische ruimten V respectievelijk W verkrijgen we de volgende definitie.

Definitie 2.15 Laat (V, d_V) en (W, d_W) metrische ruimten zijn, $f : V \rightarrowtail W$ een afbeelding, $a \in V$ en $b \in W$. Men zegt dat f in a de limiet b heeft, notatie

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

als voor ieder positief reëel getal $\varepsilon > 0$ een positief reëel getal $\delta > 0$ bestaat met de volgende eigenschap:

$$\text{als} \quad x \in \mathrm{Dom}(f) \quad \text{en} \quad d_V(x, a) < \delta \quad \text{dan} \quad d_W(f(x), b) < \varepsilon. \tag{2.2}$$

Men zegt ook wel dat $f(x)$ convergeert naar b als x naar a gaat, in formule: $f(x) \to b$ als $x \to a$.

De uitspraak (2.2) kan men weer op meetkundige wijze formuleren als

$$f(\mathrm{Dom}(f) \cap B_V(a; \delta)) \subset B_W(b; \varepsilon),$$

waarin de voorkomende ‘open bollen’ als volgt gedefinieerd zijn.

Definitie 2.16 Zij (V, d) een metrische ruimte, $a \in V$, $r > 0$. Onder de open *bol* in V met middelpunt a en straal r verstaan we de verzameling $B_V(a; r) = B(a; r)$ gedefinieerd door

$$B(a; r) := \{x \in V \mid d(x, a) < r\}.$$

In termen van het limietbegrip kan men continuïteit van afbeeldingen tussen metrische ruimten als volgt definiëren.

Definitie 2.17 Laat V en W metrische ruimten zijn. Een functie $f : V \rightarrowtail W$ heet continu in een punt $a \in V$ als $a \in \mathrm{Dom}(f)$ en bovendien:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

De functie f heet *continu op een verzameling* $A \subset V$ als f continu is in elk punt $a \in A$. De functie f heet continu als hij continu is op $\mathrm{Dom}(f)$.

Vele in § 1.2, 1.3, 1.4 en 1.5 genoemde stellingen gaan door in de algemenere context van metrische ruimten. In de volgende paragraaf zijn al die resultaten op een rij gezet. De bewijzen gaan veelal zonder wijzigingen door in de nieuwe situatie. In de huidige paragraaf concentreren wij ons op de eigenschappen van deelverzamelingen van een metrische ruimte die een goed gedrag hebben ten aanzien van continue afbeeldingen. Dergelijke eigenschappen worden *topologische eigenschappen* genoemd (naar het Griekse woord 'topos' voor plaats).

Definitie 2.18 Zij (V, d) een metrische ruimte, en A een deelverzameling van V. Een punt $p \in V$ heet een *limietpunt* van A als voor iedere $\delta > 0$ de doorsnede $B(p; \delta) \cap A$ niet leeg is. De collectie van alle limietpunten van A in V heet de *afsluiting* van A in V en wordt genoteerd met $\overline{A}$.

De deelverzameling A heet *gesloten* als ieder limietpunt van A tot A behoort.

Voorbeeld 2.19 (a) De verzamelingen $\emptyset$ en V zijn gesloten.

(b) Zijn $p, q \in \mathbb{R}$ met $p < q$, dan is het interval $I = [p, q]$ gesloten. We tonen dit als volgt aan. Zij $a \in \mathbb{R}$ en $a \notin I$. Het is nu voldoende aan te tonen dat a geen limietpunt van I is. Er geldt dat $a < p$ of $a > q$. We behandelen het eerste geval, het tweede gaat analoog. Zij $\delta = p - a$. Dan is $\delta > 0$. Voorts geldt voor alle $x \in B(a; \delta) =]\, a - \delta, a + \delta\, [$ dat $x < a + \delta = p$. Hieruit blijkt dat $B(a; \delta) \cap I = \emptyset$, dus a is geen limietpunt van I.

Lemma 2.20 *Zij V een metrische ruimte en $a \in V$. Dan is de verzameling $\{a\}$ gesloten in V.*

Bewijs: Zij $p \in V$ een limietpunt van $\{a\}$. Dan geldt voor iedere $\delta > 0$ dat $B(p; \delta) \cap \{a\} \neq \emptyset$, dus $a \in B(p; \delta)$, dus $d(a, p) < \delta$. Uit het feit dat de laatste ongelijkheid geldt voor alle $\delta > 0$ volgt dat $d(a, p) = 0$. Hieruit volgt dat $p = a \in \{a\}$. Ieder limietpunt van $\{a\}$ behoort dus tot $\{a\}$. □

Opmerking 2.21 Is V een deelverzameling van $\mathbb{R}^n$, dan veronderstellen we steeds dat V voorzien is van de door de Euclidische metriek geïnduceerde metriek, tenzij anders vermeld. Is $A \subset V$, dan kunnen we spreken over limietpunten van A in V, de afsluiting van A in V, en geslotenheid van A in V.

Nu volgt tenslotte de beloofde generalisatie van Lemma 2.9, die zoals gezegd in het bijzonder van toepassing is op functies $f : V \to \mathbb{R}$ met $V \subset \mathbb{R}^n$.

Lemma 2.22 *Laat V en W metrische ruimten zijn en $f : V \to W$ een continue afbeelding. Dan is voor iedere $c \in W$ het volledige origineel $N_c := f^{-1}(\{c\})$ gesloten in V.*

Bewijs: Het bewijs ontstaat uit dat van Lemma 2.9 door overal $\mathbb{R}^n$ te vervangen door V, en door de opmerking tussen haakjes te laten vervallen. (Bestudeer het bewijs dat zo ontstaat, en vergewis u er van dat u het er mee eens bent.) □

Het bovenstaande resultaat is weer een speciaal geval van een nog algemener resultaat; zie Opmerking 2.31. Voordat we dit formuleren voeren we eerst het begrip open verzameling in.

Definitie 2.23 Zij V een metrische ruimte en A een deelverzameling van V. Een punt $a \in A$ heet een *inwendig punt* van A indien er een $\delta > 0$ bestaat zo dat $B(a; \delta) \subset A$. De collectie van inwendige punten van A heet het *inwendige* van A en wordt genoteerd met $\operatorname{inw} A$. De verzameling A heet *open* indien ieder punt van A een inwendig punt van A is.

Opmerking 2.24 Aangezien blijkens de bovenstaande definitie altijd geldt $\operatorname{inw} A \subset A$, zien we dat A open is dan en slechts dan als $A = \operatorname{inw} A$.

Voorbeeld 2.25 (a) Is V een metrische ruimte, dan zijn $\emptyset$ en V open verzamelingen.

(b) Ieder open interval $I \subset \mathbb{R}$ is open. We tonen dit aan. Het interval I is van de vorm $]\,p, q\,[$, met $p \in \mathbb{R}$ of $p = -\infty$ en $q \in \mathbb{R}$ of $q = +\infty$; voorts geldt $p < q$. Zij $a \in I$. Uit $p < a < q$ volgt het bestaan van een $\delta_1 > 0$ zo dat $p < a - \delta_1$ en van een $\delta_2 > 0$ zo dat $a + \delta_2 < q$. Kies $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Dan is $\delta > 0$ en $B(a; \delta) =]\,a - \delta, a + \delta\,[\subset I$. Hieruit blijkt dat a een inwendig punt van I is. Ieder punt van I is dus een inwendig punt.

(c) Is $r > 0$ dan is de open bol $B(0; r)$ open in $\mathbb{R}^n$. Dit is een speciaal geval van het onderstaande lemma.

Lemma 2.26 *Zij V een metrische ruimte, $a \in V$ en $r > 0$. Dan is de bol $B(a; r)$ open in V.*

Bewijs: Zij $p \in B(a; r)$. Dan is $d(a, p) < r$. Zij $\delta := r - d(a, p)$. Dan is $\delta > 0$. Voor alle $x \in B(p; \delta)$ geldt: $d(a, x) \leq d(a, p) + d(p, x) < d(a, p) + \delta = r$. Hieruit blijkt dat $B(p; \delta) \subset B(a; r)$. Ieder punt $p \in B(a; r)$ is dus een inwendig punt van $B(a; r)$. □

Opmerking 2.27 (Waarschuwing) Een verzameling die niet open is, hoeft beslist niet gesloten te zijn.

Als voorbeeld beschouwen we de verzameling $I = [\,0, 1\,[$, opgevat als deelverzameling van de metrische ruimte $\mathbb{R}$. Het punt 0 behoort tot I, maar is geen inwendig punt. Immers, voor iedere $\delta > 0$ geldt dat $B(0; \delta) =]\,-\delta, \delta\,[$ niet bevat is in I. We zien dat I niet open is.

Anderzijds is I ook niet gesloten. Immers is $\delta > 0$, dan is $B(1; \delta) =]\,1 - \delta, 1 + \delta\,[$. Deze verzameling heeft een niet lege doorsnede met I; zo is bijvoorbeeld $1 - \frac{\delta}{2}$ bevat in die doorsnede. Hieruit volgt dat 1 een limietpunt van I is, maar niet tot I behoort. We concluderen dat I noch open, noch gesloten is.

De begrippen open en gesloten zijn wel complementair in de volgende zin. Is V een verzameling en $A \subset V$ een deeverzameling, dan definiëren we het complement van A in V door

$$V \setminus A := \{x \in V \mid x \notin A\}.$$

Zie Appendix B voor verdere details.

Lemma 2.28 *Zij V een metrische ruimte, $A \subset V$, en $B = V \setminus A$. Dan zijn de volgende beweringen gelijkwaardig.*

(a) *De verzameling A is gesloten in V;*

(b) *De verzameling B is open in V.*

Bewijs: Veronderstel eerst dat (a) geldt. Zij $b \in B$ willekeurig. Dan is b niet bevat in A, dus ook geen limietpunt van A. Derhalve bestaat er een $\delta > 0$ zo dat $B(b; \delta) \cap A = \emptyset$. Voor iedere $x \in B(b; \delta)$ geldt derhalve $x \notin A$, dus $x \in B$. We concluderen dat $B(b; \delta) \subset B$, dus b is een inwendig punt van B. We concluderen dat (b) geldt.

Veronderstel nu omgekeerd dat (b) geldt, en zij $p \in V$ een limietpunt van A. Dan geldt voor iedere $\delta > 0$ dat $B(p; \delta) \cap A \neq \emptyset$, waaruit volgt dat $B(p; \delta)$ niet bevat is in B. We concluderen dat p geen inwendig punt is van B. Omdat B open is, is p niet bevat in B, dus wel in het complement A. Ieder limietpunt van A behoort dus tot A, en we concluderen dat (a) geldt. $\square$

We behandelen nog een nuttige stelling over doorsneden en verenigingen van open en gesloten verzamelingen.

Lemma 2.29 *Laat V een metrische ruimte zijn.*

(a) *De doorsnede van ieder eindig stel open deelverzamelingen van V is weer open.*

(b) *De vereniging van ieder stel open deelverzamelingen van V is open.*

(c) *De vereniging van ieder eindig stel gesloten deelverzamelingen van V is gesloten.*

(d) *De doorsnede van ieder stel gesloten deelverzamelingen van V is gesloten.*

Bewijs: Voor (a) veronderstellen we eerst dat O_1 en O_2 open deelverzamelingen van V zijn. Zij $a \in O_1 \cap O_2$ willekeurig. Dan $a \in O_1$. Omdat O_1 open is, is a een inwendig punt van O_1; er bestaat dus een $\delta_1 > 0$ zo dat $B(a; \delta_1) \subset O_1$. Op dezelfde wijze volgt het bestaan van een $\delta_2 > 0$ zo dat $B(a; \delta_2) \subset O_2$. Zij $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Dan is $\delta > 0$; voorts is $B(a; \delta) \subset B(a; \delta_1) \subset O_1$ en $B(a; \delta) \subset B(a; \delta_2) \subset O_2$. We concluderen dat $B(a; \delta) \subset O_1 \cap O_2$. Ieder punt van $O_1 \cap O_2$ is dus inwendig; de gegeven doorsnede is derhalve open. Door herhaald toepassen van het zojuist bewezen resultaat volgt (a).

Nu (b). Zij $\{O_i \mid i \in I\}$ een collectie van open deelverzamelingen van V, geparametriseerd door een index verzameling I (hieraan leggen we geen enkele beperking op, I mag een oneindige verzameling zijn). Zij $O := \cup_{i \in I} O_i$ de vereniging van de collectie. We zullen aantonen dat $\mathcal{O}$ open is. Zij $a \in O$ willekeurig. Dan is er een $i \in I$ zo dat $a \in O_i$. De verzameling O_i is open, dus a is een inwendig punt van O_i. Er bestaat daarom een $\delta > 0$ zo dat $B(a; \delta) \subset O_i$. De laatste verzameling is bevat in de vereniging O, en we concluderen dat a een inwendig punt is van O. Hieruit volgt (b).

Voor het bewijs van (c) en (d) veronderstellen we dat een collectie $\{S_j \mid j \in J\}$ van gesloten deelverzamelingen van V gegeven is; hierin is J een of andere index verzameling. De verzamelingen $V \setminus S_j$ zijn open, wegens Lemma 2.28.

Wegens (b) is de vereniging van de verzamelingen $V \setminus S_j$ open. Anderzijds geldt

$$\bigcup_{j \in J} V \setminus S_j = V \setminus \bigcap_{j \in J} S_j,$$

zie Appendix B, en wegens Lemma 2.28 concluderen we dat de doorsnede van de verzamelingen S_j, voor $j \in J$, gesloten is in V. We concluderen dat (d) geldt.

Is tenslotte J eindig, dan is wegens (a) de doorsnede van de verzamelingen $V \setminus S_j$ open. Maar

$$\bigcap_{j \in J} V \setminus S_j = V \setminus \bigcup_{j \in J} S_j,$$

zie Appendix B, dus wegens Lemma 2.28 is de vereniging van de verzamelingen S_j, voor $j \in J$ gesloten. We concluderen dat (c) geldt. □

We behandelen tenslotte de beloofde tweede generalisatie van Lemma 2.22.

Lemma 2.30 *Laat V, W metrische ruimten zijn en $f : V \to W$ een afbeelding. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

(a) *De afbeelding f is continu.*

(b) *Voor iedere open deelverzameling $O \subset W$ geldt dat $f^{-1}(O)$ open is in V.*

(c) *Voor iedere gesloten deelverzameling $S \subset W$ geldt dat $f^{-1}(S)$ gesloten is in V.*

Bewijs: '(a) ⇒ (b)': Veronderstel dat f continu is en laat $O \subset W$ een open deel zijn. Volgens de definitie van open verzameling moeten we aantonen dat ieder punt van $f^{-1}(O)$ een inwendig punt is. Dit doen we als volgt. Zij $a \in f^{-1}(O)$. Dan is $f(a) \in O$; dit is een inwendig punt van O aangezien O open is. Er bestaat dus een $\varepsilon > 0$ zo dat $B(f(a); \varepsilon) \subset O$. Wegens de continuïteit van f bestaat er een $\delta > 0$ zo dat $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \varepsilon) \subset O$, dus $B(a; \delta) \subset f^{-1}(O)$. Het punt a is derhalve een inwendig punt van $f^{-1}(O)$.

'(b) ⇒ (a)': Veronderstel dat (b) geldt en zij $a \in V$. Het is dan voldoende aan te tonen dat f continu is in a, d.w.z. dat

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \tag{2.3}$$

Zij $\varepsilon > 0$. Dan is $B(f(a); \varepsilon)$ een open deel van W, dus wegens (b) is het volledig origineel $U := f^{-1}(B(f(a); \varepsilon))$ een open deel van V. Nu is $a \in U$, dus a is een inwendig punt van U; er bestaat derhalve een $\delta > 0$ zo dat $B(a; \delta) \subset U$. Hieruit volgt dat $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \varepsilon)$. We concluderen dat (2.3) geldt.

We voltooien het bewijs door aan te tonen dat (b) gelijkwaardig is met (c).

'(b) $\Rightarrow$ (c)': Stel (b). Zij S een gesloten deel van W. Dan is $W \setminus S$ open in W (Lemma 2.28), dus $f^{-1}(W \setminus S)$ is open in V; nu is $f^{-1}(W \setminus S) = V \setminus f^{-1}(S)$, zie Appendix B, dus $f^{-1}(S)$ is gesloten in V. We concluderen dat (c) geldt.

'(c) $\Rightarrow$ (b)': Stel (c). Zij $O \subset W$ een open deel. Dan is $W \setminus O$ gesloten in W, dus $f^{-1}(W \setminus O)$ is gesloten in V. Nu is $f^{-1}(W \setminus O) = V \setminus f^{-1}(O)$, dus $f^{-1}(O)$ is open in V. Derhalve geldt (b). $\square$

Opmerking 2.31 Het bovenstaande resultaat is inderdaad een generalisatie van Lemma 2.22. Want zij $f : V \to W$ continu, en zij $c \in W$. Dan is de verzameling $\{c\}$ gesloten, zie Lemma 2.20. Wegens het bovenstaande resultaat is dan ook $f^{-1}(\{c\})$ gesloten in V.

Voorbeelden 2.32 (a) We beschouwen de eenbladige hyperboloïde H in $\mathbb{R}^3$ die gegeven wordt door de vergelijking
$$H : \quad x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$
Met behulp van het bovenstaande zien we gemakkelijk in dat deze hyperboloïde een gesloten deelverzameling is van $\mathbb{R}^3$. Immers, de functie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, is continu. De verzameling $\{1\}$ is gesloten in $\mathbb{R}$, dus $H = f^{-1}(\{1\})$ is gesloten in $\mathbb{R}^3$.

(b) We beschouwen het deel G van $\mathbb{R}^3$ bestaande uit de punten (x, y, z) met $x^2 + y^2 < 1$, $z > 0$ en $x + y + z < 3$ (een scheef afgesneden cilinder). Door het bovenstaande te gebruiken zien we gemakkelijk in dat de verzameling G open is. Immers de functies $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f_1(x, y, z) = x^2 + y^2$, $f_2(x, y, z) = z$ en $f_3(x, y, z) = x + y + z$ zijn continu. Nu is $G = U_1 \cap U_2 \cap U_3$, waarbij
$$U_1 = f_1^{-1}(]-\infty, 1[), \quad U_2 = f_2^{-1}(]0, \infty[), \quad U_3 = f_3^{-1}(]-\infty, 3[).$$
De verzamelingen U_i $(1 \leq i \leq 3)$ zijn volledige originelen van open deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ onder continue afbeeldingen, dus open in $\mathbb{R}^3$. Hun (eindige) doorsnede G is derhalve ook open.

2.4 Rekenregels voor limieten in metrische ruimten

Hieronder geven we een lijst van generalisaties van stellingen uit de paragrafen 1.2, 1.3, 1.4 en 1.5, naar de context van metrische ruimten. De bewijzen van de oorspronkelijke stellingen zijn steeds met zorg zo opgeschreven dat ze alleen gebruik maken van de structuur van de metrische ruimten; daarom gaan ze *zonder enige wijziging* door in de nieuwe situatie. In deze zin is de nieuwe situatie een zuinige formulering van de oorspronkelijke, zonder gebruik van overbodige structuur. Later zullen we voorbeelden van metrische ruimten buiten de context van $\mathbb{R}^n$ tegenkomen, zoals functieruimten. De hieronder geformuleerde stellingen zullen ook in die context geldig zijn.

Hieronder zetten we de generalisaties op een rij, genummerd volgens het nummer van de oorspronkelijke stelling, voorzien van een accent.

Hieronder zijn U, V, W steeds metrische ruimten. Voorts is E een genormeerde lineaire ruimte, d.w.z. een reële lineaire ruimte voorzien van een norm $\|\cdot\|$, zie Opmerking 1.4 (b).

Resultaten uit § 1.2

Lemma 1.16' Zij $f : V \rightarrowtail W$, $a \in V$ en $b \in W$. Dan zijn de volgende beweringen gelijkwaardig.

(a) $\lim_{x\to a} f(x) = b$;

(b) $\lim_{x\to a} d(f(x), b) = 0$.

Lemma 1.22' (Eenduidigheid van de limiet) Zij $f : V \rightarrowtail W$ en a een limietpunt van $\mathrm{Dom}(f)$. Veronderstel dat $b, c \in W$ en dat

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{en} \quad \lim_{x\to a} f(x) = c.$$

Dan $b = c$.

Resultaten uit § 1.3

Lemma 1.24' (Eenvoudige limieten)

(a) Zij $f : V \rightarrowtail W$ een afbeelding die constant is, d.w.z., er bestaat een $c \in W$ zo dat $f(x) = c$ voor alle $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Dan geldt, voor elke $a \in V$, dat $\lim_{x\to a} f(x) = c$.

(b) Zij $a \in V$. Dan is $\lim_{x\to a} x = a$.

Lemma 1.25' (Somregel) Laat $f : V \rightarrowtail E$ en $g : V \rightarrowtail E$ functies zijn, en $a \in V$ en $b, c \in E$ punten.

$$\text{Als} \quad \lim_{x\to a} f(x) = b \quad \text{en} \quad \lim_{x\to a} g(x) = c \quad \text{dan} \quad \lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = b + c.$$

Lemma 1.26' (Productregel) Laat $f : V \rightarrowtail \mathbb{R}$ en $g : V \rightarrowtail E$ functies zijn, en $a \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $b \in E$.

$$\text{Als} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \lambda \quad \text{en} \quad \lim_{x\to a} g(x) = b, \quad \text{dan} \quad \lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lambda b.$$

Lemma 1.28' (Quotiëntregel) Laat $f : V \rightarrowtail \mathbb{R}$ een functie zijn, $a \in V$ en $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0$.

$$\text{Als} \quad \lim_{x \to a} f(x) = \lambda, \quad \text{dan} \quad \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lambda}.$$

Lemma 1.30' Laat $f : V \rightarrowtail \mathbb{R}^m$ een functie zijn, en $a \in V$ en $b \in \mathbb{R}^m$ punten. Dan zijn de volgende beweringen gelijkwaardig.

(a) $\lim_{x \to a} f(x) = b$;

(b) voor elke $1 \leq j \leq m$ geldt $\lim_{x \to a} f_j(x) = b_j$.

Lemma 1.32' (Substitutieregel) Laat $f : U \rightarrowtail V$ en $g : V \rightarrowtail W$ afbeeldingen zijn, en $a \in U, b \in V$ en $c \in W$ punten.

$$\text{Als} \quad \lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{en} \quad \lim_{y \to b} g(y) = c, \quad \text{dan} \quad \lim_{x \to a} g(f(x)) = c.$$

Resultaten uit § 1.4

Lemma 1.33' (Behoud van ongelijkheden bij limieten) Zij $D \subset V$ en a een limietpunt van D. Laat $f, g : D \to \mathbb{R}$ functies zijn en veronderstel dat $\lim_{x \to a} f(x) = b$ en $\lim_{x \to a} g(x) = c$, met $b, c \in \mathbb{R}$.

Als $f(x) \leq g(x)$ voor alle $x \in D$, dan geldt ook: $b \leq c$.

Lemma 1.35' (Insluitstelling) Zij $D \subset V$, en $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ een drietal functies met $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ voor alle $x \in D$. Veronderstel dat $a \in V$ en dat er een $\lambda \in \mathbb{R}$ bestaat met

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lambda \quad \text{en} \quad \lim_{x \to a} h(x) = \lambda.$$

Dan geldt ook

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lambda.$$

Resultaten uit § 1.5

Lemma 1.41' Zij $f = (f_1, \ldots, f_m) : V \to \mathbb{R}^m$ een functie, en $a \in V$ een punt. Dan zijn de volgende uitspraken gelijkwaardig.

(a) De functie f is continu in a;

(b) Voor iedere $1 \leq j \leq m$ is de functie f_j continu in a.

Lemma 1.43' Laat $f, g : V \rightarrowtail E$ functies zijn en $a \in V$ een punt. Als f en g continu zijn in a, dan is de somfunctie $f + g$ dat ook.

Lemma 1.44' Laat $f : V \rightarrowtail \mathbb{R}$ en $g : V \rightarrowtail E$ functies zijn, en $a \in V$ een punt.

(a) Als f en g continu zijn in a, dan is fg dat ook.

(b) Als f continu is in a en als bovendien $f(a) \neq 0$, dan is ook de functie $1/f : x \mapsto 1/f(x)$ continu in a.

Lemma 1.47' Laat $f : U \rightarrowtail V$ en $g : V \rightarrowtail W$ afbeeldingen zijn. Is f continu in a en g continu in $f(a)$, dan is de samenstelling $g \circ f$ continu in a. Zijn f en g continu op hun domein, dan is ook $g \circ f$ continu op zijn domein.

2.5 Appendix: verzamelingen en afbeeldingen

In deze appendix geven we een overzicht van enige verzamelingstheoretische bewerkingen. Het volgende resultaat is zo vanzelfsprekend, dat we het geven zonder bewijs. We noemen het expliciet omdat het vaak gebruikt wordt om de gelijkheid van twee verzamelingen aan te tonen.

Lemma 2.33 *Zij V een verzameling, en $A \subset V$ en $B \subset V$ deelverzamelingen. Dan zijn de volgende twee uitspraken equivalent.*

(a) $A = B$;

(b) $A \subset B$ *en* $B \subset A$.

Laat V een verzameling zijn, en A en B deelverzamelingen. We definiëren *de verschilverzameling $A \setminus B$* door

$$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Onder *het complement* van A in V verstaan we de verschilverzameling $V \setminus A$.

Lemma 2.34 *Het complement van $V \setminus A$ in V is A; in formule $V \setminus (V \setminus A) = A$.*

Bewijs: Zij $x \in V \setminus (V \setminus A)$, dan $x \in V$ en $x \notin V \setminus A$. Uit de laatste bewering volgt dat niet $x \notin A$, dus $x \in A$. We concluderen dat $V \setminus (V \setminus A)$ bevat is in A. Om de omgekeerde inclusie aan te tonen, veronderstellen we dat $x \in A$. Hiervoor geldt $x \notin V \setminus A$, dus $x \in V \setminus (V \setminus A)$. We concluderen dat $A \subset V \setminus (V \setminus A)$. Uit de twee aangetoonde inclusies volgt de gelijkheid $V \setminus (V \setminus A) = A$. □

We onderzoeken nu het gedrag van doorsnede en vereniging ten aanzien van verschilname. Laat I een of andere verzameling zijn, en laat voor iedere $i \in I$ een deelverzameling B_i van V gegeven zijn. We noemen I om begrijpelijke redenen de *indexverzameling* van de collectie $\{B_i \mid i \in I\}$ van deelverzamelingen van V. We laten hier in het midden wat het precieze karakter van de indexverzameling I is. In concrete situaties komt men tegen dat $I = \{1, 2, \dots, n\}$, maar ook dat $I = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ en zelfs dat I gelijk is aan de gesloten eenheidsbol in $\mathbb{R}^n$.

De vereniging van de verzamelingen B_i, voor $i \in I$, wordt gedefinieerd door

$$\bigcup_{i \in I} B_i = \{x \in V \mid \exists i \in I : \ \ x \in B_i\}$$

De doorsnede van de verzamelingen B_i, voor $i \in I$, wordt gedefinieerd door

$$\bigcap_{i \in I} B_i = \{x \in V \mid \forall i \in I : \ \ x \in B_i\}.$$

Lemma 2.35 *Zij V een verzameling, A een deelverzameling en $\{B_i \mid i \in I\}$ een collectie deelverzamelingen van V. Dan geldt:*

(a) $A \setminus \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A \setminus B_i)$;

(b) $A \setminus \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \setminus B_i)$.

Bewijs: (a): Zij $x \in A \setminus \cup_{i \in I} B_i$. Dan is $x \in A$ en er is geen $i \in I$ zo dat $x \in B_i$. Voor alle $i \in I$ geldt derhalve $x \notin B_i$, dus $x \in A \setminus B_i$. We concluderen dat $x \in \cap_{i \in I} A \setminus B_i$. Hieruit volgt dat de verzameling in het linkerlid bevat is in die in het rechterlid. We tonen ook de omgekeerde inclusie aan. Zij $x \in \cap_{i \in I} A \setminus B_i$. Dan geldt dat $x \in A$ en voor iedere $i \in I$ dat $x \notin B_i$. Het is dus niet zo dat er een $i \in I$ bestaat met $x \in B_i$, ofwel, x behoort niet tot $\cup_{i \in I} B_i$. We concluderen dat ook de omgekeerde inclusie geldt.

De gelijkheid (b) wordt op soortgelijke wijze bewezen. Geef het bewijs zelf. □

Zijn V en W twee verzamelingen, $f : V \to W$ een afbeelding en $B \subset W$, dan wordt het *volledige origineel* $f^{-1}(B)$ van B onder f gedefinieerd door

$$f^{-1}(B) := \{x \in V \mid f(x) \in B\}.$$

De hierboven geïntroduceerde operaties gedragen zich goed ten aanzien van het nemen van volledige originelen.

Lemma 2.36 *Laat V en W verzamelingen zijn, $f : V \to W$ en $B \subset W$. Dan geldt*

(a) $f^{-1}(W \setminus B) = V \setminus f^{-1}(B)$.

Zij $\{B_i \mid i \in I\}$ *een collectie deelverzamelingen van* W. *Dan*

(b) $f^{-1}(\cap_{i\in I} B_i) = \cap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$;

(c) $f^{-1}(\cup_{i\in I} B_i) = \cup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

Bewijs: Zij $x \in V$. Dan gelden de volgende gelijkwaardigheden:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(W \setminus B) &\iff f(x) \in W \setminus B \iff f(x) \notin B \\ &\iff x \notin f^{-1}(B) \iff x \in V \setminus f^{-1}(B). \end{aligned}$$

Hieruit volgt de identiteit (a).

Ook gelden de volgende equivalenties:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\cap_{i\in I} B_i) &\iff f(x) \in \cap_{i\in I} B_i \iff \forall i \in I : f(x) \in B_i \\ &\iff \forall i \in I : x \in f^{-1}(B_i) \iff x \in \cap_{i\in I} f^{-1}(B_i). \end{aligned}$$

Hieruit volgt (b).

Tenslotte volgt (c) uit de volgende equivalenties:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(\cup_{i\in I} B_i) &\iff f(x) \in \cup_{i\in I} B_i \iff \exists i \in I : f(x) \in B_i \\ &\iff \exists i \in I : x \in f^{-1}(B_i) \iff x \in \cup_{i\in I} f^{-1}(B_i). \end{aligned}$$

□

Gevolg 2.37 *Zij* $f : V \to W$ *een afbeelding tussen verzamelingen, en* $A, B \subset W$. *Dan is*

$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B).$$

Bewijs: Er geldt $A \setminus B = A \cap (W \setminus B)$. Dus:

$$f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A \cap (W \setminus B)) = f^{-1}(A) \cap (V \setminus f^{-1}(B)) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B).$$

□

Tenslotte merken we ter volledigheid op dat de operaties verschil en doorsnede zich minder goed gedragen onder het nemen van beelden. Bewijs als oefening zelf het volgende lemma, dat we in dit dictaat verder niet zullen gebruiken.

Lemma 2.38 *Zij* $f : V \to W$ *een afbeelding tussen verzamelingen* V *en* W; *zij* A, B *een tweetal deelverzamelingen van* V *en* $\{A_i \mid i \in I\}$ *een collectie deelverzamelingen van* V.

(a) $f(\cup_{i\in I} A_i) = \cup_{i\in I} f(A_i)$.

(b) $f(\cap_{i\in I} A_i) \subset \cap_{i\in I} f(A_i)$; *gelijkheid hoeft niet te gelden.*

(c) $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B) \subset f(A)$; *gelijkheid hoeft nergens te gelden.*

2.6 Appendix: linker- en rechterlimiet, oneigenlijke limiet

Definitie 2.39 Laat V en W metrische ruimten zijn, $f : V \supset\!\!\to W$ een afbeelding, $S \subset V$, $a \in V$ en $b \in W$. We schrijven

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in S}} f(x) = b \tag{2.4}$$

of ook $\lim_{x \to a, x \in S} f(x) = b$ als voor de beperking $f_S := f|_{\mathrm{Dom}(f) \cap S}$ van f tot $S \cap \mathrm{Dom}(f)$ geldt dat

$$\lim_{x \to a} f_S(x) = b.$$

Aangezien de bovenstaande definitie de uitspraak (2.4) in het gebruikelijke kader plaatst, is gemakkelijk in te zien welke van de behandelde rekenregels voor limieten doorgaan met de toevoeging $x \in S$ in de limieten.

Een speciaal geval van het bovenstaande, met $V = \mathbb{R}$, is het volgende.

Definitie 2.40 Zij W een metrische ruimte, $f : \mathbb{R} \supset\!\!\to W$, $a \in \mathbb{R}$ en $b \in W$. Dan betekenen

$$\lim_{x \uparrow a} f(x) = b \quad \text{en} \quad \lim_{x \downarrow a} f(x) = b$$

dat $\lim_{x \to a, x \in S} f(x) = b$, met $S =]-\infty, a[$, respectievelijk $S =]a, \infty[$. De bovenstaande limieten heten de *linker-*, respectievelijk de *rechterlimiet* van $f(x)$, als x naar a gaat.

Lemma 2.41 *Zij W een metrische ruimte, $f : \mathbb{R} \supset\!\!\to W$, $a \in \mathbb{R}$ en $b \in W$. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

(a) $\lim_{x \to a} f(x) = b$;

(b) $\lim_{x \downarrow a} f(x) = \lim_{x \uparrow a} f(x) = b$ *en* $f(a) = b$ *als* $a \in \mathrm{Dom}(f)$.

Bewijs: Geef het bewijs zelf. □

Tenslotte behandelen we nog de definitie van de zogenaamde oneigenlijke limieten van de vorm $\lim_{x \to \pm\infty}$.

Definitie 2.42 Zij W een metrische ruimte, $f : \mathbb{R} \supset\!\!\to W$, $b \in W$.

(a) De formule

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

betekent dat voor elke $\varepsilon > 0$ een $R \in \mathbb{R}$ bestaat met de volgende eigenschap:

$$\text{als} \quad x \in \mathrm{Dom}(f) \quad \text{en} \quad x > R, \quad \text{dan} \quad d(f(x), b) < \varepsilon.$$

Als dit het geval is zegt men dat $f(x)$ de limiet b heeft als x naar oneindig gaat. Men gebruikt ook de notatie $f(x) \to b$ als $x \to \infty$.

(b) Voorts betekent

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

dat voor elke $\varepsilon > 0$ een $R \in \mathbb{R}$ bestaat met de volgende eigenschap:

$$\text{als} \quad x \in \mathrm{Dom}(f) \quad \text{en} \quad x < R, \quad \text{dan} \quad d(f(x), b) < \varepsilon.$$

Als dit het geval is, zegt men dat $f(x)$ de limiet b heeft als x naar min oneindig gaat. Men gebruikt ook de notatie $f(x) \to b$ als $x \to -\infty$.

Ook oneigenlijke limieten kunnen in het gebruikelijke kader geplaatst worden.

Lemma 2.43 *Zij W een metrische ruimte, $f : \mathbb{R} \rightarrowtail W$ en $b \in W$. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

(a) $\lim_{x \to \infty} f(x) = b$;

(b) $\lim_{y \downarrow 0} f(y^{-1}) = b$.

Bewijs: We definiëren de functie $g : \mathbb{R} \rightarrowtail W$ door $g(y) = f(y^{-1})$ voor $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $y^{-1} \in \mathrm{Dom}(f)$. Dan betekent (b) precies dat $\lim_{y \downarrow 0} g(y) = b$.

Stel dat (a) geldt. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Er bestaat een $R \in \mathbb{R}$ zo dat voor $x \in \mathrm{Dom}(f)$ met $x > R$ geldt $d(f(x), b) < \varepsilon$. Door eventueel R te vervangen door $\max\{R, 1\}$, zien we dat we mogen veronderstellen dat $R > 0$. Kies $\delta = R^{-1}$. Dan is $\delta > 0$; voorts geldt voor alle $y \in \mathrm{Dom}(g) \cap]\,0, \infty\,[$ met $d(y, 0) < \delta$ dat $y^{-1} \in \mathrm{Dom}(f)$ en $y^{-1} > R$; derhalve $d(g(y), b) = d(f(y^{-1}), b) < \varepsilon$. We concluderen dat (b) geldt.

Stel omgekeerd dat (b) geldt. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Dan is er een $\delta > 0$ zo dat voor alle $y \in \mathrm{Dom}(g)$ met $0 < y < \delta$ geldt $d(g(y), b) < \varepsilon$. Zij $R = 1/\delta$. Is $x \in \mathrm{Dom}(f)$, $x > R$ dan geldt $x^{-1} \in \mathrm{Dom}(g)$ en $0 < x^{-1} < \delta$, dus $d(f(x), b) = d(g(x^{-1}), b) < \varepsilon$. Hieruit volgt (a). $\square$

Opmerking 2.44 Limieten van de vorm $\lim_{x \to -\infty}$ zijn via de substitutie $y = 1/x$ op soortgelijke wijze in verband te brengen met limieten van de vorm $\lim_{y \uparrow 0}$. Formuleer en bewijs zelf een resultaat in deze richting.

Met het bovenstaande resultaat is gemakkelijk in te zien welke rekenregels gelden voor oneigenlijke limieten van de besproken vorm.

Voorbeeld 2.45 Uit het bovenstaande volgt direct dat

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \text{en} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Voorbeeld 2.46 We bespreken de limiet

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{2x^2+1}.$$

Voor $x \neq 0$ geldt

$$\frac{x^2+x}{2x^2+1} = \frac{1+x^{-1}}{2+x^{-2}}.$$

Met behulp van het bovenstaande lemma volgt nu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{2x^2+1} = \lim_{y\downarrow 0} \frac{1+y}{2+y^2} = \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

Men kan ook direct opmerken dat wegens de gebruikelijke rekenregels (vertaald naar limieten met $x \to \infty$) geldt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{2x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+x^{-1}}{2+(x^{-1})^2} = \frac{1+0}{2+0^2} = \frac{1}{2}.$$

Hoofdstuk 3

Rijen en volledigheid

3.1 Limieten van rijen

In deze paragraaf behandelen we het begrip 'limiet van een rij'. Bovendien bespreken we het verband met het limietbegrip voor functies, dat eerder behandeld werd in Paragraaf 1.2.

Allereerst leggen we in een definitie vast wat we onder een rij in een verzameling V verstaan. Een rij in V dient zoiets te zijn als een gegeven (aftelbaar oneindig) geordend stel elementen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ van V. Daaronder mogen gelijken voorkomen. Merk op dat zo'n stel elementen vastligt als voor iedere $n \in \mathbb{N}$ een element $a_n \in V$ gegeven is. Weer anders gezegd, als de afbeelding $n \mapsto a_n$ van $\mathbb{N}$ naar V gegeven is.

Definitie 3.1 Onder een *rij* in een verzameling V verstaan we een afbeelding $n \mapsto a_n$, $\mathbb{N} \to V$. Deze afbeelding wordt ook wel genoteerd met $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, met $(a_n)_{n\geq 0}$ of met $(a_n)_{n=0}^{\infty}$.

U bent gewend dat een afbeelding $\mathbb{N} \to V$ genoteerd wordt met $\alpha : n \mapsto \alpha(n)$. De notatie van de bovenstaande definitie hanteren we indien we α ook daadwerkelijk als een rij willen zien. Het komt ook wel eens voor dat we spreken over de rij $(\alpha(n))_{n\in\mathbb{N}}$ in V.

Het is soms handig de elementen van een rij vanaf 1 (of, algemener, een willekeurig geheel getal) te nummeren, dus $(a_n)_{n\geq 1}$. Dit is bijvoorbeeld om voor de hand liggende redenen het geval bij de rij $a_n := \frac{1}{n}$. Men kan door herbenoemen altijd herleiden tot de bovenstaande situatie, door te schrijven $b_n = a_{n+1}$ voor $n \geq 0$ en de rij $(b_n)_{n\geq 0}$ te beschouwen; in het gegeven voorbeeld dus de rij $(\frac{1}{n+1})_{n\geq 0}$.

Voorbeeld 3.2 We beschouwen $V = \mathbb{R}$. Voorbeelden van rijen in $\mathbb{R}$ zijn:

$$a_n := \frac{1}{n} \ \ (n \geq 1); \quad b_n := n; \quad c_n := \frac{n}{1+n}; \quad d_n := (1 + \frac{1}{n})^n \ \ (n \geq 1).$$

In het vervolg veronderstellen we dat de verzameling V voorzien is van een metriek d. Men kan dan spreken over de limiet van een rij in V.

Definitie 3.3 Is $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in V en $a \in V$, dan betekent

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \tag{3.1}$$

dat er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat

$$n > N \quad \Rightarrow \quad d(a_n, a) < \varepsilon. \tag{3.2}$$

In plaats van (3.1) schrijven we soms ook wel $a_n \to a$ $(n \to \infty)$ (spreek uit: a_n heeft *limiet a* als n naar oneindig gaat).

Opmerking 3.4 Merk op dat de uitspraak (3.2) equivalent is met de volgende meer meetkundig getinte uitspraak:

$$n > N \quad \Rightarrow \quad a_n \in B(a; \varepsilon).$$

Opmerking 3.5 Merk op dat Definitie 3.3 grote gelijkenis vertoont met Definitie 2.15. Net als in die definitie kan men $\varepsilon > 0$ zien als tevoren gegeven nauwkeurigheid. De (van ε afhankelijke) N is een index voorbij welke alle elementen van de rij ε-dicht bij a liggen.

Definitie 3.6 De rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V heet *convergent* (in V) als er een element $a \in V$ bestaat zo dat $a_n \to a$ $(n \to \infty)$. Een niet-convergente rij heet *divergent*.

We beschouwen nog eens de rij $(a_n)_{n\geq 1}$ uit Voorbeeld 3.2. We zullen met de definitie laten zien dat deze rij convergeert met limiet 0. Dit wordt kort geformuleerd in het volgende lemma.

Lemma 3.7 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Bewijs: Beschouw de rij $(a_n)_{n\geq 1}$ gegeven door $a_n = 1/n$. Zij $\varepsilon > 0$. Kies $N \in \mathbb{N}$ zo dat $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$. (Merk op dat deze N groter is naarmate ε dichter bij nul ligt.) Dan geldt voor alle $n > N$ dat $n > \frac{1}{\varepsilon}$, dus ook $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Hieruit blijkt dat $n > N \Rightarrow a_n \in B(0; \varepsilon)$. De rij (a_n) convergeert derhalve met limiet 0. □

In het bovenstaande bewijs wordt er vanuit gegaan dat er een $N \in \mathbb{N}$ te vinden is met $N > 1/\varepsilon$. Anders gezegd: als we voldoende vaak 1 bij elkaar optellen krijgen we een getal dat strikt groter dan $1/\varepsilon$ is. We zijn het erover eens dat dit voor iedere reëel getal $\varepsilon > 0$ mogelijk zou moeten zijn, maar kunnen dat op dit moment niet bewijzen, bij gebrek aan een precieze definitie van $\mathbb{R}$. We formuleren daarom een onbewezen stelling, of axioma, die de mogelijkheid garandeert.

Axioma 3.8 (archimedische eigenschap) *Voor ieder reëel getal $x \in \mathbb{R}$ bestaat een natuurlijk getal $n \in \mathbb{N}$ zo dat $x < n$.*

Buiten de hoofdtekst van dit dictaat zullen we in Appendix 8.2 een definitie van $\mathbb{R}$ behandelen waaruit Axioma 3.8 bewezen kan worden. Hiermee wordt het axioma achteraf gerechtvaardigd.

Voorbeeld 3.9 We beschouwen de rij $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uit Voorbeeld 3.2. We zullen met de definitie laten zien dat deze rij divergeert.

Stel dat de rij (b_n) convergeert. Dan is er een $b \in \mathbb{R}$ met $b_n \to b$ voor $n \to \infty$. Wegens de definitie van limiet (met $\varepsilon = 1$) is er dan een $N \in \mathbb{N}$ zo dat $n > N \Rightarrow b_n \in B(b; 1)$. In het bijzonder geldt dan $n > N \Rightarrow n < b + 1$, tegenspraak. De rij (b_n) kan dus niet convergeren; we concluderen dat hij divergeert.

Een rij heeft ten hoogste één limiet, zoals blijkt uit het volgende analogon van Lemma 1.22. Zie ook § 2.4.

Lemma 3.10 (Eenduidigheid van de limiet) *Zij $(a_n)_{n\geq 1}$ een rij in V. Veronderstel dat $b, c \in V$ en dat*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b \quad \textit{en} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = c.$$

Dan $b = c$.

Bewijs: Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Dan bestaan er $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ zo dat voor $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$n > N_1 \Rightarrow d(a_n, b) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{en} \quad n > N_2 \Rightarrow d(a_n, c) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zij $N = \max(N_1, N_2)$. Dan is $N \in \mathbb{N}$. Kies $n > N$. Voor deze n geldt $n > N_1$ en $n > N_2$, dus:

$$d(b, c) \leq d(b, a_n) + d(a_n, c) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Het reële getal $d(b, c)$ is niet-negatief en voldoet wegens het bovenstaande aan $d(b, c) < \varepsilon$ voor elke $\varepsilon > 0$. Hieruit volgt dat $d(b, c) = 0$, dus $b = c$. □

Merk op dat het bovenstaande bewijs een grote gelijkenis vertoont met dat van Lemma 1.22, met $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ vervangen door metrische ruimten U respectievelijk V, zie § 2.4. Hierbij komt de rij (a_n) (op te vatten als functie $\mathbb{N} \to V$) in de plaats van de functie $f : U \to V$; de condities $n > N_1$ en $n > N_2$ komen in de plaats van de condities $d(x, a) < \delta_1$ en $d(x, a) < \delta_2$.

In Opmerking 3.5 schreven we reeds dat Definitie 3.3 grote gelijkenis vertoont met Definitie 2.15. Hieronder zullen we laten zien dat Definitie 3.3 zelfs gezien kan worden als bijzonder geval van Definitie 2.15.

We breiden de verzameling $\mathbb{N}$ uit met het symbool ∞, en noteren de nieuwe verzameling met $\widehat{\mathbb{N}}$. Dus:

$$\widehat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Voor $N \in \mathbb{N}$ definiëren we de verzameling

$$\widehat{\mathbb{N}}_{\geq N} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq N\} \cup \{\infty\}.$$

We zullen aantonen dat er een metriek d op $\widehat{\mathbb{N}}$ bestaat waarvoor de verzamelingen $\widehat{\mathbb{N}}_{\geq N}$ precies de bollen zijn met middelpunt ∞. Deze metriek maakt het mogelijk de definitie van een limiet voor een rij uit te drukken in de oude definitie van limiet voor een functie tussen metrische ruimten.

Lemma 3.11 *Er bestaat een metriek d op $\widehat{\mathbb{N}}$ met de volgende eigenschap.*

(*) *De collectie van open bollen $B_{\widehat{\mathbb{N}}}(\infty, \delta)$, met $\delta > 0$, is precies gelijk aan de collectie van deelverzamelingen van de vorm $\widehat{\mathbb{N}}_{\geq N}$, met $N \in \mathbb{N}$.*

Is d een metriek met de bovenstaande eigenschappen, dan geldt dat de volgende twee uitspraken equivalent zijn, voor iedere metrische ruimte V, iedere rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V, en iedere $a \in V$.

(i) *De rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heeft limiet a voor $n \to \infty$ in de zin van Definitie 3.3.*

(ii) *De functie $n \mapsto a_n, \widehat{\mathbb{N}} \rightarrowtail V$ heeft limiet a voor $n \to \infty$ in de zin van Definitie 2.15.*

Bewijs: We spreken af dat $n \le \infty$ voor alle $n \in \widehat{\mathbb{N}}$. Hiermee is de ordening $\le$ op $\mathbb{N}$ voortgezet tot een ordening op $\widehat{\mathbb{N}}$. We spreken verder af dat we $(\infty + 1)^{-1}$ opvatten als notatie voor het element $0 \in \mathbb{R}$, en definiëren de afbeelding $d : \widehat{\mathbb{N}} \times \widehat{\mathbb{N}} \to [0, \infty[$ door

$$d(n,m) = \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1}\right| \qquad (n, m \in \widehat{\mathbb{N}}).$$

We zullen aantonen dat d een metriek op $\widehat{\mathbb{N}}$ definieert. Zij A de deelverzameling van $\mathbb{R}$ bestaande uit de elementen 0 en $(n+1)^{-1},\ n \in \mathbb{N}$. Zij d_A de metriek op A die geïnduceerd wordt door de Euclidische metriek (zie Opmerking 2.13). Dan is $d_A(a,b) = |a-b|$ voor alle $a, b \in A$. De afbeelding $\varphi : \widehat{\mathbb{N}} \to A, n \mapsto (n+1)^{-1}$ is een bijectie. In het bijzonder is $\varphi(\infty) = (\infty+1)^{-1} = 0$. Voor de hierboven gedefinieerde afbeelding $d : \widehat{\mathbb{N}} \times \widehat{\mathbb{N}} \to [0, \infty[$ geldt nu $d(n,m) = d_A(\varphi(n), \varphi(m))$, m.a.w., via de bijectie φ kunnen we $(\widehat{\mathbb{N}}, d)$ identificeren met (A, d_A). Aangezien d_A een metriek op A is, is d een metriek op V.

We tonen vervolgens aan dat de metriek d voldoet aan de eigenschap (*). Zij $N \in \mathbb{N}, N \ge 1$. Voor een element $n \in \widehat{\mathbb{N}}$ geldt

$$n \in \widehat{\mathbb{N}}_{\ge N} \iff \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{N+1} \iff \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N} \iff d(n,\infty) < \frac{1}{N}.$$

Hieruit blijkt dat $\widehat{\mathbb{N}}_{\ge N} = B(0;\delta)$ met $\delta = N^{-1}$. Is $N = 0$, dan is $\widehat{\mathbb{N}}_{\ge N} = \widehat{\mathbb{N}}$. Voor iedere $n \in \widehat{\mathbb{N}}$ geldt $d(n,\infty) \le 1 < 2$, dus in dit geval is $\widehat{\mathbb{N}}_{\ge N} = B(\infty, 2)$. We concluderen dat iedere verzameling $\widehat{\mathbb{N}}_{\ge N}$ een bol in $\widehat{\mathbb{N}}$ met middelpunt ∞ is. Zij omgekeerd $\delta > 0$. Dan is $B(\infty, \delta)$ de verzameling van $n \in \widehat{\mathbb{N}}$ met $\frac{1}{n+1} = d(\infty, n) < \delta$, hetgeen gelijkwaardig is met $n \ge 1/\delta - 1$ of $n = \infty$. Zij N het kleinste natuurlijke getal met $N \ge 1/\delta - 1$. Dan zien we dat $B(\infty, \delta) = \widehat{\mathbb{N}}_{\ge N}$. De metriek d voldoet dus aan (*).

Tenslotte tonen we het laatste deel van het lemma aan. Zij d een metriek op $\widehat{\mathbb{N}}$ die voldoet aan (*). We veronderstellen niet dat d gelijk is aan de specifieke hierboven geconstrueerde metriek; de precieze vorm doet er niet toe.

Zij V een metrische ruimte, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in V, $a \in V$. We definiëren de afbeelding $\alpha : \widehat{\mathbb{N}} \rightarrowtail V$ door $\mathrm{Dom}(\alpha) = \mathbb{N}$ en $\alpha(n) = a_n$, voor $n \in \mathbb{N}$. Uitspraak (i) vatten we samen als $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, uitspraak (ii) als $\lim_{n\to\infty} \alpha(n) = a$.

Veronderstel eerst dat (i) geldt, dus $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Er bestaat een $N \in \mathbb{N}$ zo dat $n > N \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon$. Dit kan ook geformuleerd worden als $n \in \mathbb{N} \cap \widehat{\mathbb{N}}_{\ge N+1} \Rightarrow a_n \in B(a;\varepsilon)$. Wegens (*) is er een $\delta > 0$ zo dat $\mathbb{N} \cap \widehat{\mathbb{N}}_{\ge N+1} = \mathbb{N} \cap B(\infty, \delta) = \mathrm{Dom}(\alpha) \cap B(\infty, \delta)$. We zien dat

$$\alpha(\mathrm{Dom}(\alpha) \cap B(\infty, \delta)) \subset B(a, \varepsilon).$$

Hiermee is $\lim_{n\to\infty} \alpha(n) = a$, dus (ii) aangetoond.

Veronderstel nu dat (ii) geldt, dus $\lim_{n\to\infty} \alpha(n) = a$. Zij $\varepsilon > 0$. Dan betaat er een $\delta > 0$ zo dat $\alpha(\mathrm{Dom}(\alpha) \cap B(\infty; \delta))$. Wegens (*) bestaat hierbij een $N \in \mathbb{N}$ zo dat $B(b; \delta) = \widehat{\mathbb{N}}_{\geq N}$. Er volgt dat $\alpha(\mathbb{N} \cap \widehat{\mathbb{N}}_{\geq N}) \subset B(a; \varepsilon)$. Dit betekent precies dat $n \geq N \Rightarrow d(a_n, a) < \varepsilon$. Hiermee is aangetoond dat $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, dus (i). □

Het bovenstaande lemma heeft geen praktische toepassingen. De kracht van het lemma is dat eerder afgeleide stellingen over limieten van afbeeldingen tussen metrische ruimten zich direct laten vertalen naar stellingen over rijen in een metrische ruimte, die wel vaak toegepast worden. Hieronder behandelen we enkele van die stellingen,

Lemma 3.12 (Somregel voor limieten van rijen) *Zij E een genormeerde lineaire ruimte. Laat (a_n), (b_n) een tweetal rijen in E zijn en $a, b \in E$. Stel dat*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{en} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Dan geldt:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b.$$

Opmerking 3.13 Merk op dat met de laatste uitspraak bedoeld wordt: $c_n = a_n + b_n$ definieert weer een rij in E en er geldt dat $\lim_{n\to\infty} c_n = a + b$.

Bewijs: Door toepassing van Lemma 3.11 volgt het resultaat uit Lemma 1.25', zie § 2.4. Neem daarbij in het laatstgenoemde lemma $\widehat{\mathbb{N}}$ in plaats van V, ∞ in plaats van a, $f : \widehat{\mathbb{N}} \rightarrowtail E,\ n \mapsto a_n$, $g : \widehat{\mathbb{N}} \rightarrowtail E,\ n \mapsto b_n$, en tenslotte a in plaats van b en b in plaats van c. □

De volgende stelling is wegens Lemma 3.11 een gevolg van Lemma's 1.26' en 1.28' uit § 2.4.

Lemma 3.14 (Product- en quotiëntregel voor limieten) *Zij E een genormeerde lineaire ruimte, (λ_n) een rij in $\mathbb{R}$, en (a_n) een rij in E. Zij $\lambda \in \mathbb{R}$, $a \in E$ en stel dat*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda \qquad \text{en} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Dan geldt:

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda_n a_n) = \lambda a.$$

Is bovendien $\lambda \neq 0$, dan is $\lambda_n \neq 0$ voor voldoend grote $n \in \mathbb{N}$ en:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n^{-1} a_n = \lambda^{-1} a.$$

Voorbeeld 3.15 We beschouwen nog eens de rij (c_n) uit Voorbeeld 3.2. Voor alle $n \geq 1$ geldt

$$c_n = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}.$$

Wegens Lemma 3.7 geldt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Met behulp van Lemma 3.12 volgt nu dat $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n}) = 1 + 0 = 1$, en met Lemma 3.14 volgt tenslotte dat

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{1} = 1.$$

Tenslotte is er ook nog een nuttige variant van de substitutieregel, Lemma 1.32.

Lemma 3.16 (Substitutie van rijen in limieten) *Laat (V, d_V) en (W, d_W) metrische ruimten zijn en $g : V \supset S \to W$ een afbeelding. Zij voorts $a \in V$, $b \in W$ en veronderstel dat $\lim_{x \to a} g(x) = b$. Is $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een rij in S met $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, dan geldt*

$$\lim_{n\to\infty} g(a_n) = b.$$

Bewijs: We voorzien $\widehat{\mathbb{N}}$ van een metriek als in Lemma 3.11 en definiëren de afbeeling $\alpha : \widehat{\mathbb{N}} \to V$ door $\mathrm{Dom}(\alpha) = \mathbb{N}$ en $\alpha(n) = a_n$, voor $n \in \mathbb{N}$. Uit Lemma 1.32', zie § 2.4, volgt nu dat

$$\lim_{n\to\infty} g(\alpha(n)) = b.$$

Met Lemma 3.11 volgt hieruit dat $\lim_{n\to\infty} g(a_n) = b$. □

Voorbeeld 3.17 We zullen nu met een uit de infinitesimaalrekening bekende methode aantonen dat de rij (d_n) uit Voorbeeld 3.2 convergeert met limiet e. (Deze methode zal later in de analyse theoretisch gefundeerd worden.) Daartoe beschouwen we de functie $g : \mathbb{R} \supset \,]0, \infty[\, \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $g(x) = x^{-1}\log(1+x)$. Uit de stelling van Taylor met rest volgt dat $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$. Voor alle $n \geq 1$ geldt $\frac{1}{n} \in \,]0, \infty[$, terwijl $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Met behulp van het bovenstaande lemma volgt nu dat

$$\lim_{n\to\infty} g(\frac{1}{n}) = 1.$$

Vervolgens definiëren we de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto e^y$. Deze functie is continu in 1, dus $\lim_{y\to 1} f(y) = f(1) = e$. Met behulp van Lemma 3.16 concluderen we nu dat

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} f(g(\frac{1}{n})) = e.$$

Lemma 3.18 *Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in $\mathbb{R}^p$. De rij (a_n) is convergent dan en slechts dan als voor iedere $1 \leq j \leq p$ geldt dat de rij $(a_{nj})_{n\in\mathbb{N}}$ van de j-de componenten convergent is in $\mathbb{R}$. Bovendien geldt in dat geval dat de j-de component van de limiet gegeven wordt door:*

$$(\lim_{n\to\infty} a_n)_j = \lim_{n\to\infty} a_{nj}.$$

Bewijs: Dit volgt wegens Lemma 3.11 uit § 2.4, Lemma 1.30'. □

Bij limieten van rijen blijven ongelijkheden behouden.

Lemma 3.19 *Laat (a_n) en (b_n) rijen in $\mathbb{R}$ zijn met $a_n \leq b_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Als (a_n) en (b_n) convergeren, dan geldt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Bewijs: Wegens Lemma 3.11 volgt dit uit de overeenkomstige stelling voor $\mathbb{R}$-waardige functies op een metrische ruimte, zie § 2.4, Lemma 1.33'. Gebruik hierbij dat ∞ een limietpunt van $\mathbb{N}$ in $\widehat{\mathbb{N}}$ is. □

Voor rijen van reële getallen geldt weer een insluitstelling.

Lemma 3.20 (Insluitstelling) *Laat* (a_n), (b_n) *en* (c_n) *rijen in* $\mathbb{R}$ *zijn, en veronderstel dat*

$$a_n \le b_n \le c_n$$

voor alle $n \in \mathbb{N}$. *Zijn de rijen* (a_n) *en* (c_n) *convergent met dezelfde limiet* $\lambda \in \mathbb{R}$, *dan is ook de rij* (b_n) *convergent met limiet* λ.

Bewijs: Wegens Lemma 3.11 volgt dit uit de overeenkomstige insluitstelling voor $\mathbb{R}$-waardige functies op een metrische ruimte, zie § 2.4, Lemma 1.35'. $\square$

We eindigen deze paragraaf met de behandeling van de veel voorkomende limiet $\lim_{n\to\infty} a^n$, voor $0 \le a < 1$. De volgende schatting dient ter voorbereiding.

Lemma 3.21 *Zij* $x \ge 0$. *Voor alle* $n \in \mathbb{N}$ *geldt* $(1+x)^n \ge 1 + nx$.

Bewijs: We bewijzen de uitspraak met inductie naar n. Voor $n = 0$ en $n = 1$ is de uitspraak waar. Laat de uitspraak bewezen zijn voor $n = k \ge 1$. Dan geldt

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \ge (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2 \ge 1 + (k+1)x.$$

De uitspraak is dus ook waar voor $n = k + 1$. $\square$

Opmerking 3.22 Ga na dat de bovenstaande schatting ook verkregen kan worden door gebruik te maken van het bij de infinitesimaalrekening behandelde binomium van Newton.

Lemma 3.23 *Zij* a *een reëel getal met* $0 \le a < 1$. *Dan is* $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.

Bewijs: Voor $a = 0$ is het resultaat waar. We mogens ons daarom beperken tot het geval dat $0 < a < 1$. In dit geval is $a^{-1} > 1$, dus $a^{-1} = 1 + \delta$ voor een zekere $\delta > 0$. Hieruit volgt voor elke $n \in \mathbb{N}$ dat

$$a^{-n} = (1+\delta)^n \ge 1 + n\delta,$$

wegens Lemma 3.21. Uit deze schatting volgt weer dat

$$0 \le a^n \le \frac{1}{1+n\delta} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\frac{1}{n}+\delta}\right).$$

Met behulp van de rekenregels voor limieten volgt uit Lemma 3.7 dat het rechterlid van de bovenstaande ongelijkheid limiet 0 heeft voor $n \to \infty$. Met behulp van de insluitstelling, Lemma 3.20, concluderen we dat $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$. $\square$

3.2 De volledigheid van R

Tot nu toe hebben we gewerkt met de bekende rekenregels voor de optelling en de vermenigvuldiging in $\mathbb{R}$, het lichaam der reële getallen. Bovendien hebben we gebruik gemaakt van de bekende eigenschappen van de ordening $<$ en van de archimedische eigenschap, gepostuleerd in Axioma 3.8. Wat betreft deze eigenschappen onderscheidt $\mathbb{R}$ zich niet van $\mathbb{Q}$, het lichaam der rationale getallen.

Met betrekking tot limietprocedures is er echter een wezenlijk onderscheid tussen $\mathbb{R}$ en $\mathbb{Q}$. In het verleden hebt u dit waarschijnlijk aanvaard, zonder er expliciet bij stil te staan. Een reëel getal $a \in \mathbb{R}$ werd dan voorgesteld door een oneindig voortlopende decimale ontwikkeling van de vorm

$$a = d_k \dots d_0, d_{-1} \dots \dots .$$

Hierbij zijn de optredende d_j, voor $j \in \mathbb{Z}$, $j \leq k$, cijfers uit de verzameling $\{0, 1, \dots, 9\}$. De bovenstaande uitdrukking heet een decimale ontwikkeling van a. Kappen we de decimale ontwikkeling af bij $-l$, dan vinden we de eindige decimale voorstelling

$$d_k \dots d_0, d_{-1} \dots d_{-l} = d_k \cdot 10^k + \dots + d_0 + \dots + d_{-l} \cdot 10^{-l} = \sum_{j=-l}^{k} d_j \cdot 10^j,$$

die een rationaal getal definieert.

De decimale ontwikkeling legt a vast in de zin dat

$$d_k \dots d_0, d_{-1} \dots d_{-l} \leq a \leq d_k \dots d_0, d_{-1} \dots d_{-l} + 10^{-l},$$

ofwel

$$\sum_{j=-l}^{k} d_j \cdot 10^j \leq a \leq \sum_{j=-l}^{k} d_j \cdot 10^j + 10^{-l}$$

voor alle $l \in \mathbb{N}$. Met andere woorden, a kan willekeurig nauwkeurig ingeklemd worden door rationale getallen.

Bij nadere beschouwing is het niet zo duidelijk dat er een reëel getal bestaat met de bovenstaande eigenschap. Om dit toe te lichten beschouwen we decimalen die als volgt verkregen worden in een poging het reële getal $\sqrt{2}$ vast te leggen.

Onze voorlopige werkdefinitie van dit getal luidt: $\sqrt{2}$ is het reële getal $x > 0$ dat voldoet aan $x^2 = 2$. Maar dan veronderstellen we stilzwijgend dat de vergelijking $x^2 = 2$ een oplossing $x > 0$ heeft. Als zo'n oplossing al bestaat, dan is het zeker geen rationaal getal, wegens het volgende lemma.

Lemma 3.24 *Er bestaat geen rationaal getal $x > 0$ met $x^2 = 2$.*

Bewijs: We bewijzen dit lemma uit het ongerijmde. Veronderstel dat er wel een rationaal getal $x > 0$ bestaat met $x^2 = 2$. Dan is x te schrijven als

$$x = \frac{p}{q}$$

met $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$. Door voldoende vaak factoren 2 uit te delen kunnen we bereiken dat x in de bovenstaande vorm geschreven is met p of q oneven. Uit $x^2 = 2$ volgt nu $p^2 = 2q^2$. Hieruit blijkt dat p^2 even is. Maar dan moet p ook al even zijn, dus $p = 2k$ voor een $k \in \mathbb{N}$. Hieruit volgt dat $4k^2 = 2q^2$ dus $2k^2 = q^2$, waaruit volgt dat q^2 even is, dus q ook. We hebben afgeleid dat p en q beide even moeten zijn, tegenspraak. $\square$

We kunnen echter wel aannemelijk maken dat $\sqrt{2}$ een bepaalde decimale ontwikkeling zou moeten hebben. De intervallen $[c^2, (c+1)^2\,[$, voor $c \in \mathbb{N}$, zijn disjunct en hebben als vereniging $[0, \infty\,[$. Derhalve is er namelijk precies één natuurlijk getal c_0 zo dat $(c_0)^2 \leq 2 < (c_0 + 1)^2$. Door proberen vinden we dat $c_0 = 1$.

De intervallen

$$[(c_0 + c \cdot 10^{-1})^2, (c_0 + c \cdot 10^{-1} + 10^{-1})^2\,[, \qquad (c \in \{0, 1, \dots, 9\}),$$

zijn disjunct en hebben als vereniging het interval $[(c_0)^2, c_0 + 1)^2\,[$. Derhalve bestaat er precies één natuurlijk getal $0 \leq c_1 \leq 9$ zo dat

$$(c_0 + c_1 \cdot 10^{-1})^2 \leq 2 < (c_0 + c_1 \cdot 10^{-1} + 10^{-1})^2.$$

Dit getal kan gevonden worden door achtereenvolgens te proberen: $0, 1, \dots, 9$. Aldus vinden we $c_1 = 4$. Zo voortgaande vinden we een rij van getallen $c_2,\ c_3,\ \dots \in \{0, \dots 9\}$ die volledig bepaald wordt door de eigenschap dat

$$(\sum_{n=0}^{k} c_n \cdot 10^{-n})^2 \leq 2 < (\sum_{n=0}^{k} c_n \cdot 10^{-n} \ + 10^{-k})^2 \tag{3.3}$$

voor alle $k \geq 2$. Hieruit zouden we af willen leiden dat de oplossing $x > 0$ van $x^2 = 2$ bepaald wordt door

$$\sum_{n=0}^{k} c_n \cdot 10^{-n} \leq x \leq \sum_{n=0}^{k} c_n \cdot 10^{-n} + 10^{-k},$$

voor alle $k \in \mathbb{N}$. Het is echter niet duidelijk dat zo'n x ook daadwerkelijk bestaat. Het is mogelijk de reële getallen zo te definiëren dat het bestaan van x gegarandeerd wordt. Voor details verwijzen we naar Appendix 8.2.

Wij zullen deze weg in de hoofdtekst van dit dictaat niet volgen. In plaats daarvan formuleren we naast het eerdere Axioma 3.8 een axioma van volledigheid, waarvan we aannemen dat de reële getallen eraan voldoen. Allerlei stellingen zullen op Axioma 3.8 en het volledigheidsaxioma teruggevoerd worden. Zo we dit wensen hoeven we dan slechts deze axioma's te bewijzen uit een geschikte definitie van het lichaam der reële getallen. De genoemde stellingen zullen dan ook bewezen zijn vanuit de definitie der reële getallen. Voor de formulering van het volledigheidsaxioma is het prettig de volgende terminologie in te voeren.

Definitie 3.25 Onder een *segment* verstaan we een gesloten en begrensd interval van de vorm $I = [a, b]$, met $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Een rij $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ van segmenten zullen we *dalend* noemen als $I_{n+1} \subset I_n$, voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Axioma 3.26 (volledigheid) *Zij $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een dalende rij van segmenten in $\mathbb{R}$. Dan is de doorsnede $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ een niet-lege deelverzameling van $\mathbb{R}$.*

Opmerking 3.27 Een rij $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heet *monotoon stijgend* indien $c_n \leq c_{n+1}$ en *strikt monotoon stijgend* indien $c_n < c_{n+1}$, voor alle $n \in \mathbb{N}$. De terminologie *monotoon dalend* en *strikt monotoon dalend* wordt op soortgelijke wijze gedefinieerd.

Schrijven we ieder segment in de vorm $I_n = [a_n, b_n]$ dan betekent het dalend zijn van de rij (I_n) precies dat $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$, voor alle $n \in \mathbb{N}$. Een dalende rij van segmenten is dus volledig bepaald door een monotoon stijgende rij (a_n) en een monotoon dalende rij (b_n) met $a_n \leq b_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Het bovenstaande axioma garandeert dat er minstens één $x \in \mathbb{R}$ bestaat met

$$a_n \leq x \leq b_n$$

voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Is $I = [a, b]$ een segment in $\mathbb{R}$, dan definiëren we de *lengte* $l(I)$ van I door $l(I) := b - a$.

Lemma 3.28 *Zij $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een dalende rij van segmenten in $\mathbb{R}$, zo dat* $\lim_{n\to\infty} l(I_n) = 0$. *Schrijf $I_n = [a_n, b_n]$, voor $n \in \mathbb{N}$. Dan convergeren de rijen (a_n) en (b_n) naar een zelfde limiet x. Bovendien geldt*

$$\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\}.$$

Bewijs: Noem de doorsnede van de segmenten I. Dan heeft I minstens één element wegens het bovenstaande axioma. Zij $x, y \in I$. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Dan bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ zo dat $n > N \Rightarrow 0 \leq l(I_n) < \varepsilon$. Neem $n = N + 1$. Dan behoren x en y tot $[a_n, b_n]$, terwijl $0 \leq b_n - a_n < \varepsilon$. Hieruit volgt dat $|x - y| < \varepsilon$. Deze schatting geldt voor elke $\varepsilon > 0$, dus $|x - y| = 0$, dus $x = y$. Er volgt dat I minstens en hoogstens één, dus precies één element heeft. Noem dit element x. Zij wederom $\varepsilon > 0$ en kies $N \in \mathbb{N}$ als boven. Dan geldt voor alle $n > N$ dat $l(I_n) < \varepsilon$ en $x \in [a_n, b_n]$, dus $|x - a_n| < \varepsilon$ en $|x - b_n| < \varepsilon$. We concluderen dat $\lim_{n\to\infty} a_n = x = \lim_{n\to\infty} b_n$. □

We keren terug naar de decimale ontwikkelingen. Zij $d_k, d_{k-1}, \ldots, d_0, \ldots$ een willekeurige rij in $\{0, \ldots, 9\}$. Voor $n \in \mathbb{N}$ definiëren we

$$a_n := d_k \ldots d_0, d_{-1} \ldots d_{-n} \quad \text{en} \quad b_n = a_n + 10^{-n}.$$

We tonen aan dat door $I_n := [a_n, b_n]$ een dalende rij segmenten gedefinieerd. Uit de definities volgt onmiddellijk dat $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Anderzijds geldt, voor $n \in \mathbb{N}$, dat

$$a_{n+1} - a_n \leq 9 \cdot 10^{-(n+1)} = 10^{-n} - 10^{-(n+1)},$$

waaruit volgt dat $b_{n+1} = a_{n+1} + 10^{n+1} \leq a_n + 10^{-n} = b_n$. De rij (I_n) is dus inderdaad dalend.

Bovendien geldt $l(I_n) = 10^{-n} \to 0$ voor $n \to \infty$, zie Lemma 3.23. (Dit lemma berustte op Lemma 3.7, dat op zijn beurt weer berustte op de archimedische eigenschap van $\mathbb{R}$.) We concluderen dat $\lim_{n\to\infty} a_n$ bestaat en definiëren nu

$$d_k d_{k-1} \ldots d_0, d_{-1} \ldots := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} d_k d_{k-1} \ldots d_0, d_{-1} \ldots d_{-n}.$$

Aldus zien we dat een decimale ontwikkeling altijd precies één reëel getal definieert.

Voorbeeld 3.29 We kunnen na de bovenstaande definitie *bewijzen* dat

$$0,999\ldots = 1.$$

Immers, per definitie geldt dat $0,999\ldots = \lim_{n\to\infty} a_n$, met $a_n = 0,999\ldots 9$, (n cijfers 9 achter de komma). Er geldt dat $a_n = 1 - 10^{-n}$, dus $\lim_{n\to\infty} a_n = 1 - 0 = 1$.

We keren terug naar onze poging $\sqrt{2}$ te definiëren.

Lemma 3.30 *Er bestaat precies één reëel getal* $x > 0$ *met* $x^2 = 2$.

Bewijs: Zij $x := c_0, c_1 c_2 \ldots$, met $c_0, c_1, \ldots$ de elementen van $\{0, 1, \ldots, 9\}$ die voldoen aan (3.3). Schrijf $a_n = c_0, c_1 \ldots c_n$ en $b_n = a_n + 10^{-n}$, dan geldt, voor alle $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n^2 \leq 2 \leq b_n^2.$$

Wegens de bovenstaande definitie geldt $x = \lim_{n\to\infty} a_n$, en dus ook $x = \lim_{n\to\infty} b_n$. Uit $a_n^2 \leq 2$ volgt nu wegens Lemma's 3.14 en 3.19 door limietovergang dat $x^2 \leq 2$. Op soortgelijke wijze volgt uit $b_n^2 \geq 2$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ dat $x^2 \geq 2$. We concluderen dat $x^2 = 2$.

Is $y > 0$ een tweede reëel getal met $y^2 = 2$, dan geldt $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2 = 0$, dus $x - y = 0$ of $x + y = 0$. Aangezien $x, y > 0$, volgt hieruit dat $x = y$.

3.3 Boven- en ondergrenzen, max en min, sup en inf

In deze paragraaf bespreken we de gevolgen van het volledigheidsaxioma voor boven- en ondergrenzen van begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. Een (niet-lege) naar boven begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$ hoeft niet altijd een maximaal element te bezitten. Als gevolg van het volledigheidsaxioma bezit het wel altijd een kleinste bovengrens of supremum, dat in tal van situaties een geschikte vervanging zal blijken te zijn van het maximum.

We beginnen met een precieze definitie van het begrip bovengrens.

Definitie 3.31 Zij A een deelverzameling van $\mathbb{R}$. Een getal $b \in \mathbb{R}$ heet een *bovengrens* van A als voor alle $x \in A$ geldt $x \leq b$. De collectie van alle bovengrenzen van A noteren we met $\mathrm{bov}(A)$. Men zegt dat A *naar boven begrensd* is als A een bovengrens heeft, d.w.z., $\mathrm{bov}(A) \neq \emptyset$.

De begrippen *ondergrens* en *naar onderen begrensd* worden op soortgelijke wijze ingevoerd. De collectie ondergrenzen van A wordt genoteerd met $\mathrm{ond}(A)$.

Is A een naar boven begrensde verzameling (zie Definitie 3.31), dan bevat $A \cap \mathrm{bov}(A)$ ten hoogste één element. Immers, laat b en b' tot de doorsnede behoren. Dan volgt uit $b \in A$ en $b' \in \mathrm{bov}(A)$ dat $b \leq b'$, en uit $b' \in A$ en $b \in \mathrm{bov}(A)$ dat $b' \leq b$. We concluderen dat $b = b'$.

Uit het bovenstaande volgt dat er ten hoogste één element $M \in A$ bestaat zo dat $x \leq M$ voor alle $x \in A$.

Definitie 3.32 Zij $A \subset \mathbb{R}$. Men zegt dat A een *maximum* of *grootste element* heeft als er een (noodzakelijkerwijs uniek) element $M \in A$ bestaat zo dat $x \leq M$ voor alle $x \in A$. Dit element $M \in A$ wordt in dat geval het *maximum* of *grootste element* van A genoemd, en genoteerd met $\max A$.

De begrippen *minimum* of *kleinste element* van A worden op soortgelijke wijze ingevoerd, notatie $\min A$.

Opmerking 3.33 Merk op dat A een maximum heeft dan en slechts dan als $A \cap \text{bov}(A) \neq \emptyset$. Is dit het geval dan bestaat de verzameling $A \cap \text{bov}(A)$ uit het getal $\max A$. Voor het bestaan van een minimum gelden soortgelijke opmerkingen.

Voorbeeld 3.34 (a) Zij $A =]\,0, 1]$. Er geldt $1 \in A$ en $x \leq 1$ voor alle $x \in A$, dus $\max A = 1$.

(b) Zij $A = [0, 1\,[$. We tonen aan dat A geen maximum bezit. Stel dat A een maximum M heeft. Dan is $M \in A$, dus $0 \leq M < 1$. Er bestaat derhalve een $x \in \mathbb{R}$ met $M < x < 1$. Hiervoor geldt $0 \leq M < x < 1$, dus $x \in [0, 1\,[= A$ en $x > M$, tegenspraak.

(c) Zij $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. De verzameling A bezit geen kleinste element. Want stel dat A wel een kleinste element heeft, zeg m. Dan geldt $m \in A$, dus $m = \frac{1}{N}$ voor een $N \in \mathbb{N}$, $N \neq 0$. Zij $n = N + 1$. Dan is $\frac{1}{n} \in A$ en $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} = m$, tegenspraak.

(d) Zij $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Deze verzameling heeft 0 als kleinste element. Immers, $0 \in A$ en voor alle $x \in A$ geldt $x \geq 0$. Derhalve $\min A = 0$.

Lemma 3.35 *Heeft $A \subset \mathbb{R}$ een maximaal element M, dan geldt dat*

$$\text{bov}(A) = [M, \infty[. \tag{3.4}$$

Bewijs: Is $b \geq M$ dan geldt voor alle $x \in A$ dat $x \leq M \leq b$, dus $b \in \text{bov}(A)$. Is omgekeerd $b \in \text{bov}(A)$, dan is $b \geq M$ omdat $M \in A$. We concluderen dat (3.4) geldt. □

Natuurlijk geldt een soortgelijk resultaat voor het minimum van een verzameling. Geef zelf het bewijs.

Lemma 3.36 *Heeft $A \subset \mathbb{R}$ een minimaal element m, dan geldt dat*

$$\text{ond}(A) =]-\infty, m].$$

Een naar boven begrensde verzameling hoeft niet altijd een maximaal element te bezitten, zoals uit het bovenstaande voorbeeld (b) blijkt. Wel geldt het volgende resultaat.

Stelling 3.37 *Zij A een naar boven begrensde niet-lege deelverzameling van $\mathbb{R}$. Dan heeft de verzameling* $\text{bov}(A)$ *een (uniek) kleinste element s. Hiervoor geldt dat* $\text{bov}(A) = [s, \infty\,[$.

We zullen dit resultaat afleiden uit het volledigheidsaxioma, Axioma 3.26. In Paragraaf 3.5 zullen we laten zien dat omgekeerd het volledigheidsaxioma uit Stelling 3.37 afgeleid kan worden. De stelling kan dus opgevat worden als een alternatieve formulering van het volledigheidsaxioma.

Het volgende lemma dient ter voorbereiding op het bewijs van Stelling 3.37.

Lemma 3.38 *Laat A een niet-lege naar boven begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$ zijn, a een element van A en $b \in \operatorname{bov}(A)$ een bovengrens van A. Dan bestaan er elementen $a' \in A$ en $b' \in \operatorname{bov}(A)$ zo dat*

$$a \leq a' \leq b' \leq b, \qquad en \qquad |b' - a'| \leq \frac{1}{2}|b - a|. \tag{3.5}$$

Bewijs: Zij c het gemiddelde van a en b, dus $c = \frac{1}{2}(a+b)$. Dan is $[a,b] = [a,c] \cup [c,b]$. Er zijn nu twee mogelijkheden, namelijk (i) $A \cap [c,b] = \emptyset$ of (ii) $A \cap [c,b] \neq \emptyset$. In geval (i) geldt voor alle $x \in A$ dat $x \leq b$ en bovendien $x \notin [c,b]$, dus $x < c$. Hieruit volgt dat $a \in A \subset]-\infty, c]$, dus het paar $(a', b') = (a, c)$ voldoet aan de eisen. In geval (ii) bestaat er een $d \in A \cap [c,b]$ en aangezien

$$0 \leq b - d \leq b - c = \frac{1}{2}(b - a),$$

voldoet het paar $(a', b') = (d, b)$ aan de eisen. □

Bewijs van Stelling 3.37: We kiezen inductief een dalende rij van segmenten $I_n = [a_n, b_n]$, met de eigenschap dat $a_n \in A$ en $b_n \in \operatorname{bov}(A)$, voor $n \in \mathbb{N}$, als volgt. Kies $a_0 \in A$ (dit kan, want $A \neq \emptyset$) en $b_0 \in \operatorname{bov}(A)$ (dit kan ook, want A is naar boven begrensd). Schrijf $I_0 := [a_0, b_0]$. Veronderstel dat de segmenten $I_0, \ldots, I_n$ reeds gekozen zijn. Dan kiezen we I_{n+1} als volgt. Op grond van Lemma 3.38, met $a = a_n$ en $b = b_n$, bestaan er $a' \in A$ en $b' \in \operatorname{bov}(A)$ zo dat $[a', b'] \subset [a_n, b_n]$ en $0 \leq b' - a' \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n)$. Zij $a_{n+1} = a'$, $b_{n+1} = b'$ dan voldoet $I_{n+1} := [a_{n+1}, b_{n+1}]$ aan de genoemde eisen.

Met inductie zien we in dat $0 \leq l(I_n) \leq 2^{-n}(b_0 - a_0)$, voor alle $n \in \mathbb{N}$. Door gebruik te maken van Lemma 3.23 en de insluitstelling, Lemma 3.20, vinden we dat

$$\lim_{n \to \infty} l(I_n) = 0.$$

Met Lemma 3.28 volgt nu dat de rijen (a_n) en (b_n) convergeren met dezelfde limiet s.

Zij $x \in A$ willekeurig. Dan geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$ dat $x \leq b_n$. Met Lemma 1.33 leiden we af dat $x \leq s$. Aangezien x willekeurig was hebben we aangetoond dat $s \in \operatorname{bov}(A)$.

Zij β een bovengrens van A. Dan volgt uit $a_n \in A$ dat $a_n \leq \beta$, voor alle $n \in \mathbb{N}$. Met Lemma 1.33 volgt nu dat $s \leq \beta$. We concluderen dat s het kleinste element van $\operatorname{bov}(A)$ is. Dus $\operatorname{bov}(A) \subset [s, \infty[$. Voor de omgekeerde inclusie merken we op dat $s \in \operatorname{bov}(A)$. Hieruit volgt direct dat $[s, \infty[\subset \operatorname{bov}(A)$. □

Definitie 3.39 Zij $A \subset \mathbb{R}$. Is $\operatorname{bov}(A) \neq \emptyset$ en heeft $\operatorname{bov}(A)$ een kleinste element, dan noemen we dit element het *supremum* of *de kleinste bovengrens* van A; notatie $\sup A$.

Is $\operatorname{ond}(A) \neq \emptyset$ en heeft $\operatorname{ond}(A)$ een grootste element, dan noemen we dit element het *infimum* of *de grootste ondergrens* van A; notatie $\inf A$.

Opmerking 3.40 Het unieke element s uit Stelling 3.37 is dus het supremum van A en wordt in het vervolg genoteerd met $\sup A$.

Gevolg 3.41 *Zij A een naar onderen begrensde, niet-lege deelverzameling van $\mathbb{R}$. Dan heeft A een infimum* $\inf A$. *Er geldt* $\mathrm{ond}(A) =]-\infty, \inf A]$.

Bewijs: We leiden dit resultaat af uit Stelling 3.37. De verzameling $B = -A := \{-x \mid x \in A\}$ is niet leeg en naar boven begrensd. Dus $\mathrm{bov}(B) = [s, \infty[$ met $s = \sup B$. Er geldt dat $\mathrm{ond}(A) = -\mathrm{bov}(B) =]-\infty\,, -s]$, dus $\mathrm{ond}(A)$ heeft $-s$ als grootste element en we concluderen dat $\inf A = -s$. □

Opmerking 3.42 Zij A een naar boven begrensde niet-lege deelverzameling van $\mathbb{R}$ en zij $s = \sup A$. Dan is $A \subset]-\infty, s]$. Anderzijds is $\mathrm{bov}(A) = [s, \infty[$. Er zijn nu twee mogelijkheden, namelijk $s \in A$ en $s \notin A$. In het eerste geval is $A \cap \mathrm{bov}(A) = \{s\}$, en we zien dat A het element s als maximum heeft. In het tweede geval is $A \cap \mathrm{bov}(A) = \emptyset$, dus A heeft geen maximum.

Voor een naar onder begrensde niet-lege deelverzameling van $\mathbb{R}$ gelden soortgelijke opmerkingen met betrekking tot inf en min .

Lemma 3.43 *Zij A een naar boven begrensde niet-lege deelverzameling van $\mathbb{R}$. Het getal $s = \sup A$ is een limietpunt van A.*

Bewijs: Zij $\delta > 0$. Dan is $s - \delta$ strikt kleiner dan de kleinste bovengrens van A, dus $s - \delta \notin \mathrm{bov}(A)$. Derhalve is er een $a \in A$ met $a > s - \delta$. Anderzijds is $a \leq s$, dus $a \in]s - \delta, s]$ en we zien dat $A \cap B(s; \delta) \neq \emptyset$. □

Voorbeeld 3.44 We beschouwen de verzamelingen uit Voorbeeld 3.34 (a)-(d).

(a) $A = [0, 1]$. Er geldt $\max A = 1$, dus ook $\sup A = 1$.

(b) $A = [0, 1[$. Het getal 1 is een bovengrens van A. We zullen laten zien dat het tevens de kleinste bovengrens is, dwz het kleinste element van $\mathrm{bov}(A)$. Veronderstel dat $b \in \mathrm{bov}(A)$. Uit $0 \in A$ volgt $b \geq 0$. Als $b < 1$, dan bestaat er een $x \in \mathbb{R}$ met $b < x < 1$. Er geldt $0 \leq b < x < 1$, dus $x \in [0, 1[= A$, in tegenspraak met het feit dat $b \in \mathrm{bov}(A)$. We concluderen dat $b \geq 1$. Derhalve is 1 het kleinste element van $\mathrm{bov}(A)$, dus $\sup A = 1$.

(c) $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. In dit geval is 0 een ondergrens van A. Is c een ondergrens van A dan geldt dat $c \leq \frac{1}{n}$ voor alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Hieruit volgt dat $c \leq 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$. Dus 0 is de grootste ondergrens van A, ofwel $\inf A = 0$.

(d) $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. In dit geval is $\min A = 0$, dus ook $\inf A = 0$.

Voorbeeld 3.45 We beschouwen de verzameling

$$A := \{x \in [0, \infty[\ \mid \ x^2 < 2\}.$$

Uit $x \geq 2$ volgt dat $x^2 \geq 4$ dus $x \notin A$. Hieruit volgt dat $2 \in \mathrm{bov}(A)$; in het bijzonder is A naar boven begrensd. Voorts is $0 \in A$, dus $A \neq \emptyset$. We concluderen dat $s = \sup A$ bestaat. Uit $0 \in A$ volgt dat $s \geq 0$. Uit Lemma 3.43 volgt dat er voor iedere $n \in \mathbb{N}$ een $a_n \in A$ bestaat met $s - \frac{1}{n} < a_n \leq s$. Hieruit volgt dat $\lim_{n\to\infty} a_n = s$, dus ook $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = s^2$. Uit $a_n^2 < 2$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ volgt met Lemma 3.19 dat $s^2 \leq 2$.

Veronderstel dat $s^2 < 2$; we zullen laten zien dat deze veronderstelling tot een tegenspraak leidt. Uit de veronderstelling volgt dat $\lim_{n\to\infty}(s + 1/n)^2 = s^2 < 2$, dus voor n voldoende groot geldt $(s + \frac{1}{n})^2 < 2$, dus $s + \frac{1}{n} \in A$, in tegenspraak met het feit dat $s = \sup A$. We zien dat $s^2 \leq 2$, terwijl niet kan gelden $s^2 < 2$; derhalve is $s^2 = 2$, dus $s = \sqrt{2}$.

3.4 Toepassing: de tussenwaardestelling

Een fraaie toepassing van Stelling 3.37 is de volgende tussenwaardestelling voor continue functies, die een belangrijke rol speelt op tal van plaatsen in de analyse.

Stelling 3.46 (De tussenwaarde- of doorlopendheidsstelling voor continue functies)
Zij $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ en zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een continue functie. Stel dat $\gamma \in \mathbb{R}$ en dat $f(a) \leq \gamma \leq f(b)$. Dan bestaat er een $c \in [a, b]$ met $f(c) = \gamma$. In woorden: de functie f neemt op $[a, b]$ de waarde γ aan.

Bewijs: Is $\gamma = f(b)$, dan kunnen we $c = b$ nemen en zijn we klaar. We mogen ons daarom beperken tot het geval dat $\gamma < f(b)$. Zij A de verzameling van punten $x \in [a, b]$ met $f(x) \leq \gamma$. Dan is $a \in A$, dus A is een niet-lege naar boven begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$. Hieruit volgt met Stelling 3.37 dat A een kleinste bovengrens $c = \sup A$ heeft. Uit $a \in A$ en $b \in \mathrm{bov}(A)$ volgt $c \in [a, b]$. We zullen aantonen dat $f(c) \leq \gamma$ en dat $f(c) \geq \gamma$. Hieruit zal dan volgen dat $f(c) = \gamma$.

Er geldt dat $A = f^{-1}(]-\infty, \gamma])$; de verzameling $]-\infty, \gamma]$ is gesloten en f is continu, dus A is gesloten in $[a, b]$. Wegens Lemma 3.43 is c een limietpunt van A. Dus $c \in A$ en we concluderen dat dat $f(c) \leq \gamma$. In het bijzonder volgt uit het bovenstaande dat $f(c) \leq \gamma < f(b)$, dus $c \neq b$. De verzameling $]c, b]$ is dus niet leeg.

We beschouwen de verzameling $B = \{x \in [a, b] \mid f(x) \geq \gamma\}$. Met eenzelfde argumentatie als boven zien we dat B een gesloten deelverzameling van $[a, b]$ is. Voor $x > c$ geldt $x \notin A$, dus $f(x) > \gamma$, dus $x \in B$. We concluderen dat $]c, b]$ bevat is in B. Hieruit volgt dat c een limietpunt van B is, dus tot B behoort. We concluderen dat $f(c) \geq \gamma$. □

Opmerking 3.47 In het bovenstaande resultaat is impliciet verondersteld dat $f(a) \leq f(b)$. Indien $f(a) \geq f(b)$, dan geldt voor iedere $\gamma \in \mathbb{R}$ met $f(b) \leq \gamma \leq f(a)$ eveneens dat er een $c \in [a, b]$ bestaat met $f(c) = \gamma$. Dit is in te zien door het bovenstaande resultaat toe te passen op de functie $g : [a, b] \to \mathbb{R}, x \mapsto -f(x)$. Er geldt dat g continu is, terwijl $g(a) \leq -\gamma \leq g(b)$. Wegens Stelling 3.46, toegepast op de functie g, bestaat derhalve een $c \in [a, b]$ met $g(c) = -\gamma$. Er volgt dat $f(c) = -g(c) = \gamma$.

Voorbeeld 3.48 De tussenwaardestelling is zo nuttig omdat hij garandeert dat tal van 'continue vergelijkingen' oplossingen hebben. Als voorbeeld hiervan beschouwen we de vergelijking $x^3 = \gamma$ met $\gamma \in \mathbb{R}$ gegeven.

Definieer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$. Dan is f een continue functie. Kies $N \in \mathbb{N}$ zo dat $-N \leq \gamma \leq N$. Omdat $N \leq N^3$ geldt tevens $-N^3 \leq \gamma \leq N^3$, ofwel $f(-N) \leq \gamma \leq f(N)$. Met behulp van de tussenwaardestelling concluderen we dat er een $c \in [-N, N]$ bestaat met $c^3 = f(c) = \gamma$.

We kunnen nog opmerken dat het bovenstaande impliceert dat f surjectief is. Anderzijds geldt $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, dus f is ook injectief. We concluderen dat f een bijectie is van $\mathbb{R}$ op $\mathbb{R}$. Dit geeft ons de mogelijkheid de functie $x \mapsto x^{1/3}$ te definiëren als inverse van de functie f.

Voorbeeld 3.49 Op soortgelijke manier kunnen we aantonen dat de functie $k : [0, \infty[\to [0, \infty[\,, x \mapsto x^2$ surjectief is. Zij immers $N \in \mathbb{N}$. Dan is $N \leq N^2$, dus $k(0) = 0$ en $k(N) \geq N$. Met de tussenwaardestelling volgt nu dat $k([0, N]) \supset [0, N]$ voor alle $N \in \mathbb{N}$. Hieruit blijkt de surjectiviteit van k.

Uit het feit dat k monotoon strikt stijgend is, d.w.z. $x_1 < x_2 \Rightarrow k(x_1) < k(x_2)$ voor alle $x_1, x_2 \geq 0$, volgt dat k injectief is. De functie k is dus een bijectie van $[0, \infty[$ op zichzelf. De inverse van deze functie noemen we de *wortelfunctie* en noteren we met $x \mapsto \sqrt{x}$. Uit de monotonie van k volgt dat de wortelfunctie monotoon strikt stijgend is. Later zullen we zien dat uit de continuïteit van k tevens de continuïteit van de wortelfunctie volgt; zie Stelling 5.6.

3.5 Monotone rijen

Uit Stelling 3.37 zullen we een nuttig resultaat afleiden over de convergentie van naar boven begrensde monotoon stijgende rijen in $\mathbb{R}$. We beginnen met het precies vastleggen van enige noodzakelijke begrippen.

Een rij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heet naar *naar boven begrensd* indien de verzameling $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ een naar boven begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$ is, maw. als er een $b \in \mathbb{R}$ bestaat zo dat

$$a_n \leq b \quad \text{voor alle} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.6}$$

Een dergelijke b heet een bovengrens van de rij (a_n).

Een rij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heet *monotoon stijgend* als $a_n \leq a_{n+1}$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

Stelling 3.50 *Zij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een monotoon stijgende rij in $\mathbb{R}$ die naar boven begrensd is. Dan is (a_n) convergent. Voorts is*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Bewijs: Schrijf $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dan is A niet-leeg en naar boven begrensd, dus $s = \sup A$ bestaat. Zij $\varepsilon > 0$. Wegens Lemma 3.43 is s een limietpunt van A, dus $A \cap B(s; \varepsilon) \neq \emptyset$. Derhalve bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ met $a_N \in B(s; \varepsilon) =]\, s - \varepsilon, s + \varepsilon\,[$. Hieruit volgt, voor iedere $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq N$, dat $s - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq s$, dus $d(a_n, s) < \varepsilon$. We concluderen dat $\lim_{n \to \infty} a_n = s$. □

Een soortgelijk resultaat als het bovenstaande geldt ook voor dalende rijen. Een rij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heet *monotoon dalend* als $a_n \geq a_{n+1}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. De rij (a_n) heet *naar onderen begrensd* als er een $c \in \mathbb{R}$ bestaat zo dat $a_n \geq c$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Gevolg 3.51 *Zij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een rij in $\mathbb{R}$. Is de rij (a_n) monotoon dalend en naar onderen begrensd, dan is hij convergent. Voorts is*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Bewijs: Veronderstel dat de rij (a_n) monotoon dalend is en naar onderen begrensd. Definieer de rij $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ door $b_n = -a_n$. Dan is (b_n) monotoon stijgend en naar boven begrensd. Met Stelling 3.50 volgt dat (b_n) convergeert; schrijf $b := \lim_{n \to \infty} b_n$. Dan is b gelijk aan het supremum van de verzameling $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dan geldt dat $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty}(-b_n) = -b$ wegens Lemma 3.14. Uit de definitie van sup en inf leidt men gemakkelijk na dat $-b = \inf A$, waarbij $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = -B$. □

Opmerking 3.52 Uit Stelling 3.50 kunnen we Axioma 3.26 weer afleiden, als volgt. Zij $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een dalende rij segmenten. Schrijf $I_n = [a_n, b_n]$, voor $n \in \mathbb{N}$. Dan is $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een monotoon stijgende rij die bevat is in I_0, dus naar boven begrensd is. De rij is convergent wegens de bovenstaande stelling. Zij $a = \lim_{n\to a_n} a_n$. Op soortgelijke wijze zien we dat de rij (b_n) een limiet b heeft. Uit $a_n \leq b_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ volgt $a \leq b$, wegens Lemma 3.19. Er geldt dat $a_n \leq a \leq b \leq b_n$, dus $I_n \supset I := [a, b]$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Derhalve bevat de doorsnede $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ het segment I; in het bijzonder is de doorsnede niet leeg.

We zien hieraan dat de Stellingen 3.37 en Stelling 3.50 equivalent zijn met het volledigheidsaxioma, Axioma 3.26.

Opgave 3.53 Toon zelf aan dat in de bovenstaande opmerking geconcludeerd kan worden dat $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n = I$.

Voorbeeld 3.54 We beschouwen weer een oneindig voortlopende decimale ontwikkeling van de vorm $d_k \dots d_0, d_{-1} d_{-2} \dots$, met $d_j \in \{0, 1, \dots, 9\}$, voor alle $j \leq k$. We definiëren een rij reële getallen (a_n) door

$$a_n := d_k \dots d_0, d_{-1} \dots d_{-n}, \qquad (n \geq 1).$$

Er geldt $a_{n+1} = a_n + d_{-(n+1)} \cdot 10^{-(n+1)}$, dus de rij (a_n) is monotoon stijgend. Voorts is $a_n \leq d_k \dots d_0 + 1$, dus de rij (a_n) is naar boven begrensd. Met behulp van de bovenstaande stelling concluderen we nu dat de rij (a_n) convergeert. Eerder bewezen we dit direct uit Lemma 3.28. Hieraan koppelden we de definitie

$$d_k \dots d_0, d_{-1} \dots := \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Voorbeeld 3.55 We beschouwen de reële rij $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gedefinieerd door

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Voor elke $n \geq 0$ geldt $s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(n+1)!} \geq s_n$; de rij (s_n) is derhalve monotoon stijgend. We zullen aantonen dat de rij (s_n) naar boven begrensd is door $M = 3$. Hiertoe merken we op dat $s_0 = 1$, $s_1 = 2$. Voor $n \geq 1$ geldt $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \geq 2 \cdot 2 \cdots 2$ ($n - 1$ factoren), dus $n! \geq 2^{n-1}$, dus ook $1/n! \leq 2^{1-n}$. We concluderen dat, voor $n \geq 0$, $s_{n+1} = s_n + 1/(n+1)! \leq s_n + 2^{-n}$. Met inductie volgt hieruit dat, voor alle $n \geq 1$,

$$s_n \leq 3 - 2^{1-n}$$

(ga na!). Hieruit volgt dat $s_n \leq 3$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Met behulp van Stelling 3.50 concluderen we nu dat de rij $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert. We definiëren

$$e := \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}. \tag{3.7}$$

Het is gebruikelijk de limiet in het rechterlid te noteren met $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ of met de suggestieve uitdrukking $1/0! + 1/1! + 1/2! + \cdots$. Dus

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots.$$

We hebben nu voldoende theorie ontwikkeld om het volgende fraaie resultaat te bewijzen.

Lemma 3.56 *Het getal e, gedefinieerd door (3.7) is irrationaal.*

Bewijs: Als voorbereiding geven we een schatting van de rest-term

$$r_N := e - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}.$$

Omdat de rij (s_n) in (3.7) strikt monotoon stijgend is geldt dat $e > s_N > 0$, dus ook $r_N = e - s_N > 0$.

Zij $N \geq 1$. Dan geldt voor alle $k > N$ dat $k! \geq (N+1)^{k-N} N! \geq 2^{k-N} N!$. Derhalve geldt voor $n \geq N+3$ dat

$$\begin{aligned}
\sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{k!} &\leq \frac{1}{N!}\left[\frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+1)(N+2)} + \sum_{k=N+3}^{n} \frac{1}{2^{(k-N)}}\right] \\
&\leq \frac{1}{N!}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \sum_{l=3}^{n-N} 2^{-l}\right] \\
&= \frac{1}{N!}\left[(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \sum_{l=3}^{n-N} 2^{-l}\right] \\
&= \frac{1}{N!}\left[-\frac{1}{12} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots \frac{1}{2^{n-N}}\right] \\
&\leq \frac{1}{N!}\left[1 - \frac{1}{12}\right].
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \leq \frac{11}{12}\frac{1}{N!}$$

en door de limiet te nemen voor $n \to \infty$ zien we dat $r_N \leq 11/12N!$, dus

$$0 < r_N < \frac{1}{N!} \qquad (N \geq 1). \tag{3.8}$$

We veronderstellen nu dat e rationaal is en voltooien het bewijs door een tegenspraak met de schatting (3.8) af te leiden. We zagen reeds dat $e > 0$, dus e is te schrijven als breuk van de vorm p/N met $p \geq 1$ en $N \geq 1$. Er volgt dat

$$e = \frac{p(N-1)!}{N!}.$$

Iedere breuk van de vorm $1/k!$, met $k \leq N$ kunnen we herschrijven als breuk van de vorm $p_k/N!$, met $p_k = (k+1)\cdots N$. Hieruit volgt dat

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} = \frac{p'}{N!}$$

voor een natuurlijk getal p'. We concluderen dat

$$r_N = \frac{p(N-1)! - p'}{N!}.$$

We weten dat $r_N > 0$, dus de teller van de bovenstaande breuk moet een positief geheel getal zijn. Hieruit volgt dat $r_N \geq \frac{1}{N!}$, hetgeen de gewenste tegenspraak met (3.8) oplevert. □

Voorbeeld 3.57 We beschouwen de reële rij $(s_n)_{n\geq 1}$ gedefinieerd door

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Uit $s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(n+1)^2}$ leiden we af dat de rij monotoon stijgend is. We zullen aantonen dat de rij naar boven begrensd is door 2. Hiertoe merken we op dat

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{n\cdot n} \\ &\leq 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} \\ &= 1 + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 2 - \frac{1}{n} \leq 2. \end{aligned}$$

We concluderen dat $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} := \lim_{n\to\infty} s_n$ bestaat. Later zullen we kunnen aantonen dat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Voorbeeld 3.58 Een snelle benadering van $\sqrt{2}$.
We beschouwen de functie $f : x \mapsto x^2 - 2, \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. De afgeleide van deze functie wordt

gegeven door $f'(x) = 2x$. Is $\xi \in \mathbb{R}$ dan wordt de raaklijn aan de grafiek van f door het punt $(\xi, f(\xi))$ gegeven door de vergelijking

$$y = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi).$$

Deze lijn snijdt de x-as in het punt $(x, 0)$ dat bepaald wordt door de vergelijking $0 = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$. Hieruit leiden we af dat

$$x = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)},$$

dus dat

$$x = \frac{1}{2}(\xi + \frac{2}{\xi}).$$

We definiëren, geïnspireerd door deze formule, de rij $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ door $x_0 = 2$ en door

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{2}{x_k}). \tag{3.9}$$

Maak een plaatje waaruit de meetkundige betekenis van de definitie van deze rij blijkt. Op grond van het plaatje vermoeden we dat (x_k) een dalende rij is die convergeert naar $\sqrt{2}$. We zullen bewijzen dat dit inderdaad het geval is.

Met enig rekenwerk zien we in dat

$$x_k > \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} < x_{k+1} < x_k.$$

Aangezien $x_0 > \sqrt{2}$ volgt hieruit met inductie dat de rij $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monotoon dalend is en $\sqrt{2}$ als ondergrens heeft. We concluderen dat $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent is met een limiet die we x noemen. Merk op dat $x \geq \sqrt{2}$, wegens Lemma 3.19. Merk verder op dat uit $x = \lim_{k\to\infty} x_k$ ook volgt dat

$$\lim_{k\to\infty} x_{k+1} = x.$$

Uit (3.9) volgt dat

$$x = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}(x_k + \frac{2}{x_k}) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x}).$$

Hieruit volgt weer dat $2x^2 = x^2 + 2$, dus $x^2 = 2$, dus $x \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$. We zagen reeds dat $x \geq \sqrt{2}$ en concluderen dat $x = \sqrt{2}$.

Merk op dat uit de bovenstaande redenering blijkt dat de keuze van de startwaarde x_0 tamelijk arbitrair is. Het is slechts nodig dat $x_0 > \sqrt{2}$.

Opmerking 3.59 De in het bovenstaande voorbeeld beschreven benaderingsmethode, die bekend staat als de *methode van Newton* werkt voor de benadering van nulpunten van algemenere functies f. De methode is verrassend efficiënt.

Hoofdstuk 4

Maxima en minima

4.1 Inleiding

Dit hoofdstuk staat in het teken van de volgende stelling, die opgevat kan worden als een van de belangrijkste resultaten van de analyse. Een verzameling $V \subset \mathbb{R}^n$ heet *begrensd* als er een $R > 0$ bestaat zo dat V bevat is in de bol $B(0; R)$.

Stelling (Maximum-minimum stelling) *Zij V een niet-lege begrensde en gesloten deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ en $f : V \to \mathbb{R}$ een continue functie. Dan neemt f op V zijn maximum en zijn minimum aan, d.w.z., er zijn punten $p, q \in V$ zo dat*

$$f(p) \leq f(x) \leq f(q)$$

voor alle $x \in V$.

De bovenstaande stelling is in het bijzonder ook van belang als $n = 1$ en als V een gesloten en begrensd interval van de vorm $[a, b]$ is. Toepassingen van dit bijzondere geval zullen in het volgende hoofdstuk behandeld worden.

Doel van dit hoofdstuk is een bewijs van de bovenstaande stelling te geven. Hiertoe bewijzen we eerst een vorm van de volledigheidsstelling die gemakkelijk te generaliseren is naar $\mathbb{R}^n$, de zogenaamde Stelling van Bolzano-Weierstrass (Stelling 4.5). Met behulp daarvan zullen we de maximum-minimum stelling kunnen bewijzen. Verderop in dit dictaat zullen we tevens andere toepassingen van de Stelling van Bolzano-Weierstrass behandelen.

4.2 De Stelling van Bolzano-Weierstrass

Een deelverzameling A van $\mathbb{R}^p$ $(p \geq 1)$ heet *begrensd* als er een $R > 0$ bestaat zo dat $A \subset B(0; R)$, met andere woorden als $\|a\| < R$ voor alle $a \in A$. Een rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^p$ heet begrensd als de bijbehorende verzameling $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^p$ begrensd is, met andere woorden, als er een $R > 0$ bestaat zo dat

$$\|a_n\| < R \qquad \text{voor alle} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Voor de formulering van de stelling van Bolzano-Weierstrass hebben we het begrip deelrij van een rij nodig.

Definitie 4.1 Zij (V, d) een metrische ruimte en $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in V. Onder een *deelrij* van (a_n) verstaan we een rij van de vorm $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, met $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ een rij in $\mathbb{N}$ die strikt monotoon stijgend is, d.w.z. $n_k < n_{k+1}$ voor alle $k \geq 0$.

Voorbeeld 4.2 (a) We beschouwen de rij $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$ in $\mathbb{R}$. Hiervan is $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \ldots$ een deelrij. Immers schrijf $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$, dan is de eerste rij gelijk aan $(a_n)_{n\geq 1}$. De tweede rij wordt gegeven door $(a_{n_k})_{k\geq 1}$, met $n_k = 2k$. Aangezien $(2k)_{k\geq 1}$ een strikt monotoon stijgende rij in $\mathbb{N}$ is, is de tweede rij een deelrij van de eerste.

(b) We beschouwen de rij $1, -1, 1, -1, \ldots$. Schrijven we $a_n = (-1)^n$, dan is deze rij gelijk aan $(a_n)_{n\geq 0}$. Schrijven we $n_k = 2k + 1$ $(k \geq 0)$, dan is $(n_k)_{k\geq 0}$ een strikt monotoon stijgende rij van indices. Een deelrij van de bovenstaande rij is dus de rij $(a_{n_k})_{k\geq 0}$, ofwel de constante rij $-1, -1, \ldots$.

Het volgende lemma ligt voor de hand.

Lemma 4.3 *Zij (V, d) een metrische ruimte en $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een convergente rij met limiet a in V. Dan is iedere deelrij van $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ook convergent met limiet a.*

Bewijs: Zij $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ een deelrij van $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dan is $b_k = a_{n_k}$, met $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ een strikt monotoon stijgende rij in $\mathbb{N}$. Uit het strikt monotoon stijgend zijn van de laatsgenoemde rij volgt met inductie dat $n_k \geq k$ voor alle $k \in \mathbb{N}$.

Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Er bestaat een $N \in \mathbb{N}$ zo dat voor $n > N$ geldt $d(a_n, a) < \varepsilon$. Voor alle $k \in \mathbb{N}$ met $k > N$ geldt $n_k \geq k > N$, dus $d(b_k, a) = d(a_{n_k}, a) < \varepsilon$. We concluderen dat $\lim_{k\to\infty} b_k = a$. □

Lemma 4.4 *Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in $\mathbb{R}^p$. Als de rij (a_n) convergent is, dan is hij begrensd.*

Bewijs: Stel dat (a_n) convergent is met limiet $a \in \mathbb{R}^p$. Uit de definitie van limiet volgt het bestaan van een $N \in \mathbb{N}$ zo dat voor alle $n \geq N$ geldt $a_n \in B(a; 1)$; hieruit volgt met de driehoeksongelijkheid $\|a_n\| \leq \|a_n - a\| + \|a\| < 1 + \|a\|$. Kies nu $M > \max\{\|a_0\|, \ldots, \|a_{N-1}\|, 1 + \|a\|\}$, dan geldt voor alle $n \in \mathbb{N}$ dat $\|a_n\| < M$. □

Het omgekeerde van dit resultaat is niet geldig. Zo is de rij $1, -1, 1, -1, \ldots$ wel begrensd, maar niet convergent. Verrassend genoeg geldt wel het volgende resultaat.

Stelling 4.5 (Bolzano-Weierstrass) *Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in $\mathbb{R}^p$. Als de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ begrensd is, dan heeft hij een convergente deelrij.*

Opmerking 4.6 In het vervolg zullen we zien dat de stelling van Bolzano-Weierstrass gelijkwaardig is met het volledigheidsaxioma, Axioma 3.26. Het fraaie van de bovenstaande formulering, met $p = 1$, is, dat de ordening van $\mathbb{R}$ geen enkele rol speelt. Dit maakt dat de formulering direct te geven is voor rijen in de ruimte $\mathbb{R}^p$, waarop geen natuurlijke ordening bestaat.

We zullen de Stelling van Bolzano-Weierstrass bewijzen met inductie naar p. In het geval $p = 1$ berust het resultaat op een toepassing van Axioma 3.26.

Bewijs van Stelling 4.5 voor $p = 1$:

Laat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een begrensde rij in $\mathbb{R}$ zijn. Dan is er een $R > 0$ zo dat $a_n \in I_0 := [-R, R]$. In het vervolg zal het handig zijn voor een deelverzameling $J \subset \mathbb{R}$ de volgende notatie te hanteren:

$$\mathcal{N}(J) := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in J\};$$

in woorden: $\mathcal{N}(J)$ is de collectie van indices $n \in \mathbb{N}$ waarvoor a_n in de verzameling J ligt.

Merk op dat $\mathcal{N}(I_0) = \mathbb{N}$, dus $\mathcal{N}(I_0)$ is een oneindige verzameling. We geven nu een inductieve definitie van een dalende rij segmenten $I_k = [\alpha_k, \beta_k],\ k \geq 0$, zo dat $\mathcal{N}(I_k)$ oneindig is voor elke k.

Het interval I_0 is hierboven reeds gedefinieerd. Er geldt $\alpha_0 = -R,\ \beta_0 = R$ en $\mathcal{N}(I_0)$ is oneindig. Veronderstel dat $I_0, \ldots, I_k$ reeds gedefinieerd zijn, dan definiëren we het interval I_{k+1} als volgt. We verdelen het interval I_k in twee gelijke stukken: $I_k = I_k^1 \cup I_k^2$, met $I_k^1 = [\alpha_k, \gamma_k]$ en $I_k^2 = [\gamma_k, \beta_k]$; hierin is $\gamma_k = \frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k)$, het gemiddelde van α_k en β_k. Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ met $a_n \in I_k$ geldt $a_n \in I_k^1$ of $a_n \in I_k^2$; derhalve is $\mathcal{N}(I_k) = \mathcal{N}(I_k^1) \cup \mathcal{N}(I_k^2)$. Aangezien $\mathcal{N}(I_k)$ oneindig is, is er minstens één $i \in \{1, 2\}$ waarvoor $\mathcal{N}(I_k^i)$ oneindig is. We kiezen de kleinste i waarvoor dit geldt, en definiëren $I_{k+1} = I_k^i$. Het linkereindpunt van dit interval noemen we α_{k+1}, het rechtereindpunt β_{k+1}. Nu geldt $I_k \supset I_{k+1}$, terwijl $\mathcal{N}(I_{k+1})$ oneindig is.

Met inductie zien we dat voor alle $k \geq 0$ geldt dat $l(I_k) \leq 2^{1-k}R$, en wegens Lemma 3.23 volgt hieruit dat $\lim_{k\to\infty} l(I_k) = 0$. Wegens Lemma 3.28 volgt hieruit dat de rijen (α_k) en (β_k) convergeren, met dezelfde limiet $x \in \cap_{k\in\mathbb{N}} I_k$.

Nu zijn we dan eindelijk zo ver dat we inductief een deelrij van (a_n) kunnen definiëren die convergent is, en wel met limiet x. We definiëren een rij $(n_k)_{k\geq 0}$ in $\mathbb{N}$ inductief als volgt. Als startwaarde nemen we $n_0 = 0$, en voor $k \geq 0$ definiëren we n_{k+1} als het kleinste element n van $\mathcal{N}(I_{k+1})$ dat voldoet aan $n > n_k$ (dit element bestaat aangezien $\mathcal{N}(I_{k+1})$ oneindig is).

Uit de bovenstaande definitie volgt dat $n_k < n_{k+1}$ voor alle $k \in \mathbb{N}$. Tevens is $n_k \in \mathcal{N}(I_k)$, dus $a_{n_k} \in I_k$, ofwel:

$$\alpha_k \leq a_{n_k} \leq \beta_k$$

voor alle $k \in \mathbb{N}$. Met de insluitstelling volgt nu dat de rij $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent is, met limiet x. Dit is een convergente deelrij van de oorspronkelijke rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

Voltooiing van het bewijs van Stelling 4.5.

We voltooien het bewijs door inductie naar p. Voor $p = 1$ is de stelling reeds bewezen. Veronderstel nu dat $q \geq 1$ en dat de stelling reeds bewezen is voor $p \leq q$. Dan zullen we laten zien dat de stelling geldt voor $p = q + 1$.

Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een begrensde rij in $\mathbb{R}^{q+1}$. Is $x \in \mathbb{R}^{q+1}$ dan schrijven we $x' = (x_1, \ldots, x_q)$ en $x'' = x_{q+1}$. Met deze definitie geldt $x = (x', x'')$. We merken op dat uit de orthogonaliteit van $(x', 0)$ en $(0, x'')$ volgt dat $\|x\|^2 = \|(x', 0)\|^2 + \|(0, x'')\|^2 = \|x'\|^2 + |x''|^2$, dus

$$\|x'\| \leq \|x\| \qquad \text{en} \qquad |x''| \leq \|x\|.$$

Passen we deze ongelijkheden toe op a_n dan zien we dat de rij $(a_n')_{n\in\mathbb{N}}$ begrensd is in $\mathbb{R}^q$, terwijl $(a_n'')_{n\in\mathbb{N}}$ begrensd is in $\mathbb{R}$. Aangezien de stelling reeds bewezen is voor $p = q$, heeft de rij $(a_n')_{n\in\mathbb{N}}$ een convergente deelrij. Er is dus een strikt monotoon stijgende rij $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ van indices, zo dat

(a'_{n_k}) convergent is, zeg met limiet $\alpha' \in \mathbb{R}^q$. De rij $(a''_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ hoeft nu niet convergent te zijn, maar is een deelrij van de rij $(a''_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dus in ieder geval begrensd. Aangezien de stelling reeds bewezen is voor $p = 1$, heeft de rij $(a''_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ook een convergente deelrij. Er is dus een strikt monotoon stijgende rij $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ van indices zo dat de rij $(a''_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ convergent is, zeg met limiet $\alpha'' \in \mathbb{R}$. De rij $(a'_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ is deelrij van de convergente rij $(a'_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, dus convergent met dezelfde limiet α'. Door toepassing van Lemma 3.18 concluderen we nu dat de rij $(a_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ convergent is met limiet $\alpha := (\alpha', \alpha'')$. Deze rij is de gewenste convergente deelrij. □

Opmerking 4.7 In het bewijs van de Stelling van Bolzano-Weierstrass in $\mathbb{R}$ speelt Axioma 3.26 en haar gevolg, Lemma 3.28, een fundamentele rol. We zullen hieronder aantonen dat omgekeerd Axioma 3.26 af te leiden is uit de stelling van Bolzano-Weierstrass. Veronderstel dat de laatste stelling geldt.

Zij $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een dalende rij segmenten in $\mathbb{R}$. Schrijf $I_n = [a_n, b_n]$, voor $n \in \mathbb{N}$. Dan is $a_n \in I_0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$; de rij (a_n) is dus begrensd en heeft een convergente deelrij $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Zij x de limiet van deze deelrij.

Zij $m \in \mathbb{N}$ willekeurig. Dan geldt voor $k > m$ dat $n_k \geq k > m$, dus $a_{n_k} \geq a_m$. Met Lemma 3.19 volgt hieruit dat $x \geq a_m$. Anderzijds geldt voor elke $k > m$ dat $n_k > m$, dus $b_{n_k} \leq b_m$, dus ook $a_{n_k} \leq b_m$. Met Lemma 3.19 volgt hieruit dat $x \leq b_m$. Voor iedere $m \in \mathbb{N}$ geldt derhalve dat $x \in I_m$. We concluderen dat de doorsnede $\cap_{m\in\mathbb{N}} I_m$ het getal x bevat, dus niet leeg is.

4.3 Intermezzo: Cauchy-rijen en volledigheid

In deze paragraaf, opgebouwd in de vorm van opgaven, geven we een karakterisering van de volledigheid van $\mathbb{R}^n$ in termen van het zogenaamde Cauchy-criterium. Deze karakterisering van volledigheid is af te leiden met behulp van de stelling van Bolzano-Weierstrass, en laat zich generaliseren naar de context van metrische ruimten. Hij is daarom van groot belang op tal van plaatsen in de analyse.

Definitie 4.8 Laat (V, d) een metrische ruimte zijn, en $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in V. De rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heet een *Cauchy-rij* indien voor elke $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat voor alle $m, n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$n, m \geq N \quad \Rightarrow \quad d(a_m, a_n) < \varepsilon.$$

Lemma 4.9 *Laat V een metrische ruimte zijn, en $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in V die convergent is. Dan is (a_n) een Cauchy-rij.*

Bewijs: Opgave voor de lezer. Aanwijzing: noteer de limiet van de rij met a en pas de driehoeksongelijkheid toe op a_m, a, a_n. □

In het algemeen hoeft een Cauchy-rij in een metrische ruimte niet convergent te zijn. Wel is een Cauchy-rij altijd begrensd in de volgende zin.

Lemma 4.10 *Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een Cauchy-rij in een metrische ruimte V en zij $b \in V$. Dan bestaat er een $R > 0$ zo dat $a_n \in B(b; R)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.*

Bewijs: Opgave voor de lezer. Toon eerst aan dat er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat

$$n \geq N \Rightarrow a_n \in B(a_N; 1).$$

Voltooi vervolgens het bewijs. □

Definitie 4.11 Een metrische ruimte V heet *volledig* indien iedere Cauchy-rij in V convergent is (met een in V gelegen limiet).

Stelling 4.12 *De ruimte* $\mathbb{R}^p$, $(p \geq 1)$, *voorzien van de Euclidische metriek, is volledig in de zin van de bovenstaande definitie.*

Bewijs: Opgave voor de lezer. Veronderstel dat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een Cauchy-rij in $\mathbb{R}^p$ is.

(a) Toon aan dat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een convergente deelrij $(a_{n_j})_{j\geq 1}$ heeft.

(b) Zij a de limiet van de hierboven genoemde deelrij. Toon aan dat

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Aanwijzing: gebruik de driehoeksongelijkheid voor elementen van de vorm a_n, a_{n_j}, a.

(c) Votooi het bewijs.

□

Een belangrijke toepassing van het Cauchy-criterium ligt in de theorie van de reeksen. Deze opgave sluit aan op de vorige. Hij illustreert een belangrijke toepassing van volledigheid op de theorie van de reeksen.

Definitie 4.13 Onder een *reeks* in $\mathbb{R}^p$, $(p \geq 1)$ verstaan we een uitdrukking van de vorm $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$, met $a_k \in \mathbb{R}^p$ voor $k \in \mathbb{N}$. (Een reeks wordt zodoende bepaald door de rij $(a_k)_{k\geq 0}$ van termen, waarbij de notatie aangeeft dat we de intentie hebben te sommeren.) Onder de $n-$de partiële som van de reeks verstaan we de eindige som $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. De bovenstaande reeks heet *convergent* als $\lim_{n\to\infty} s_n$ bestaat. In dat geval gebruiken we voor deze limiet de notatie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Een niet convergente reeks heet *divergent*.

Voorbeeld 4.14 Een decimale ontwikkeling van de vorm $0, d_1 d_2 \ldots$ definieert een reëel getal a door

$$a := \lim_{n\to\infty} 0, d_1 d_2 \ldots d_n.$$

Aangezien $0, d_1 \ldots d_n$ gelijk is aan de n-de partiële som van de reeks

$$\sum_{k\geq 1} d_k 10^{-k} \tag{4.1}$$

betekent dit precies dat de reeks (4.1) convergent is met som a. We concluderen dat

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} d_k 10^{-k}.$$

De volgende stelling levert een veel gebruikt criterium voor de convergentie van reeksen.

Stelling 4.15 *Zij $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ een reeks in $\mathbb{R}^p$. Als de reeks $\sum_{k\in\mathbb{N}} \|a_k\|$ (in $\mathbb{R}$) convergeert, dan convergeert ook de reeks $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$. Bovendien geldt dan*

$$\|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|.$$

Opmerking 4.16 Een reeks $\sum_{n\geq 0} a_n$ waarvoor $\sum_{n\geq 0} \|a_n\|$ convergeert, heet om voor de hand liggende redenen *absoluut convergent*

Bewijs: Opgave voor de lezer. De n-de partiële som van de reeks $\sum_{n\geq 0} a_n$ noteren we met s_n. De n-de partiële som van de reeks $\sum_{n\geq 0} \|a_n\|$ noteren we met t_n.

(a) Toon aan dat $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een Cauchy-rij is dan en slechts dan als voor elke $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat voor alle $p, q \in \mathbb{N}$ met $q \geq p > N$ geldt:

$$\|\sum_{k=p}^{q} a_k\| < \varepsilon.$$

(b) Bewijs: als $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een Cauchy-rij in $\mathbb{R}$ is, dan is $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een Cauchy-rij in $\mathbb{R}^p$.

(c) Veronderstel nu dat de reeks $\sum_{k\in\mathbb{N}} \|a_k\|$ convergeert. Toon aan dat de reeks $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ convergeert.

(d) Schrijf $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ en $t := \lim_{n\to\infty} t_n$. Toon aan dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt:

$$\|s_n\| \leq t_n \leq t.$$

(e) Voltooi het bewijs van de stelling.

□

Voorbeeld 4.17 We illustreren de hierboven behandelde theorie in aan de hand van de uit de infinitesimaalrekening bekende reeks voor de exponentiële functie, in de vorm van een opgave.

Voor $x \in \mathbb{R}$ beschouwen we de reeks

$$\sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}. \tag{4.2}$$

De n-de partiële som van deze reeks noteren we met $s_n(x)$.

(a) Zij $N \in \mathbb{N},\ N \geq 1$. Toon aan dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ met $n \geq 2N$ geldt

$$\frac{N^n}{n!} \leq \frac{N^{2N}}{(2N)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2N}.$$

Toon aan dat de rij $(s_n(N))_{n\in\mathbb{N}}$ naar boven begrensd is.

(b) Zij $x \geq 0$. Toon aan dat de rij $(s_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ monotoon stijgend en naar boven begrensd is.

(c) Zij $x \in \mathbb{R}$ willekeurig. Toon aan dat de reeks (4.2) convergeert. We definiëren de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

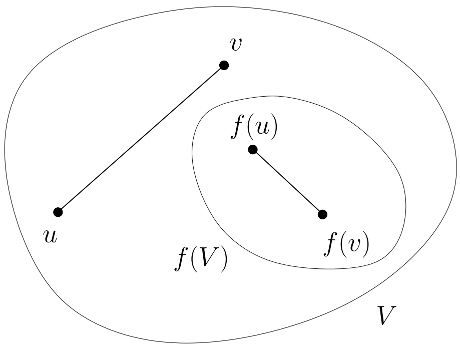
Toon aan dat $|f(x)| \leq f(|x|)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Later zullen we aantonen dat $f(x) = e^x$.

4.4 De Contractiestelling

Een afbeelding $f : V \longrightarrow W$ tussen metrische ruimten V, W heet *Lipschitz-continu* als er een constante $\gamma \geq 0$ is zó, dat

$$d(f(u), f(v)) \leq \gamma d(u,v) \text{ voor alle } u, v \in V. \tag{4.3}$$

Anders gezegd, de beelden liggen niet meer dan een factor γ van elkaar dan de originelen. Het is evident dat dit impliceert dat f continu is. Immers, neem een convergente rij $\{u_n\} \to v$. Dan geldt $d(f(u_n), f(v)) \leq \gamma d(u_n, v)$. Omdat $d(u_n, v) \to 0$ als $n \to \infty$, hebben we $d(f(u_n), f(v)) \to 0$ als $n \to \infty$.

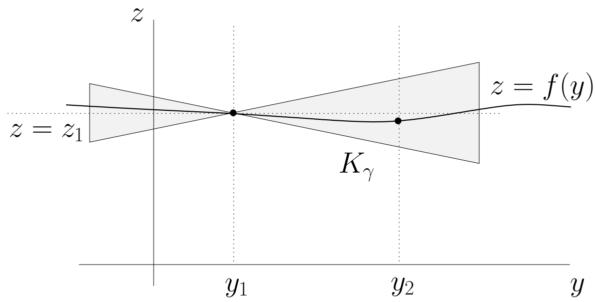


Figuur 4.1: Een contractie: $d(f(u), f(v)) \leq \gamma d(u,v)$ met $0 < \gamma < 1$.

Een afbeelding $f : V \longrightarrow W$ tussen metrische ruimten V, W heet een *contractie* als er een constante $0 \leq \gamma < 1$ is zó, dat

$$d(f(u), f(v)) \leq \gamma d(u,v) \text{ voor alle } u, v \in V. \tag{4.4}$$

Anders gezegd, de beelden liggen substantieel dichter bij elkaar dan de originelen (Figuur 4.1).



Figuur 4.2: Kegel $K_\gamma(y_1, z_1)$.

Voorbeeld 4.18 Beschouw een contractie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto z = f(y)$. Er is dus een constante $0 \le \gamma < 1$ zo dat

$$|f(y_2) - f(y_1)| \le \gamma |y_2 - y_1| \text{ voor alle } y_{1,2} \in \mathbb{R}.$$

Dit betekent dat de grafiek van f in iedere kegel

$$K_\gamma(y_1, z_1) := \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid |z - z_1| \le \gamma |y - y_1|\}$$

met $z_1 = f(y_1)$ zit (zie Figuur 4.2).

Een vast punt $v = f(v)$ van f is de intersectie van de grafiek van f met de lijn $z = y$. De afbeelding f heeft zeker een vast punt $v \in \mathbb{R}$. Immers, de intersectie van $K_\gamma(0, f(0))$ met de lijn $z = y$ is niet leeg (zie Figuur 4.3(a)). Dit vaste punt v is eenduidig. Inderdaad, de kegel $K_\gamma(v, v)$ heeft geen andere intersectie met de lijn $z = y$ (zie Figuur 4.3(b)). Bovendien, voor ieder punt $u \in \mathbb{R}$, convergeren de iteraties

$$u_n := f^n(u)$$

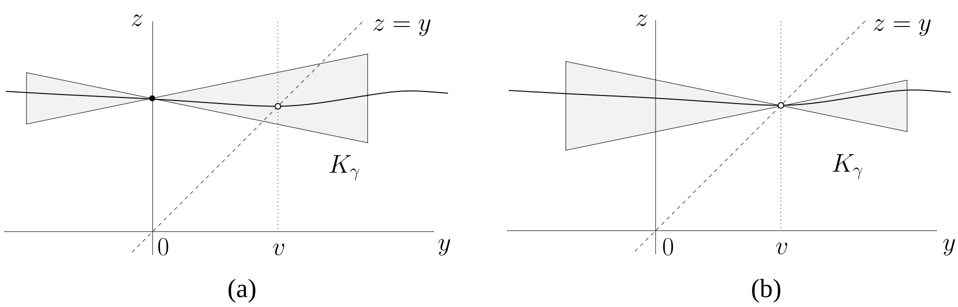
naar v. We hebben

$$|f^n(u) - v| = |f(f^{n-1}(u)) - f(v)| \le \gamma |f^{n-1}(u) - v| \le \gamma^2 |f^{n-2}(u) - v| \le \cdots \le \gamma^n |u - v|$$

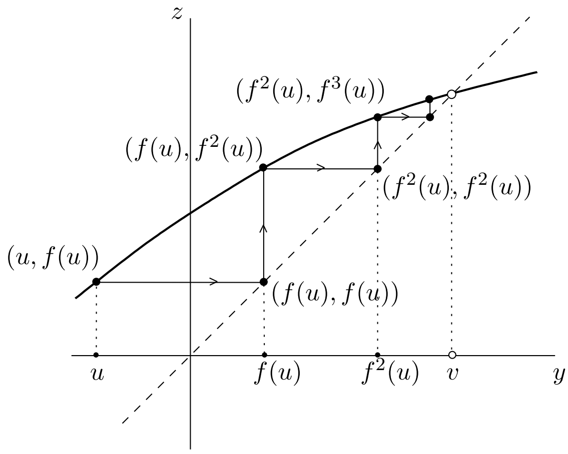
met $0 \le \gamma < 0$. Dus geldt

$$|f^n(u) - v| \le \gamma^n |u - v|$$

en $|f^n(u) - v| \to 0$ als $n \to \infty$ (zie Figuur 4.4).



Figuur 4.3: (a) $y_1 = 0$; (b) $y_1 = v$.



Figuur 4.4: Iteraties van f.

Iedere contractie in een *volledige* metrische ruimte heeft dezelfde eigenschappen als f in Voorbeeld 4.18. Wij beginnen met twee lemma's die waar zijn in iedere metrische ruimte.

Lemma 4.19 *Als een contractie $f : V \longrightarrow V$ in een metrische ruimte (V, d) een vast punt heeft, dan is dit punt eenduidig.*

Bewijs: Zij $v \in V$ een vast punt van f, d.w.z. $f(v) = v$. Als ook $f(w) = w$ voor een $w \in V$, dan is

$$d(v, w) = d(f(v), f(w)) \le \gamma d(v, w),$$

dus $(1 - \gamma)d(v, w) \le 0$. Omdat $1 - \gamma > 0$, volgt hieruit dat $d(v, w) \le 0$, dus $d(v, w) = 0$, ofwel $v = w$. □

Lemma 4.20 *Laat $v \in V$ het vaste punt van een contractie $f : V \longrightarrow V$ en $w \in V$ een vast punt van een afbeelding $g : V \longrightarrow V$ zijn. Dan geldt*

$$d(v, w) \le \frac{1}{1 - \gamma} d(f(w), g(w)). \tag{4.5}$$

Bewijs: De driehoeksongelijkheid en contractie-eigenschap van f geven

$$d(v, w) = d(f(v), g(w)) \le d(f(v), f(w)) + d(f(w), g(w)) \le \gamma d(v, w) + d(f(w), g(w)).$$

Hieruit volgt dat $(1 - \gamma)d(v, w) \le d(f(w), g(w))$, dus volgt (4.5) omdat $1 - \gamma > 0$. □

De schatting (4.5) laat zien dat ieder vast punt van een andere afbeelding g dicht bij het vaste punt van f ligt, als de afbeelding g weinig van f afwijkt.

In de volgende stelling speelt de volledigheid van (V, d) een essentiële rol.

Stelling 4.21 *Zij (V, d) een volledige metrische ruimte en zij $f : V \to V$ een contractie in V met factor $0 \le \gamma < 1$. Dan geldt*

(a) *Er is precies één $v \in V$ zodat $f(v) = v$.*

(b) *Voor iedere $u \in V$ geldt $\lim_{n\to\infty} f^n(u) = v$.*

Bewijs:

De rij $\{f^n(u)\}$ is een Cauchy-rij. De eerste stap is:

$$d(f^{n+1}(u), f^n(u)) = d(f(f^n(u)), f(f^{n-1}(u)) \leq \gamma d(f^n(u), f^{n-1}(u)).$$

Dus met inductie naar n :

$$d(f^{n+1}(u), f^n(u)) \leq \gamma^n d(f(u), u).$$

Herhaaldelijk toepassen van de driehoeksongelijkheid geeft

$$d(f^{n+k}(u), f^n(u)) \leq \sum_{j=0}^{k-1} d(f^{n+j+1}(u), f^{n+j}(u)) \leq \left(\sum_{j=0}^{k-1} \gamma^{n+j}\right) d(f(u), u).$$

Omdat

$$\sum_{j=0}^{k-1} \gamma^j \leq \sum_{j=0}^{\infty} \gamma^j = \frac{1}{1-\gamma},$$

krijgen we

$$d(f^{n+k}(u), f^n(u)) \leq \frac{\gamma^n}{1-\gamma} d(f(u), u) \tag{4.6}$$

voor iedere $k \in \mathbb{N}$. Omdat $0 \leq \gamma < 1$, geldt dat $\gamma^n \to 0$ voor $n \to \infty$. Dus bij iedere $\varepsilon > 0$ is er een index N zodat voor alle $n \geq N$ en alle $k \geq 0$ geldt $d(f^{n+k}(u), f^n(u)) < \varepsilon$. Hieruit volgt dat $\{f^n(u)\}$ een Cauchy-rij is in V. Omdat V volledig is, bestaat er een $v \in V$ met

$$\lim_{n\to\infty} f^n(u) = v.$$

Het punt v is een vast punt voor f. Omdat f (zelfs Lipschitz-) continu is, volgt hieruit dat

$$f(v) = f\left(\lim_{n\to\infty} f^n(u)\right) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(u) = v,$$

dit bewijst de existentie van een vast punt v voor f. Dit punt is eenduidig wegens Lemma 4.19.
□

Het belangrijkste deel van de contractiestelling is de conclusie (a) dat een contractie f in een volledige metrische ruimte V precies één vast punt heeft. De toevoeging (b) zegt dat het vaste punt benaderd wordt door de rij u_n die inductief gedefinieerd wordt door het startpunt $u_0 = u$ willekeurig in V te kiezen en verder $u_{n+1} = f(u_n)$ voor alle $n \geq 0$ te nemen.

Opmerking 4.22 Er geldt

$$d(v, f^n(u)) = d(f(v), f(f^{n-1}(u))) \leq \gamma d(v, f^{n-1}(u)).$$

Met inductie naar n:

$$d(v, f^n(u)) \leq \gamma^n d(v, u).$$

Deze ongelijkheid geeft een schatting voor de snelheid van de convergentie van $f^n(u)$ naar v als $n \to \infty$, minstens zo snel als een constante maal de meetkundige rij γ^n.

Neem de limiet voor $k \to \infty$ in (4.6). Uit de continuïteit van de afstandsfunctie volgt dat

$$d(v, f^n(u)) \leq \frac{\gamma^n}{1-\gamma} d(f(u), u). \tag{4.7}$$

Merk op dat het rechterlid in (4.7) geen vast punt v bevat.

4.5 Rijcompactheid en de maximum-minimum stelling

In het vervolg veronderstellen we dat (V, d) een metrische ruimte is. Het begrip convergentie van een rij kan goed gebruikt worden om limietpunten van een deelverzameling van V te karakteriseren.

Lemma 4.23 *Zij D een deelverzameling van de metrische ruimte V, en zij $a \in V$. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

(a) *a is een limietpunt van D.*

(b) *Er bestaat een rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D zo dat* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Bewijs: '(a) $\Rightarrow$ (b)': Veronderstel dat (a) geldt. Volgens de definitie van limietpunt is de doorsnede $B(a; \delta) \cap D$ niet-leeg voor elke $\delta > 0$. In het bijzonder kunnen we voor iedere $n \geq 0$ een $a_n \in B(a; \frac{1}{n+1}) \cap D$ kiezen. De rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ligt in D; is $\varepsilon > 0$ dan bestaat er een $N \in \mathbb{N}$ met $\frac{1}{1+N} \leq \varepsilon$. Voor iedere $n > N$ geldt dan $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, dus $a_n \in B(a; \varepsilon)$. Hiermee is aangetoond dat $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

'(b) $\Rightarrow$ (a)': Veronderstel dat (b) geldt. Zij $\delta > 0$. Dan is er een $N \in \mathbb{N}$ zo dat $a_n \in B(a; \delta)$ voor elke $n > N$. In het bijzonder bevat de verzameling $B(a; \delta) \cap D$ het element a_{N+1} en is dus niet leeg. Met de definitie van limietpunt volgt hieruit dat a een limietpunt van D is. □

Een deelverzameling D van V is per definitie gesloten als elk limietpunt van D tot D behoort. Uit het bovenstaande lemma kan men daarom de volgende karakterisering van geslotenheid van D afleiden.

Gevolg 4.24 *Laat D een deelverzameling van de metrische ruimte V zijn. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

(a) *D is gesloten.*

(b) *Voor iedere rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D die convergent is in V geldt* $\lim_{n\to\infty} a_n \in D$.

Bewijs: '(a) $\Rightarrow$ (b)': Stel (a). Laat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in D zijn die convergent is in V met limiet $a \in V$. Dan is a een limietpunt van D wegens Lemma 4.23. De verzameling D is gesloten, dus $a \in D$. Hiermee is (b) aangetoond.

'(b) $\Rightarrow$ (a)': Stel (b). Laat $a \in V$ een limietpunt van D zijn. Wegens Lemma 4.23 bestaat er een rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D met $a_n \to a$ voor $n \to \infty$. Wegens (b) volgt dat $a \in D$. Ieder limietpunt van D behoort dus tot D; daarom is D gesloten. □

Combineren we de hierboven gegeven karakteriseringen met de Stelling van Bolzano–Weierstrass, dan vinden we de volgende karakterisering van gesloten en begrensde deelverzamelingen in $\mathbb{R}^p$.

Stelling 4.25 *Zij $D \subset \mathbb{R}^p$. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent.*

(a) *De verzameling D is gesloten en begrensd.*

(b) *Iedere rij in D heeft een deelrij die convergent is met een in D gelegen limiet.*

Bewijs: '(a) $\Rightarrow$ (b)' Stel (a). Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in D. Dan volgt met de stelling van Bolzano-Weierstrass dat er een deelrij $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ bestaat die convergent is met limiet $a \in \mathbb{R}^p$. De verzameling D is gesloten dus voldoet aan de karakterisering (b) van Gevolg 4.24. Hieruit volgt dat $a \in D$.

'(b) $\Rightarrow$ (a)' Stel (b). We tonen eerst aan dat D gesloten is. Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in D die convergent is met limiet $a \in \mathbb{R}^p$. Iedere deelrij van $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is convergent met dezelfde limiet a (Lemma 4.3). Er is een deelrij die convergent is met een in D gelegen limiet; vanwege de uniciteit van de limiet (Lemma 3.10) volgt nu dat $a \in D$. De verzameling D voldoet hiermee aan conditie (b) van Gevolg 4.24 en is derhalve gesloten.

Tenslotte tonen we aan dat D begrensd is. Hiertoe veronderstellen we dat D niet begrensd is, en leiden als volgt een tegenstrijdigheid af. Uit de veronderstelde onbegrensdheid volgt dat $D \not\subset B(0; n)$ voor iedere $n \in \mathbb{N}$. Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ is dus een $a_n \in D$ te kiezen met $\|a_n\| \geq n$. Zij $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ een (willekeurige) deelrij van de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dan geldt $\|a_{n_j}\| \geq n_j \geq j$. Hieruit volgt dat deze deelrij niet-begrensd en dus niet convergent is (Lemma 4.4). Dit is strijdig met (b). We concluderen dat D begrensd is. □

De bovenstaande eigenschap (b) speelt een belangrijke rol in tal van situaties in de analyse. We geven daarom de volgende definitie.

Definitie 4.26 Zij V een metrische ruimte. Een deelverzameling $D \subset V$ heet *rij-compact* als iedere rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D een deelrij heeft die convergent is met een in D gelegen limiet.

Opmerking 4.27 Na deze definitie kan conditie (b) uit Stelling 4.25 afgekort worden tot

(b') *De verzameling D is rij-compact.*

Het bewijs van (b')$\Longrightarrow$(a) blijft geldig als D een rij-compacte deelverzameling van een willekeurige metrische ruimte is; elk rij-compact deel $D \subset V$ is gesloten en begrensd.

Opmerking 4.28 (Waarschuwing) Er bestaan 'natuurlijke' metrische ruimten waarin rij-compactheid niet equivalent is met gesloten- en begrensdheid, zie het voorbeeld hieronder. De implicatie (a)$\Longrightarrow$(b) van Stelling 4.25 is dus een speciale eigenschap van de metrische ruimte $\mathbb{R}^n$.

Voorbeeld 4.29 We geven een voorbeeld van een metrische ruimte (V, d) waarin gesloten en begrensde verzamelingen bestaan die niet rij-compact zijn. Zij V de ruimte van begrensde functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zijn $f, g \in V$ dan definiëren we de som-functie $f + g$ door $(f + g)(x) = f(x)+g(x)$. Merk op dat $f+g \in V$. Is $\lambda \in \mathbb{R}$ en $f \in V$ dan behoort de functie $\lambda f : x \mapsto \lambda f(x)$ weer tot V. Met de aldus gedefinieerd optelling en scalarvermenigvuldiging is V een lineaire ruimte. De oorsprong van deze ruimte is de constante functie $0 : x \mapsto 0$.

Voor $f \in V$ definiëren we

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Ga na dat $\|\cdot\|$ een norm op V definieert, zie Voorbeeld 2.14. Deze norm staat bekend als de sup-norm. Door $d(f, g) = \|f - g\|$ wordt dus een metriek op V gedefinieerd.

De gesloten eenheidsbol rond de oorsprong wordt gegeven door

$$A := \{f \in V \mid d(f, 0) = \|f\| \leq 1\}.$$

Deze verzameling is gesloten en begrensd (ga na!). We zullen laten zien dat A een rij heeft die geen convergente deelrij heeft. Voor $n \geq 1$ definiëren we de functie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $f_n(x) = 1$ voor $x \in [n-1, n]$ en door $f_n = 0$ op $\mathbb{R} \setminus [n-1, n]$ (maak een plaatje!). Het is evident dat iedere f_n tot A behoort. Veronderstel dat de rij (f_n) een deelrij (f_{n_k}) heeft die convergeert met limiet $g \in A$. Dan geldt dat $\lim_{k\to\infty} \|f_{n_k} - g\| = 0$. Omdat voor iedere $x \in \mathbb{R}$ geldt $0 \leq |f_{n_k}(x) - g(x)| \leq \|f_{n_k} - g\|$ concluderen we met de insluitstelling dat voor iedere $x \in \mathbb{R}$ geldt $\lim_{k\to\infty} |f_{n_k}(x) - g(x)| = 0$. Voor elke x geldt dat $f_{n_k}(x) = 0$ zodra $k > x$; dus $g(x) = 0$. We concluderen dat g de nul-functie moet zijn. Maar dan $\|f_{n_k} - g\| = \|f_{n_k}\| = 1$; dit is in tegenspraak met $\lim_{k\to\infty} \|f_{n_k} - g\| = 0$. De rij (f_n) heeft derhalve geen deelrij met een in A gelegen limiet. We concluderen dat A wel gesloten en begrensd is, maar niet rij-compact.

In de onderstaande stelling leggen we vast dat rij-compactheid een eigenschap van verzamelingen is die behouden blijft onder continue afbeeldingen.

Stelling 4.30 *Laat V en W metrische ruimten zijn en $D \subset V$. Als $f : D \to W$ continu is en D rij-compact, dan is ook $f(D)$ rij-compact.*

Bewijs: Laat $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij in $f(D)$ zijn. Dan kunnen we voor iedere $n \in \mathbb{N}$ een $a_n \in D$ vinden met $f(a_n) = b_n$. Aangezien D rij-compact is, heeft de rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een deelrij $(a_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ die convergent is met limiet $a \in D$. De afbeelding f is continu in a, dus $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Door toepassing van de substitutiestelling (Lemma 3.16) concluderen we dat $b_{n_j} = f(a_{n_j}) \to f(a)$ voor $j \to \infty$. Er volgt dat de deelrij $(b_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ van de oorspronkelijke rij (b_n) convergeert met limiet $f(a) \in f(D)$. Hiermee is aangetoond dat $f(D)$ rij-compact is. $\square$

Gevolg 4.31 *Zij D een gesloten en begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}^p$ en $f : D \to \mathbb{R}^q$ een continue afbeelding. Dan is $f(D)$ gesloten en begrensd.*

Bewijs: Wegens Stelling 4.25 is de verzameling D rij-compact (zie Opmerking 4.27). Wegens Stelling 4.30 is dus ook de beeldverzameling $f(D)$ rij-compact. Nogmaals Stelling 4.25 toepassend concluderen we tenslotte dat $f(D)$ gesloten en begrensd is in $\mathbb{R}^q$. □

De maximum-minimumstelling zal afgeleid worden uit het bovenstaande resultaat met $q = 1$. Zij D een verzameling en $f : D \to \mathbb{R}$ een functie. We zeggen dat f op D een *maximum* aanneemt als de beeldverzameling $f(D)$ een maximaal element bezit. Anders gezegd: er bestaat een $c \in D$ zo dat $f(x) \leq f(c)$ voor alle $x \in D$. Het maximum van f op D wordt wel genoteerd met

$$\max_D f := \max f(D) = \max\{f(x) \mid x \in D\}.$$

Soortgelijke opmerkingen gelden met betrekking tot het minimum van een functie f op een verzameling D, notatie $\min\limits_D f$.

Stelling 4.32 (Maximum-minimum stelling) *Zij D een gesloten en begrensd deel van $\mathbb{R}^p$ met $D \neq \emptyset$. Zij $f : D \to \mathbb{R}$ een continue functie. Dan neemt f op D een maximum en een minimum aan, d.w.z. er zijn $a, b \in D$ zo dat*

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \qquad \textit{voor alle} \quad x \in D.$$

Bewijs: De verzameling $E = f(D)$ is een gesloten en begrensde niet-lege deelverzameling van $\mathbb{R}$, wegens Gevolg 4.31. Derhalve heeft E een supremum $s := \sup E$ en een infimum $r := \inf E$. Uit Lemma 3.43 volgt dat s een limietpunt van E is. Uit de geslotenheid van E volgt dat $s \in E = f(D)$. Er bestaat derhalve een $b \in D$ zo dat $f(b) = s$. Maar s is een bovengrens van $f(D)$, dus $f(x) \leq f(b)$ voor elke $x \in D$. Op soortgelijke wijze ziet men in dat $r \in E$, dus er bestaat een $a \in D$ zo dat $f(a) = r$. Voor alle $x \in D$ geldt derhalve $f(a) \leq f(x)$. □

Gevolg 4.33 *Zij I een segment in $\mathbb{R}$ en $f : I \to \mathbb{R}$ een continue functie. Dan is het beeld van I onder f een segment. Preciezer, $f(I) = [r, s]$, met $r = \min_I f$ en $s = \max_I f$.*

Bewijs: Uit Stelling 4.32 volgt dat er $a, b \in I$ bestaan zo dat $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ voor alle $x \in I$. Er volgt dat $r := \min_I f = f(a)$ en $s := \max_I f = f(b)$, en we concluderen dat $f(I) \subset [r, s] = [f(a), f(b)]$. Met de tussenwaardestelling, Stelling 3.46, volgt dat $[f(a), f(b)] \subset f(I)$. We concluderen dat $f(I) = [r, s]$. □

4.6 Partiële afgeleiden

In deze paragraaf veronderstellen we steeds dat f een scalaire, d.w.z. reëelwaardige, functie is, gedefinieerd op een deelverzameling $V \subset \mathbb{R}^n$.

De variabele in $\mathbb{R}^n$ noteren we met $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Als we alle variabelen op de j-de na vasthouden ($1 \leq j \leq n$), dan kunnen we $f(x_1, \ldots, x_n)$ beschouwen als functie van de overgebleven reële variabele x_j. Als V en f redelijk zijn kunnen we de ontstane functie differentiëren. De beschreven procedure heet: *partieel differentiëren* naar de variabele x_j. Laten we de procedure preciezer analyseren.

Laat a een vast punt van V zijn, en beschouw de functie $g : \mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$g(t) = f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n).$$

Dan behoort a_j tot het domein van g. We proberen de functie g nu in het punt a_j te differentiëren. Daartoe is het nodig dat g in ieder geval gedefinieerd is op een interval dat a_j bevat.

Dit is zeker het geval als $a \in \operatorname{inw}(V)$. Immers in dat geval bestaat er een $\varepsilon > 0$ zo dat $B(a; \varepsilon) \subset V$. Voor $t \in]\, a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon\, [$ geldt dan dat

$$\|(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n) - a\| = |t - a_j| < \varepsilon,$$

dus $(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n) \in V$, en we zien dat $]\, a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon\, [$ bevat is in het domein van g. Dit maakt dat de onderstaande definitie zinvol is.

Definitie 4.34 Laat $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ een scalaire functie zijn, en a een inwendig punt van zijn domein $\operatorname{Dom}(f)$. De functie f heet in a *partieel differentieerbaar* naar de k-de variable ($1 \leq k \leq n$) als de functie $g : t \mapsto f(a_1, \ldots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \ldots, a_n)$, $\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}$ differentieerbaar is in a_k. In dat geval heet

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) := g'(a_k) = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=a_k} f(a_1, \ldots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \ldots, a_n)$$

de *partiële afgeleide* van f in a naar de k-de variabele.

De functie f heet partieel differentieerbaar in a als f in a partieel differentieerbaar is naar iedere variabele. Is $U \subset \operatorname{Dom}(f)$ een open verzameling, dan heet f partieel differentieerbaar op U als f partieel differentieerbaar is in ieder punt $a \in U$.

Opmerking 4.35 In de bovenstaande definitie hebben we stilzwijgend verondersteld dat de variabele in $\mathbb{R}^n$ genoteerd wordt met $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Uiteraard kan men ook andere notaties voor de variabelen gebruiken, zoals $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Voor de k-de partiële afgeleide wordt in dat geval de overeenkomstige notatie $\partial f / \partial y_k$ gebruikt.

Een andere veelgebruikte notatie voor de partiële afgeleide naar de k-de variabele is:

$$D_k f(a) := \frac{\partial f}{\partial x_k}(a).$$

Het voordeel van deze notatie is dat hij, net als de partiële afgeleide zelf, onafhankelijk is van enige naamgeving van de variabelen.

Voorbeeld 4.36 We beschouwen de veeltermfunctie $f(x, y, z) = 1 + x^2y + xy^2z$ op $\mathbb{R}^3$. Laat $a = (a_1, a_2, a_3)$ een gegeven punt in $\mathbb{R}^3$ zijn. Dan is

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=a_2} 1 + a_1^2 t + a_1 t^2 a_3 = \left(a_1^2 + 2a_1 t a_3\right)_{t=a_2} = a_1^2 + 2a_1 a_2 a_3.$$

Merk op dat we in het voorgaande de gebruikelijke rekenregels voor differentiëren naar een reële variabele gebruikt hebben. Met behulp van deze rekenregels ziet men snel in dat de functie f in elk punt partieel differentieerbaar is. De partiële afgeleiden $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ kan men daarom opvatten als functies $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Uit de bovenstaande berekening volgt:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x^2 + 2xyz.$$

De bovenstaande berekening weerspiegelt de precieze definitie, maar is nogal omslachtig. In de praktijk berekent men de partiële afgeleide naar een bepaalde variabele door naar die variabele te differentiëren, waarbij de andere variabelen als constant beschouwd worden. Uiteraard kunnen daarbij de gebruikelijke rekenregels toegepast worden. Zo vindt men:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2xy + y^2 z, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = xy^2.$$

Voorbeeld 4.37 Als tweede voorbeeld beschouwen we de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x, y) = \sin(xy^2)$. Door toepassing van de rekenregels voor gewone differentiatie (in het bijzonder de kettingregel) zien we dat f partieel differentieerbaar is. De partiële afgeleiden worden gegeven door:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 \cos(xy^2), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy \cos(xy^2).$$

4.7 Toepassing: extrema

Definitie 4.38 Laat $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R}$ een scalaire functie zijn. Men zegt dat f een *lokaal maximum* heeft in het punt $a \in \mathrm{Dom}(f)$ als er een $\delta > 0$ bestaat zo dat

$$f(x) \le f(a) \qquad \text{voor alle} \qquad x \in B(a; \delta) \cap \mathrm{Dom}(f).$$

Op soortgelijke wijze definieert men het begrip *lokaal minimum*. De functie f heeft een *extremum* in $a \in \mathrm{Dom}(f)$ als f in a een lokaal maximum of een lokaal minimum heeft.

Een bekend resultaat is het volgende.

Lemma 4.39 *Zij $I \subset \mathbb{R}$ een interval en $f : I \to \mathbb{R}$ een functie. Veronderstel dat f een extremum heeft in $c \in I$. Is c een inwendig punt van I en is f differentieerbaar in c, dan geldt:*

$$f'(c) = 0.$$

Bewijs: We veronderstellen dat f in c een lokaal maximum heeft. Het bewijs gaat analoog in het geval dat f in c een lokaal minimum heeft.

Er bestaat een $\varepsilon > 0$ zo dat $J :=]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\subset I$. Door eventueel ε kleiner te kiezen kunnen we bovendien bereiken dat $f(x) \leq f(c)$ voor alle $x \in J$. Voor alle $x \in J$ met $x > c$ geldt $x - c > 0$, dus $(f(x) - f(c))/(x - c) \leq 0$. Hieruit volgt dat

$$f'(c) = \lim_{x \downarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0,$$

zie Lemma 1.33; zie ook Appendix 2.6 voor de definitie van de limiet met $x \downarrow c$.

Anderzijds geldt voor alle $x \in J$ met $x < c$ dat $x - c < 0$, dus het differentiequotiënt van f in x en c is niet-negatief. Hieruit volgt

$$f'(c) = \lim_{x \uparrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

We concluderen dat $f'(c) \leq 0$ en $f'(c) \geq 0$, dus $f'(c) = 0$. □

Een belangrijke toepassing van partiële differentiatie is geformuleerd in het volgende lemma.

Lemma 4.40 *Laat $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ een scalaire functie zijn, en veronderstel dat a een inwendig punt van* $\mathrm{Dom}(f)$ *is waarin f partieel differentieerbaar is. Als f in a een extremum heeft, dan geldt:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0 \qquad (1 \leq k \leq n).$$

Bewijs: We veronderstellen dat f in a een lokaal maximum heeft. Het geval van een lokaal minimum kan op soortgelijke wijze behandeld worden.

Omdat a een inwendig punt is bestaat er een $\delta_1 > 0$ zo dat $B(a;\delta_1) \subset \mathrm{Dom}(f)$. Voorts bestaat er een $\delta_2 > 0$ zo dat $f \leq f(a)$ op $B(a;\delta_2) \cap \mathrm{Dom}(f)$. Zij $\varepsilon = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Dan geldt $B(a;\varepsilon) \subset \mathrm{Dom}(f)$ en $f \leq f(a)$ op $B(a;\varepsilon)$. Fixeer $1 \leq k \leq n$ en beschouw de functie $g :]a_k - \varepsilon, a_k + \varepsilon[\to \mathbb{R}$ gedefinieerd als in de tekst boven Definitie 4.34. Uit de partiële differentieerbaarheid van f in a volgt per definitie dat g differentieerbaar is in a_k met afgeleide $g'(a_k) = D_k f(a)$. Anderzijds geldt dat $g \leq f(a) = g(a_k)$ op zijn domein; g heeft derhalve een maximum in a_k en er volgt $g'(a_k) = 0$. Dus $D_k f(a) = 0$. □

Definitie 4.41 Laat $f : \mathbb{R}^n \rightarrowtail \mathbb{R}$ een scalaire functie zijn, en a een inwendig punt van zijn domein $\mathrm{Dom}(f)$. Als f partieel differentieerbaar is in a, dan is de *gradiënt* van f in a de vector in $\mathbb{R}^n$ gedefinieerd door:

$$\mathrm{grad}\, f(a) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right).$$

Een inwendig punt $a \in \mathrm{Dom}(f)$ waarvoor $\mathrm{grad}\, f(a) = 0$ heet een *stationair* (of ook wel een *kritiek*) punt van f.

Het bovenstaande lemma wordt in de praktijk meestal in de volgende vorm gebruikt:

Gevolg 4.42 *Laat $U \subset \mathbb{R}^n$ een open deel zijn, en $f : U \to \mathbb{R}$ een partieel differentieerbare functie. Heeft f een extremum in het punt $a \in U$, dan is a een stationair punt van f.*

Is $U \subset \mathbb{R}^n$ een open deelverzameling en $f : U \to \mathbb{R}$ een partieel differentieerbare functie, dan wordt door grad f een vectorwaardige functie $U \to \mathbb{R}^n$ gedefinieerd. De mogelijke extrema van de functie f vindt men nu door de nulpunten van de functie grad f te bepalen. (N.B. een punt kan stationair zijn zonder dat sprake is van een extremum, zie Voorbeeld 4.44.)

Voorbeeld 4.43 Laat de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door $f(x, y) = x^2 + y^2$. Dan is $(\text{grad } f)(x, y) = (0, 0)$ dan en slechts dan als $(x, y) = (0, 0)$. Inderdaad heeft f alleen een extremum (een minimum) in $(0, 0)$.

Voorbeeld 4.44 Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x, y) = xy$. Dan is $(\text{grad } f)(x, y) = (y, x)$. Dus $(\text{grad } f)(0, 0) = (0, 0)$. Toch heeft f in $(0, 0)$ geen extremum. Dit zien we als volgt in door een onderzoek van het tekenverloop van f. De nul-niveauverzameling $N_0 := f^{-1}(\{0\})$ bestaat uit de vereniging van de x-as en de y-as. Het complement van N_0 bestaat uit de vier open kwadranten, waarop f steeds of strikt positief, of strikt negatief is. Op het eerste kwadrant $K_1 : \ x > 0, \ y > 0$ is f bijvoorbeeld strikt positief, op het tweede kwadrant $K_2 : \ x < 0, \ y > 0$ is f strikt negatief. Beide kwadranten hebben $(0, 0)$ in hun afsluiting, terwijl $f(0, 0) = 0$. Er is dus geen bolomgeving van $(0, 0)$ waarop $f \leq f(0, 0)$ of waarop $f \geq f(0, 0)$.

We zien dat $(\text{grad } f)(a) = 0$ geen voldoende voorwaarde is voor het bestaan van een lokaal extremum.

Bij het onderzoeken van extrema van een functie $f : \mathbb{R}^n \supset\!\!\to \mathbb{R}$ is het soms nuttig het tekenverloop van f te beschouwen. In dit verband is het begrip padsamenhang van een verzameling nuttig.

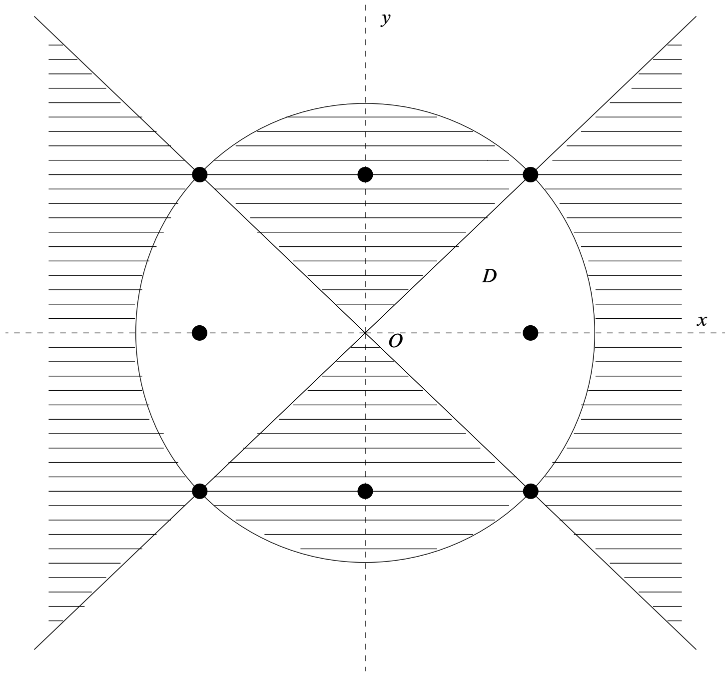
Definitie 4.45 (kromme, padsamenhang) Zij $U \subset \mathbb{R}^n$. Onder een *kromme* in U verstaan we een continue afbeelding $c : [a, b] \to U$, met $[a, b] \subset \mathbb{R}$ een segment. Het punt $c(a)$ heet het *beginpunt* van c; het punt $c(b)$ heet het *eindpunt* van c.

De verzameling U heet *padsamenhangend* als voor ieder tweetal punten $p, q \in U$ een kromme bestaat met beginpunt p en eindpunt q.

Het volgende lemma is een nuttig hulpmiddel bij het onderzoek van het tekenverloop van een continue functie op $\mathbb{R}^n$.

Lemma 4.46 *Zij $U \subset \mathbb{R}^n$ een padsamenhangende verzameling, en $f : U \to \mathbb{R}$ een continue functie, die op U nergens de waarde* 0 *aanneemt. Dan is f ofwel strikt positief ofwel strikt negatief op U.*

Bewijs: Veronderstel dat f noch strikt positief, noch strikt negatief op U is. Dan is er een tweetal punten $p, q \in U$ met $f(p) < 0$ en $f(q) > 0$. Uit de padsamenhang van U volgt het bestaan van een kromme $c : [a, b] \to U$ met $c(a) = p$ en $c(b) = q$. We beschouwen de functie $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $g(t) = f(c(t))$. De functie g is de samenstelling van twee continue afbeeldingen, dus continu. Voorts is $g(a) = f(p) < 0 < f(q) = g(b)$. Wegens de tussenwaardestelling voor continue functies, Stelling 3.46, bestaat er een $t \in [a, b]$ met $g(t) = 0$. Hieruit volgt dat f in $c(t)$ de waarde nul aanneemt, tegenspraak. $\square$



Figuur 6: Tekenschema van $f(x, y) = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 2)$; gearceerd is positief

Voorbeeld 4.47 $f(x, y) = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 2)$. Uitwerken levert: $f(x, y) = x^4 - 2x^2 + 2y^2 - y^4$. Dus

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 4y - 4y^3 = 4y(1 - y^2). \end{aligned}$$

We zien dat $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ op de lijnen $x = -1$, $x = 0$ en $x = 1$, terwijl $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ op de lijnen $y = -1$, $y = 0$ en $y = 1$. Hieruit volgt dat f negen stationaire punten heeft:

$$(0, 0), \quad (0, \pm 1), \quad (\pm 1, 0), \quad (\pm 1, \pm 1).$$

De niveaulijn $N_0 = f^{-1}(\{0\})$ bestaat uit de vereniging van de lijnen $y = x$ en $y = -x$ met de cirkel $x^2 + y^2 = 2$. Het complement van N_0 bestaat uit acht padsamenhangende delen; op elk daarvan is f wegens Lemma 4.46 ofwel strikt negatief, ofwel strikt positief. De delen waarop f strikt positief is zijn hierdoor gemakkelijk te bepalen; in Figuur 6 zijn ze gearceerd weergegeven. Aan het tekenverloop zien we dat f in de vier punten $(\pm 1, \pm 1)$ en in het punt $(0, 0)$ geen extremum heeft.

In de overige vier stationaire punten moet f extrema hebben. Dit volgt uit een tamelijk subtiele redenering die we zullen geven voor het stationaire punt $(1, 0)$. De overgebleven stationaire punten worden op soortgelijke wijze behandeld. We beschouwen de gesloten verzameling D van punten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ met $x \geq |y|$ en $x^2 + y^2 \leq 2$ (in de figuur: D is de afsluiting van het niet gearceerde open stuk dat $(1, 0)$ bevat). Merk op dat het inwendige van D gegeven wordt door $\mathrm{inw}(D) = D \setminus N_0$. De *rand*[1] $\mathrm{fr}(D)$ van D wordt dus gegeven door $\mathrm{fr}(D) = D \cap N_0$.

Omdat D een gesloten en begrensde verzameling is neemt de continue functie f een minimum aan in een punt $a \in D$ (Stelling 4.32). Nu is $f = 0$ op de rand van D, en strikt kleiner dan nul op het inwendige $\mathrm{inw}(D)$ van D. Derhalve moet a in de open verzameling $\mathrm{inw}(D)$ liggen. Omdat f partieel differentieerbaar is op $\mathrm{inw}(D)$ moet a een stationair punt van f zijn (Gevolg 4.42). Slechts één der stationaire punten van f is in $\mathrm{inw}(D)$ gelegen, namelijk het punt $(1, 0)$. Hieruit blijkt dat $a = (1, 0)$, dus f heeft een lokaal minimum in $(1, 0)$ ter grootte $f(1, 0) = -1$.

Van het VWO en uit de infinitesimaalrekening weet u dat het verdwijnen van de afgeleide van een functie van één variable geen maximum of minimum garandeert, er kan bijvoorbeeld ook sprake zijn van een buigpunt. Bij functies van meer variabelen doet zich een nieuw verschijnsel voor: er kan sprake zijn van een zogenaamd zadelpunt.

Voorbeeld 4.48 We beschouwen nogmaals de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gedefinieerd door $f(x, y) = y^2 - x^2$; zie ook Voorbeeld 2.2. Men gaat gemakkelijk na dat $\mathrm{grad}\, f\, (x, y) = (-2x, 2y)$. Hieruit volgt dat $(0, 0)$ het enige kritieke punt van f is. De functie $x \mapsto f(x, 0) = -x^2$ heeft een strikt maximum in 0, terwijl $y \mapsto f(0, y) = y^2$ een strikt minimum in 0 heeft. De functie f heeft dus noch een maximum, noch een minimum in 0. Dit blijkt op iets andere wijze als we de niveaulijnen van f beschouwen; in Voorbeeld 2.4 zagen we dat f strikt positief is op de verzameling $|x| < |y|$, en strikt negatief op de verzameling $|x| > |y|$. Omdat $(0, 0)$ tot de afsluiting van beide verzamelingen behoort, kan f in $(0, 0)$ geen extremum hebben.

In Voorbeeld 2.1 zagen we dat de grafiek van f de vorm van een zadel heeft. Om deze reden noemt men het kritieke punt $(0, 0)$ wel een *zadelpunt.*

4.8 Rijcompactheid en uniforme continuïteit.

In deze paragraaf zijn (V, d_V) en (W, d_W) steeds metrische ruimten. We brengen in herinnering dat een afbeelding $f : V \to W$ per definitie continu is als hij continu is in elk punt $a \in V$, met andere woorden, als voor elke $a \in V$ geldt dat $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Combineren we dit met de definitie van limiet, dan zien we dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

(a) De afbeelding $f : V \to W$ is continu.

(b) Voor iedere $a \in V$ en iedere $\varepsilon > 0$ bestaat er een $\delta = \delta_{a,\varepsilon} > 0$ zo dat voor alle $x \in V$ geldt:
$$d_V(x, a) < \delta \Rightarrow d_W(f(x), f(a)) < \varepsilon. \tag{4.8}$$

In de bovenstaande uitspraak (b) hebben we $\delta = \delta_{a,\varepsilon}$ geschreven om tot uitdrukking te brengen dat de δ waarvan sprake is in het algemeen afhankelijk is van $\varepsilon > 0$ en van $a \in V$. Dat δ in het algemeen daadwerkelijk afhankelijk kan zijn van a verduidelijken we aan de hand van een voorbeeld.

[1]De rand $\mathrm{fr}(D)$ van een deelverzameling D van een metrische ruimte wordt gedefinieerd door $\mathrm{fr}(D) := \bar{D} \setminus \mathrm{inw}(D)$.

Voorbeeld 4.49 Laat V en W beide gelijk zijn aan het interval $]\,0,\infty\,[$, voorzien van de geïnduceerde metriek. Laat $f : V \to W$ gedefinieerd zijn door $f(x) = 1/x$ en zij $\varepsilon > 0$. Veronderstel dat er een $\delta > 0$ bestaat zo dat voor alle $a, x \in V$ geldt:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Voor alle $a > 0$ geldt $|a - (a + \delta/2)| < \delta$ dus moet gelden

$$|f(a + \delta/2) - f(a)| < \varepsilon. \tag{4.9}$$

Voor alle $a > 0$ geldt tevens:

$$|f(a + \delta/2) - f(a)| = \left|\frac{1}{a + \delta/2} - \frac{1}{a}\right| = \frac{\delta/2}{a(a + \delta/2)}.$$

Kies $0 < a < \min(\delta/2, 1/2\varepsilon)$, dan volgt hieruit dat

$$|f(a + \frac{1}{2}\delta) - f(a)| \geq \frac{\delta/2}{a(\delta/2 + \delta/2)} = \frac{1}{2a} \geq \varepsilon,$$

hetgeen een tegenspraak met (4.9) oplevert. Derhalve kan δ niet onafhankelijk van a gekozen kan worden.

We zullen de afbeelding $f : V \to W$ uniform continu noemen indien bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta = \delta_\varepsilon$ te kiezen is die onafhankelijk is van $a \in V$ (ofwel uniform in $a \in V$) en zo dat (4.8) geldt voor alle $a \in V$ en $x \in V$. Met andere woorden, indien

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, a \in V) \qquad d_V(x, a) < \delta \;\Rightarrow\; d_W(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

In de bovenstaande formule is er geen verschil in de rol die de variabelen a en x spelen. We brengen dit tot uitdrukking door in de volgende definitie a overal te vervangen door y. (Uiteraard verandert de definitie daardoor niet.)

Definitie 4.50 Een afbeelding $f : V \to W$ heet *uniform continu* indien voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat voor alle $x, y \in V$ geldt:

$$d_V(x, y) < \delta \;\Rightarrow\; d_W(f(x), f(y)) < \varepsilon. \tag{4.10}$$

Opmerking 4.51 Zij $f : V \rightarrowtail W$ een afbeelding. We zullen f uniform continu noemen op een deelverzameling D van zijn domein $\mathrm{Dom}(f)$ als de beperking $f|_D$ van f tot D een uniform continue afbeelding is van D (voorzien van de geïnduceerde metriek) naar W. Dit betekent dat er voor elke $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zo dat de implicatie (4.10) geldt voor alle $x, y \in D$.

Voorbeelden 4.52

(a) De functie f uit Voorbeeld 4.49 is continu op $]\,0,\infty\,[$, maar niet uniform continu.

(b) We beschouwen de functie $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $g(x) = \|x\|$. Deze functie is uniform continu op $\mathbb{R}^n$. Immers zij $\varepsilon > 0$. Kies $\delta = \varepsilon$, dan geldt voor alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ met $\|x - y\| < \delta$ dat

$$|g(x) - g(y)| = |\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\| < \delta = \varepsilon.$$

(c) We beschouwen de continue functie $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $h(x) = \|x\|^2$. We zullen aantonen dat deze functie niet uniform continu is op $\mathbb{R}^n$. Zij $\varepsilon = 1$ en zij $\delta > 0$ (willekeurig). Dan is het voldoende aan te tonen dat er $x, y \in \mathbb{R}^n$ te vinden zijn zo dat

$$\|x - y\| < \delta \qquad \text{en} \qquad |h(x) - h(y)| \geq \varepsilon = 1. \tag{4.11}$$

Dit doen we als volgt. Zij e_1 de eerste standaardbasisvector in $\mathbb{R}^n$, en schrijf $x_t = te_1$ en $y_t = (t + \delta/2)e_1$, voor $t > 0$. Dan is $\|x_t - y_t\| = \delta/2 < \delta$, voor elke $t > 0$. Anderzijds is

$$\begin{aligned} |h(x_t) - h(y_t)| &= |\|x_t\|^2 - \|y_t\|^2| \\ &= |t^2 - (t + \delta/2)^2| \\ &= t\delta + \delta^2/4 \geq t\delta. \end{aligned}$$

Kies een $t \in \mathbb{R}$ met $t > 1/\delta$. Dan geldt (4.11) voor $x = x_t,\ y = y_t$.

Uit de bovenstaande voorbeelden (a) en (c) blijkt dat een continue functie niet altijd uniform continu is. De onderstaande stelling drukt uit dat dit wel altijd het geval is als het domein van f rij-compact is.

Stelling 4.53 *Laat V, W metrische ruimten zijn en $D \subset V$ een rij-compacte deelverzameling. Iedere continue afbeelding $f : D \to W$ is ook uniform continu op D.*

Bewijs: Veronderstel dat D rij-compact is, en $f : D \to W$ continu. Veronderstel dat f niet uniform continu is. We zullen aantonen dat dit tot een tegenspraak leidt. Uit het niet uniform continu zijn van f volgt dat er een $\varepsilon_0 > 0$ bestaat met de volgende eigenschap: voor elke $\delta > 0$ zijn er $x, y \in D$ te vinden met $d_V(x, y) < \delta$ en $d_W(f(x), f(y)) \geq \varepsilon_0$. Voor iedere gehele $n \geq 1$ kunnen we dus $x_n, y_n \in D$ vinden met $d_V(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ en

$$d_W(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0. \tag{4.12}$$

Uit de definitie van rij-compactheid volgt dat de in D gelegen rij $(x_n)_{n\geq 1}$ een deelrij $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ heeft die convergent is met een in D gelegen limiet. Noem de limiet van deze deelrij x.

Uit de definitie van rij-compactheid volgt nu ook dat de in D gelegen rij $(y_{n_k})_{k\geq 1}$ een deelrij $(y_{n_{k_j}})_{j\geq 1}$ heeft die convergent is met een in D gelegen limiet y. Aangezien de rij $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ convergent is met limiet x, is zijn deelrij $(x_{n_{k_j}})_{j\geq 1}$ convergent met dezelfde limiet x (zie Lemma 4.3).

Schrijf $\xi_j = x_{n_{k_j}}$ en $\eta_j = y_{n_{k_j}}$. Dan is

$$d_V(\xi_j, \eta_j) < 1/n_{k_j} \leq 1/j,$$

dus $\lim_{j\to\infty} d_V(\xi_j, \eta_j) = 0$ (gebruik de insluitstelling). Door toepassing van het onderstaande lemma volgt nu dat $x = y$.

De in D gelegen rijen $(\xi_j)_{j\geq 1}$ en $(\eta_j)_{j\geq 1}$ hebben derhalve dezelfde limiet $x \in D$. Met de continuïteit van f in x concluderen we nu dat

$$\lim_{j\to\infty} f(\xi_j) = f(x) = \lim_{j\to\infty} f(\eta_j).$$

Met behulp van het onderstaande lemma volgt hieruit dat $\lim_{j\to\infty} d_W(f(\xi_j), f(\eta_j)) = 0$. Dit is in tegenspraak met de schatting (4.12). $\Box$

Lemma 4.54 *Veronderstel dat $(\xi_j)_{j\geq 1}$ en $(\eta_j)_{j\geq 1}$ twee convergente rijen in de metrische ruimte V zijn. Dan geldt:*

$$\lim_{j\to\infty} \xi_j = \lim_{j\to\infty} \eta_j \iff \lim_{j\to\infty} d_V(\xi_j, \eta_j) = 0.$$

Bewijs: Noem de limieten van de convergente rijen $(\xi_j)_{j\geq 1}$ en $(\eta_j)_{j\geq 1}$ respectievelijk ξ en η.

'$\Rightarrow$' Veronderstel eerst dat $\xi = \eta$. Zij $\varepsilon > 0$. Dan volgt uit de definitie van limiet dat er een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat voor alle $j \geq N$ geldt $d_V(\xi_j, \xi) < \frac{1}{2}\varepsilon$ en $d_V(\eta_j, \xi) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Voor iedere $j \geq N$ geldt dus ook

$$d_V(\xi_j, \eta_j) \leq d_V(\xi_j, \xi) + d_V(\xi, \eta_j) < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Hieruit volgt dat $\lim_{j\to\infty} d_V(\xi_j, \eta_j) = 0$.

'$\Leftarrow$' Veronderstel nu omgekeerd dat $\lim_{j\to\infty} d_V(\xi_j, \eta_j) = 0$. Zij $\varepsilon > 0$. Dan volgt uit de definitie van limiet dat er een geheel getal $N \geq 1$ bestaat zo dat voor alle $j \geq N$ geldt: $d_V(\xi_j, \xi) < \varepsilon/3$, $d_V(\eta_j, \eta) < \varepsilon/3$, en $d_V(\xi_j, \eta_j) < \varepsilon/3$. Door herhaald toepassen van de driehoeksongelijkheid zien we (door $j = N$ te nemen) dat in het bijzonder de volgende schatting geldt:

$$d_V(\xi, \eta) \leq d_V(\xi, \xi_N) + d_V(\xi_N, \eta_N) + d_V(\eta_N, \eta) < \varepsilon.$$

Voor alle $\varepsilon > 0$ geldt derhalve dat $d_V(\xi, \eta) < \varepsilon$. Hieruit volgt dat $d_V(\xi, \eta) = 0$, dus $\xi = \eta$. $\Box$

Gevolg 4.55 *Laat D een gesloten en begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}^p$ zijn. Dan is iedere continue functie $f : D \to \mathbb{R}^q$ uniform continu.*

Bewijs: Wegens Stelling 4.25 is D een rij-compacte deelverzameling van de metrische ruimte $\mathbb{R}^p$. Pas nu Stelling 4.53 toe. $\Box$

In Hoofdstuk 7 van dit dictaat zal aangetoond worden dat een continue functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integreerbaar is. De bovenstaande stelling, die garandeert dat f uniform continu is, zal daarbij een belangrijke rol spelen.

Definitie 4.56 Zij V een metrische ruimte en $D \subset V$. We zeggen dat D dicht ligt in V als elke punt van V limietpunt van D is, d.w.z. $V = \overline{D}$ is de afsluiting van D.

Voor $a < b \in \mathbb{R}$ is $[a, b\,]$ de afsluiting van $\,]\,a, b\,[\,$; een ander voorbeeld zijn de rationale getallen $\mathbb{Q}$, deze liggen dicht in $\mathbb{R}$. Dit laatste betekent dat $\mathbb{R}$ separabel is; i.h.a. wordt een metrische ruimte separabel genoemd als er een aftelbare dichte deelverzameling is.

Stelling 4.57 *Zij D dicht in de metrische ruimte V, zij W een volledige metrische ruimte en zij $f : D \longrightarrow W$ uniform continu. Dan is er precies één continue afbeelding $g : V \longrightarrow W$ met $g_{|D} = f$, de* extensie *van f, en g is uniform continu.*

Het voorbeeld van de tan op $D =]-\pi, \pi\,[$ laat zien dat een continue afbeelding die niet uniform continu is niet naar de afsluiting $V = [-\pi, \pi\,]$ kan worden uitgebreid; in feite volgt met stelling 4.53 dat de uniforme continuïteit van f een noodzakelijke voorwaarde is.

Bewijs: Eerst de uniciteit. Zij ook $h : V \longrightarrow W$ continu met $h_{|D} = f$. Zij $y \in V = \overline{D}$, dus $y = \lim_{n\to\infty} x_n$ met $x_n \in D$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, dan geldt

$$h(y) \;=\; \lim_{n\to\infty} h(x_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} f(x_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} g(x_n) \;=\; g(y)$$

ofwel $h = g$.

Nu nog de existentie. Voor $y = \lim_{n\to\infty} x_n \in V$ is de convergente rij i.h.b. een Cauchy-rij, en $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ is dat ook: gegeven $\varepsilon > 0$ levert de uniforme continuïteit van f een $\delta > 0$ op waarvoor i.h.b. de implicatie als $d(x_n, x_m) < \delta$ dan $d(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ geldt. Omdat $(x_n)_n$ een Cauchy-rij is bestaat voor deze $\delta > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ zodanig, dat inderdaad $d(x_n, x_m) < \delta$ voor alle $n, m > N$ en is $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ derhalve een Cauchy-rij. De metrische ruimte W is volledig, dus de limiet $\lim_{n\to\infty} f(x_n) =: g(y)$ bestaat, en de zo gedefinieerde extensie g van f is uniform continu: voor $\varepsilon > 0$ is ook $\frac{1}{3}\varepsilon > 0$ en omdat f uniform continu is bestaat dan $\delta > 0$ zodanig, dat voor $x, z \in D$ de implicatie als $d(x, z) < \delta$ dan $d(f(x), f(z)) < \frac{1}{3}\varepsilon$ geldt. Bovendien bestaat ook een $N \in \mathbb{N}$ zodanig, dat $d(g(y), g(x_n)) < \frac{1}{3}\varepsilon$ voor alle $n > N$. We kiezen de $N \in \mathbb{N}$ meteen zo groot dat hij ook voor $z = \lim_{n\to\infty} z_n$ (met $z_n \in D$ voor alle $n \in \mathbb{N}$) de afschatting $d(g(z), g(z_n)) < \frac{1}{3}\varepsilon$ garandeerd zodra $n > N$ en bovendien $d(y, x_n), d(z, z_n) < \frac{1}{3}\delta$ voor alle $n > N$. We kiezen nu $n > N$ vast, dan volgt voor $d(y, z) < \frac{1}{3}\delta$ dat $d(x_n, z_n) < \delta$ en daarmee

$$d(g(y), g(z)) \;\leq\; d(g(y, g(x_n)) \;+\; d(g(x_n), g(z_n)) \;+\; d(g(z_n), g(z)) \;<\; \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon$$

zoals gewenst. □

Merk op dat voor de uniciteit nog de uniformiteit nog de volledigheid van W gebruikt werd. Een continue afbeelding is door haar waarden op een dichte verzameling al vastgelegd, en voor een separabele ruimte hoeven dit maar aftelbaar veel waarden te zijn. Voor de existentie eisen we de volledigheid van W om te voorkomen dat de benodigde waarden van g in ‘een gat’ liggen.

Hoofdstuk 5

Inversen van functies van één variabele

5.1 Inversen van continue functies

In deze paragraaf zullen we laten zien dat injectieve continue functies $I \to \mathbb{R}$, met I een interval, een continue inverse bezitten. We hebben tot nu toe impliciet aangenomen dat we het eens zijn over wat voor deelverzameling van $\mathbb{R}$ een interval precies is. Voor de subtiliteiten die volgen zal het nuttig zijn het begrip interval precies vast te leggen. We doen dit met een definitie die het begrip interval karakteriseert door een belangrijke eigenschap. Direkt daarna zullen we aantonen dat de definitie overeenstemt met de beschrijving van interval die we al hadden.

Definitie 5.1 Onder een *interval* in $\mathbb{R}$ verstaan we een deelverzameling $V \subset \mathbb{R}$ met de eigenschap dat voor alle $a, b \in V$ met $a \leq b$ geldt: $[a, b] \subset V$.

Het volgende resultaat zegt dat het zo gedefinieerde begrip interval overeenkomt met wat we wensen.

Lemma 5.2 *Hieronder volgt een lijst van alle mogelijke intervallen V in $\mathbb{R}$.*

(a) $V = \emptyset$;

(b) *V is een segment van de vorm $[a, b]$ met $a \leq b$;*

(c) *V is een der verzamelingen $[a, b\,[\,,\ ]\,a, b]$ of $]\,a, b\,[\,$, met $a, b \in \mathbb{R}$ en $a < b$;*

(d) *V is een der verzamelingen $[a, \infty\,[$ of $]\,a, \infty\,[\,$, met $a \in \mathbb{R}$;*

(e) *V is een der verzamelingen $]-\infty, b]$ of $]-\infty, b\,[\,$, met $b \in \mathbb{R}$;*

(f) $V = \mathbb{R}$.

Bewijs: We laten het aan de lezer over te controleren dat de opgesomde verzamelingen inderdaad intervallen zijn. Wij zullen laten zien dat ieder interval van de bovenstaande vorm is. Laat daartoe V een interval zijn. Dan geldt (a), of V is niet leeg. We veronderstellen daarom in het vervolg dat V niet leeg is.

We beschouwen nu eerst het geval dat V noch naar onderen noch naar boven begrensd is. Is $x \in \mathbb{R}$ dan is x geen ondergrens en geen bovengrens van V. Er zijn derhalve $p \in V$ met $p < x$

en $q \in V$ met $q > x$. Wegens de definitie van een interval geldt $[p, q] \subset V$. In het bijzonder volgt $x \in V$. Hiermee is aangetoond dat ieder element van $\mathbb{R}$ tot V behoort. Dus (f).

We beschouwen nu de overblijvende mogelijkheid dat V naar boven begrensd is (geval 1) of naar onderen begrensd (geval 2). In het eerste geval heeft V wegens Stelling 3.37 een kleinste bovengrens; schrijf dan $b := \sup V$. Wegens Gevolg 3.41 heeft V in het tweede geval een grootste ondergrens; schrijf dan $a := \inf V$.

Het is mogelijk dat we ons zowel in geval 1 als geval 2 bevinden. Dan is V zowel naar boven als naar onderen begrensd, dus $V \subset [a, b]$, met a en b als boven en bovendien $a \leq b$. Is $a = b$, dan moet $\emptyset \subsetneq V = \{a\} = [a, b]$ zijn, dus V is van de vorm (b). Blijft over $a < b$. We zullen aantonen dat in dit geval

$$]\, a, b\, [\subset V. \tag{5.1}$$

Dit gaat als volgt. Zij $x \in]\, a, b\, [$. Dan $\inf V = a < x$ dus x is geen ondergrens van V. Er bestaat derhalve een $p \in V$ met $p < x$. Op soortgelijke wijze zien we dat er een $q \in V$ bestaat met $x < q$. Wegens de definitie van een interval concluderen we dat $[p, q] \subset V$, dus $x \in V$. Hiermee is (5.1) aangetoond. We hebben nu aangetoond dat $]\, a, b\, [\subset V \subset [a, b]$. Het is nu gemakkelijk na te gaan dat V een der in (b) en (c) genoemde verzamelingen moet zijn.

Tenslotte behandelen we de situatie dat we ons in precies één van de gevallen 1 en 2 bevinden. We veronderstellen eerst dat we ons in geval 1, maar niet in geval 2 bevinden. Dan is V naar boven, maar niet naar onderen begrensd. Dus $V \subset]-\infty, b]$, met $b = \sup V$. Zij $x \in]-\infty, b\, [$. In dit geval is x noch een ondergrens, noch een bovengrens van V, dus er bestaan $p, q \in V$ met $p < x < q$. Wegens de definitie van een interval volgt weer dat $x \in V$. Dus $]-\infty, b\, [\subset V \subset]-\infty, b]$. Hieruit volgt gemakkelijk dat V een der in (e) genoemde verzamelingen moet zijn.

Als we ons in geval 2, maar niet in geval 1 bevinden, dan concluderen we met een soortgelijke redenering dat V een der in (d) genoemde verzamelingen is. □

Definitie 5.3 Zij $I \subset \mathbb{R}$ een interval. Een functie $f : I \to \mathbb{R}$ heet *monotoon stijgend* als voor alle $x, y \in I$ geldt: $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. Hij heet *monotoon strikt stijgend* als voor alle $x, y \in I$ geldt: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$. Op soortgelijke wijze worden de begrippen *monotoon dalend* en *monotoon strikt dalend* gedefinieerd.

Lemma 5.4 *Zij $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, en zij $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ een injectieve continue functie. Dan zijn er twee gevallen.*

(a) $f(a) < f(b)$. *In dit geval is f monotoon strikt stijgend en $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$.*

(b) $f(a) > f(b)$. *In dit geval is f monotoon strikt dalend $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$.*

Bewijs: We beperken ons tot geval (a). Het bewijs van (b) is analoog. Zij $x \in]\, a, b\, [$. Uit $f(x) \leq f(a)$ zou met de tussenwaardestelling (Stelling 3.46) volgen dat f de waarde $f(a)$ aanneemt op het interval $[x, b]$. Dit is in strijd met de injectiviteit van f aangezien $a \notin [x, b]$. Er moet dus gelden dat $f(x) > f(a)$. Uit $f(x) \geq f(b)$ zou met de tussenwaardestelling volgen dat f de waarde $f(b)$ aanneemt op het interval $[a, x]$, hetgeen wederom in strijd is met de injectiviteit van f. We concluderen dat $f(x) < f(b)$. Derhalve geldt $f(a) < f(x) < f(b)$ voor alle $x \in]\, a, b\, [$.

Veronderstel nu dat $x, y \in I$ en dat $a < x < y < b$. Dan is $f(x) < f(b)$. Passen we het bovenstaande argument toe op de functie f beperkt tot het interval $[x, b]$, dan vinden we dat $f(x) < f(y) < f(b)$. Er volgt dat f monotoon strikt stijgend is op het interval I. De laatste bewering volgt door toepassing van Gevolg 4.31. $\square$

Opmerking 5.5 Natuurlijk is iedere strikt monotoon stijgende functie injectief. Uit het bovenstaande lemma blijkt dat het altijd een verstandige aanpak is de injectiviteit van een continue functie op een interval I via monotonie te bewijzen.

Stelling 5.6 *Zij $I \subset \mathbb{R}$ een niet-leeg interval, en $f : I \to \mathbb{R}$ een continue functie. Dan is $J := f(I)$ weer een niet-leeg interval.*

Zij f injectief. Dan is f of monotoon strikt stijgend of monotoon strikt dalend. Bovendien is de inverse functie $g = f^{-1} : J \to I$ continu.

Bewijs: Uit het niet-leeg zijn van I volgt dat J niet-leeg is. Veronderstel dat I uit één punt bestaat, zeg a. Dan is $J = \{f(a)\} = [f(a), f(a)]$, dus een interval. Dit geval is gemakkelijk te behandelen. We veronderstellen daarom in het vervolg dat I minstens twee punten bevat.

Veronderstel dat $p, q \in J$ met $p < q$. Er bestaan $a, b \in I$ met $f(a) = p$ en $f(b) = q$. Het is onmogelijk dat $a = b$, dus ofwel $a < b$ ofwel $b < a$. Door toepassing van Lemma 5.4 zien we dat $f([a, b])$ een segment is dat de punten $f(a) = p$ en $f(b) = q$ bevat, dus $[p, q] \subset f([a, b]) \subset f(I) = J$. We concluderen dat J een interval is.

We veronderstellen nu dat f injectief is. Dan is f een bijectie van I op J. De inverse functie $g = f^{-1}$ is derhalve een bijectie van J op I.

Kies $a, b \in I$ met $a < b$ en schrijf $I_0 := [a, b]$. Dan is $J_0 := f(I_0)$ een segment en f is op I_0 of monotoon strikt stijgend of monotoon strikt dalend, zie Lemma 5.4. We zullen laten zien dat f in het eerste geval op het gehele interval I monotoon strikt stijgend is, en in het tweede geval op het gehele interval I monotoon strikt dalend. Beide gevallen worden op analoge wijze bewezen, we beperken ons tot het eerste geval. Laat $p, q \in I$ punten zijn met $p < q$. Zij $m = \min\{p, q, a, b\}$ en $M = \max\{p, q, a, b\}$. Dan behoren m en M tot I, dus $I_1 := [m, M]$ is een gesloten en begrensd interval met $I_0 \subset I_1$ en $p, q \in I_1$. Aangezien f monotoon strikt stijgend is op I_0 kan f niet monotoon dalend zijn op I_1. Wegens Lemma 5.4 moet f dus monotoon strikt stijgend zijn op I_1. Hieruit volgt dat $f(p) < f(q)$. We concluderen dat f monotoon strikt stijgend is op I.

We besluiten met het bewijs dat g continu is. Daarbij beperken we ons tot het geval dat f monotoon strikt stijgend is. Het overgebleven geval kan op soortgelijke wijze behandeld worden.

Zij $p \in J$. Definieer $a := g(p)$, dan is $f(a) = p$. Zij $\varepsilon > 0$ en schrijf

$$I_\varepsilon =]\, a - \varepsilon, a + \varepsilon\, [\cap I.$$

De verzameling I_ε is de doorsnede van twee intervallen, dus een interval (ga na!). Veronderstel dat het interval I_ε een punt $c > a$ bevat. Dan is $f(I_\varepsilon) \supset f([a, c]) = [f(a), f(c)]$ waaruit we concluderen dat

$$f(I_\varepsilon) \supset [f(a), f(a) + \delta_1\, [\tag{5.2}$$

voor een geschikte keuze van $\delta_1 > 0$. Als het interval I_ε niet zo'n punt c bevat dan is $I \subset]-\infty, a]$ dus $J = f(I) \subset]-\infty, f(a)]$, waaruit blijkt dat voor iedere $\delta_1 > 0$ geldt $J \cap [f(a), f(a) + \delta_1 [= \{f(a)\}$. In alle gevallen bestaat er dus een $\delta_1 > 0$ zo dat (5.2) geldt.

Op soortgelijke wijze tonen we aan dat er een $\delta_2 > 0$ bestaat met de eigenschap dat $f(I_\varepsilon) \supset J \cap]\, f(a) - \delta_2, f(a)]$. Zij $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, dan geldt

$$f(I_\varepsilon) \supset J \cap]\, f(a) - \delta_2, f(a) + \delta_2 [\supset J \cap]\, f(a) - \delta, f(a) + \delta [,$$

dus $g(J \cap]\, p - \delta, p + \delta [) \subset I_\varepsilon$. Hiermee is de continuïteit van g in p aangetoond. □

Voorbeeld 5.7 Zij $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. De functie $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ is monotoon strikt stijgend, dus in het bijzonder injectief. Voorts is f continu.

De inverse functie $g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ noteren we met $x \mapsto \sqrt[n]{x}$. Met Stelling 5.6 concluderen we dat g continu is in ieder punt van $[0, \infty[$.

We zien dus dat we de continuïteit van de *wortelfuncties* uit algemene principes kunnen afleiden.

5.2 Inversen van differentieerbare functies

Na de behandeling van de natuurlijke resultaten van de vorige paragraaf, over inversen van injectieve continue functies, is een voor de hand liggende vraag wat we kunnen zeggen over de inverse van een differentieerbare functie.

Stelling 5.8 *Zij I een niet-leeg interval en $f : I \to \mathbb{R}$ een injectieve continue functie. Zij $c \in I$ en veronderstel dat f differentieerbaar is in c met afgeleide $f'(c) \neq 0$. Dan is de inverse $g = f^{-1}$ (zie Stelling 5.6) differentieerbaar in $f(c)$ met afgeleide*

$$g'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}.$$

Bewijs: Zij $J = f(I)$, dan is J een niet-leeg interval en $g : J \to \mathbb{R}$ een continue functie, zie Stelling 5.6. Uit de differentieerbaarheid van f in c volgt met Lemma 1.57 het bestaan van een functie $\varphi : I \to \mathbb{R}$, continu in c, met

$$f(x) - f(c) = \varphi(x)(x - c) \qquad (x \in I). \tag{5.3}$$

Bovendien geldt $\varphi(c) = f'(c) \neq 0$. Uit de injectiviteit van f volgt met (5.3) dat $\varphi(x) \neq 0$ voor $x \neq c$. De functie φ is derhalve nergens nul, en we zien dat de functie $1/\varphi$ gedefinieerd is op I en wegens de quotiëntregel continu in c. Met de substitutieregel voor continue functies volgt hieruit dat de functie $\psi : J \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$\psi(y) = \frac{1}{\varphi(g(y))} \qquad (y \in J)$$

continu is in $f(c)$. Zij $y \in J$. Schrijf $x = g(y)$, dan is $y = f(x)$. Door de laatste uitdrukking te substitueren in (5.3), op te merken dat $x - c = g(y) - g(f(c))$ en vervolgens te delen door $\varphi(g(y))$ concluderen we dat

$$g(y) - g(f(c)) = \psi(y)(y - f(c)), \qquad (y \in J).$$

Met Lemma 1.57 concluderen we hieruit dat g differentieerbaar is in $f(c)$. Bovendien geldt dat

$$g'(f(c)) = \psi(f(c)) = \frac{1}{\varphi(g(f(c)))} = \frac{1}{\varphi(c)} = \frac{1}{f'(c)}.$$

$\square$

Voorbeeld 5.9 We beschouwen de functie $f : x \mapsto x^n$, voor $n \geq 2$, met als domein het interval $]\,0, \infty\,[$. We zagen reeds dat f continu en injectief is, met de continue inverse $g :]\,0, \infty\,[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, die we ook noteren met $x \mapsto x^{1/n}$. Zij nu $c \in]\,0, \infty\,[$. Dan is f differentieerbaar in c en $f'(c) = nc^{n-1} \neq 0$. Hieruit volgt dat g differentieerbaar is in $f(c) = c^n$, terwijl

$$g'(c^n) = \frac{1}{f'(c)} = \frac{c}{nc^n}.$$

Zij $d \in]\,0, \infty\,[$. Dan geldt het bovenstaande met $c = d^{1/n}$, dus

$$g'(d) = \frac{1}{n}\frac{d^{1/n}}{d} = \frac{1}{n}d^{\frac{1}{n}-1}.$$

We concluderen dat de functie $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ differentieerbaar is op $]\,0, \infty\,[$ met als afgeleide

$$\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Hoofdstuk 6

Middelwaardestellingen

6.1 De stelling van Rolle, de middelwaardestelling en toepassingen

De volgende stelling van Rolle zal blijken te berusten op de maximum-minimum stelling, Stelling 4.32, en op Lemma 4.39.

Stelling 6.1 (Stelling van Rolle) *Laat $a, b \in \mathbb{R}$ zijn met $a < b$. Zij $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu, en differentieerbaar op $]\,a, b\,[$. Als $h(a) = h(b)$, dan bestaat er een tussenpunt $c \in]\,a, b\,[$, zo dat $h'(c) = 0$.*

Bewijs: De functie h neemt wegens Stelling 4.32 op $[a, b]$ zijn minimum m en zijn maximum M aan. Is $m = M$ dan is h constant op $[a, b]$ dus $h' = 0$ op $]\,a, b\,[$.

We mogen dus veronderstellen dat $m < M$. Dan geldt $m < h(a)$ of $h(a) < M$. In het eerste geval wordt m aangenomen in een inwendig punt van $[a, b]$, aangezien $h(b) = h(a) \neq m$. In het tweede geval wordt de waarde M door h aangenomen in een inwendig punt van $[a, b]$. In ieder geval heeft h een extremum in een inwendig punt $c \in]\,a, b\,[$. Wegens Lemma 4.39 geldt $h'(c) = 0$. □

Het volgende lemma is nodig voor de eerste toepassing van de stelling van Rolle.

Lemma 6.2 *Zij $I \subset \mathbb{R}$ een niet-leeg interval en $f : I \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie.*

(a) *Is f monotoon stijgend, dan is $f'(x) \geq 0$ voor alle $x \in I$.*

(b) *Is f monotoon dalend, dan is $f'(x) \leq 0$ voor alle $x \in I$.*

Opmerking 6.3 De omkeringen van (a) en (b) zullen we verderop met behulp van de middelwaardestelling bewijzen.

Bewijs: We bewijzen alleen (a). Het bewijs van (b) is soortgelijk. Zij $c \in I$. Uit het monotoon stijgend zijn van f volgt dat

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

voor alle $x \in I$ met $x < c$ en voor alle $x \in I$ met $x > c$, dus voor alle $x \in I \setminus \{c\}$. Met Lemma 1.33 volgt hieruit, door de limiet voor $x \to c$ te nemen, dat $f'(c) \geq 0$. □

Stelling 6.4 (Inverse functiestelling) *Zij I een niet-leeg interval in $\mathbb{R}$ en $f : I \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie met $f'(x) \neq 0$ voor alle $x \in I$. Dan is f een bijectie van I naar een niet-leeg interval J. Bovendien is de inverse $g := f^{-1}$ een differentieerbare functie $J \to \mathbb{R}$. De afgeleide van g wordt gegeven door*

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \qquad (y \in J). \tag{6.1}$$

Tenslotte is voldaan aan één van de volgende condities.

(a) *f en g zijn monotoon strikt stijgend en f' en g' zijn overal positief;*

(b) *f en g zijn monotoon strikt dalend en f' en g' zijn overal negatief.*

Bewijs: We bewijzen eerst dat f injectief is. Veronderstel daartoe dat $x, y \in I$ en $x < y$. Uit $f(x) = f(y)$ zou met de stelling van Rolle volgen dat er een $z \in]\,x, y\,[$ bestaat zo dat $f'(z) = 0$, tegenspraak. We zien dat $f(x) \neq f(y)$ en concluderen dat f injectief is op I. De overige resultaten, tot aan de bewering dat (a) of (b) vervuld moet zijn, volgen nu uit Stellingem 5.6 en 5.8.

We tonen tenslotte aan dat (a) of (b) moet gelden. Uit Lemma 5.4 volgt dat f monotoon strikt stijgend is of monotoon strikt dalend. Men ziet gemakkelijk in dat voor de inverse g dan hetzelfde geldt. Veronderstel eerst dat f monotoon strikt stijgend is. Dan volgt uit Lemma 6.2 dat $f' \geq 0$. Uit het gegeven dat $f'(x) \neq 0$ voor alle $x \in I$ volgt nu dat f' positief is op I. Met formule (6.1) concluderen we hieruit dat ook g' positief is op zijn domein.

Het overgebleven geval, dat f monotoon strikt dalend is, wordt tenslotte op soortgelijke wijze behandeld. □

Als tweede belangrijke toepassing van de stelling van Rolle behandelen we de *middelwaardestelling.*

Stelling 6.5 (Eerste middelwaardestelling der differentiaalrekening) *Laat a en b reële getallen zijn met $a < b$ en zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een continue functie die differentieerbaar is op $]\,a, b\,[$. Dan is er een tussenpunt $c \in]\,a, b\,[$ zo dat*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Bewijs: Het idee is om van f een lineaire functie van de vorm $x \mapsto \lambda x$ af te trekken, zo dat de stelling van Rolle toepasbaar is op de ontstane functie $h : x \mapsto f(x) - \lambda x$. Daartoe kiezen we $\lambda \in \mathbb{R}$ zo dat $h(b) = h(a)$, ofwel $f(b) - \lambda b = f(a) - \lambda a$, hetgeen gelijkwaardig is met

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Passen we de stelling van Rolle toe op de resulterende functie h, dan vinden we dat er een $c \in]\,a, b\,[$ bestaat met de eigenschap dat $h'(c) = 0$ ofwel $f'(c) = \lambda$. □

Een nuttige toepassing van de middelwaardestelling is het volgende.

Lemma 6.6 *Zij $I \subset \mathbb{R}$ een interval, en $f : I \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie.*

(a) *Als $f'(x) = 0$ voor alle $x \in I$ dan is f constant.*

(b) *Als $f'(x) \geq 0$ voor alle $x \in I$ dan is f monotoon stijgend. Is $f'(x) > 0$ voor alle $x \in I$, dan is f monotoon strikt stijgend.*

(c) *Als $f'(x) \leq 0$ voor alle $x \in I$ dan is f monotoon dalend. Is $f'(x) < 0$ voor alle $x \in I$, dan is f monotoon strikt dalend.*

Bewijs: Zij $a, b \in I$ met $a < b$. Dan bestaat er wegens de middelwaardestelling een $c \in]\,a, b\,[$ met

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{6.2}$$

Is $f' = 0$ dan blijkt hieruit dat $f(a) = f(b)$, en we concluderen dat f constant is. Is $f' \geq 0$ dan blijkt uit (6.2) dat $f(b) \geq f(a)$ dus f is monotoon stijgend. Is $f' > 0$ dan blijkt dat $f(b) > f(a)$, en we concluderen dat f monotoon strikt stijgend is. Hiermee zijn (a) en (b) bewezen. Uitspraak (c) wordt op soortgelijke wijze bewezen. □

6.2 Toepassing: de exponentiële functie

Als toepassing van de voorgaande paragrafen behandelen we een rigoreuze introductie van de *exponentiële functie.* Het idee is de exponentiële functie $f : x \mapsto e^x$ in te voeren met behulp van zijn karakteriserende differentiaalvergelijking, namelijk de vergelijking $f' = f$.

Stelling 6.7 *Er is precies één differentieerbare functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die voldoet aan*

$$f' = f \quad \text{en} \quad f(0) = 1. \tag{6.3}$$

Deze functie is monotoon strikt stijgend en heeft $]\,0, \infty\,[$ als beeld.

Deze stelling zullen we bewijzen langs een omweg, namelijk door eerst de differentiaalvergelijking voor de inverse g van de bovenstaande functie op te stellen (we weten natuurlijk al dat deze functie bestaat, het is de (natuurlijke) *logaritmische functie;* we willen het bestaan nu theoretisch funderen). Indien hij bestaat voldoet de inverse aan $f(g(t)) = t$. Differentiëren we deze relatie naar t, dan zien we met behulp van de kettingregel dat de inverse zou moeten voldoen aan $f'(g(t))g'(t) = 1$, dus

$$g'(t) = \frac{1}{f'(g(t))} = \frac{1}{f(g(t))} = \frac{1}{t}.$$

Dit is de motivatie voor het volgende lemma.

Lemma 6.8 *Er is precies één differentieerbare functie $g :]\,0, \infty\,[\to \mathbb{R}$ met*

$$g'(t) = \frac{1}{t} \quad (t > 0) \quad \textit{en} \quad g(1) = 0. \tag{6.4}$$

Deze functie is strikt monotoon stijgend en heeft $\mathbb{R}$ als beeld.

Bewijs: Als g bestaat, dan is hij in ieder geval uniek. Immers zij g_2 een tweede differentieerbare functie die voldoet aan (6.4), dan voldoet de functie $h := (g - g_2)$ aan $h' = 0$, dus h is constant wegens Lemma 6.6 (a). Uit $h(1) = g(1) - g_2(1) = 0$ volgt dan dat $h = 0$.

Het bestaan van g zullen we later met behulp van Riemann-integratie aantonen. We zullen dan aantonen dat

$$g(t) = \int_1^t \frac{1}{s}\, ds$$

voldoet. Uit de formule voor de afgeleide van g leiden we met Lemma 6.6 (b) af dat g monotoon strikt stijgend is. In het bijzonder is g dus injectief. We zullen later aantonen dat voor iedere $R > 0$ een t_1 bestaat met $g(t_1) < -R$ en een t_2 met $g(t_2) > R$. Met behulp van de tussenwaardestelling, Stelling 3.46, volgt hieruit dat $g(]\,0, \infty\,[)$ het interval $[-R, R]$ bevat voor iedere $R > 0$. Hieruit volgt dat $g(]\,0, \infty\,[) = \mathbb{R}$. Dus g is een bijectie van $]\,0, \infty\,[$ op $\mathbb{R}$. $\square$

Opmerking 6.9 Het bovenstaande bewijs is (nog) niet volledig. Het bewijs van een tweetal beweringen is uitgesteld tot het moment dat we Riemann-integratie afdoende kunnen behandelen, zie Voorbeeld 7.46. Bij dat onderwerp zullen we ons uiteraard niet beroepen op de in deze paragraaf ontwikkelde theorie. In de rest van deze paragraaf zullen onze bewijzen volledig zijn.

Bewijs van Stelling 6.7: Zij $g :]\,0, \infty\,[\to \mathbb{R}$ als in het bovenstaande lemma. Dan is g bijectief. Derhalve heeft g een inverse $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; deze voldoet aan $f(x) > 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Voor alle $y > 0$ geldt dat $g'(y) \neq 0$, dus met Stelling 6.4 leiden we af dat de inverse differentieerbaar is. De afgeleide van deze inverse voldoet wegens (6.1) aan

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = f(x)$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$. Uit $g(1) = 0$ volgt bovendien dat $f(0) = 1$. De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is derhalve differentieerbaar en voldoet aan (6.3).

Is $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een tweede differentieerbare functie die voldoet aan (6.3), dan is de functie $h := f^{-1} f_2$ differentieerbaar op $\mathbb{R}$. Bovendien geldt, voor $x \in \mathbb{R}$:

$$h' = \frac{f' f_2 - f f_2'}{f^2} = \frac{f f_2 - f f_2}{f^2} = 0,$$

dus h is constant. Uit $h(0) = f_2(0)/f(0) = 1$ volgt dat $h = 1$. Dus $f_2 = f$. Tenslotte volgt de laatste bewering van Stelling 6.7 uit het feit dat de inverse g van f een monotoon strikt stijgende bijectie is van $]\,0, \infty\,[$ op $\mathbb{R}$. $\square$

Definitie 6.10 De unieke oplossing van (6.3) heet *de exponentiële functie.* Hij wordt genoteerd met exp .

Opmerking 6.11 Op dit moment willen we de notatie $\exp x = e^x$ nog niet gebruiken, omdat die suggereert dat er sprake is van een macht van een getal e. A priori is dit niet duidelijk. In het onderstaande zullen we eigenschappen van de exponentiële functie afleiden die de notatie uiteindelijk zullen rechtvaardigen.

Lemma 6.12 *Voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ en $n \in \mathbb{Z}$ geldt:*

(a) $\exp x \exp y = \exp(x + y)$,
(b) $\exp(-x) = (\exp x)^{-1}$,
(c) $(\exp x)^n = \exp(nx)$.

Bewijs: Zij $y \in \mathbb{R}$ willekeurig, maar vast. We beschouwen de functie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(y)^{-1} \exp(x + y)$. Met de kettingregel en de productregel zien we dat de functie h differentieerbaar is. Voor de afgeleide geldt:

$$h'(x) = \exp(y)^{-1} \exp'(x + y) = h(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Voorts is $h(0) = 1$. De functie h voldoet dus aan (6.3). Met Stelling 6.7 concluderen we dat $h(x) = \exp(x)$. Hieruit volgt (a).

Eigenschap (b) is een direct gevolg van (a) en de definities. Tenslotte volgt eigenschap (c) met $n \in \mathbb{N}$ uit herhaald toepassen van (a). Met (b) leiden we dan af, voor $n \in \mathbb{N}$, dat

$$(\exp x)^{-n} = ((\exp x)^n)^{-1} = \exp(nx)^{-1} = \exp((-n)x).$$

□

Zij $q \in \mathbb{N},\ q \geq 1$. In Voorbeeld 5.7 introduceerden we de functie $x \mapsto x^{1/q}$ op $[0, \infty[$ als inverse van de functie $x \mapsto x^q,\ [0, \infty[\to \mathbb{R}$. Bovendien toonden we aan dat deze functie continu is.

We brengen in herinnering dat ieder element $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ op precies één manier te schrijven is als $r = p/q$ met $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 1$, en p, q onderling ondeelbaar, d.w.z., p en q hebben geen gemeenschappelijke delers. Veronderstel dat ook geldt $r = \tilde{p}/\tilde{q}$, met $\tilde{p}, \tilde{q} \in \mathbb{Z}$, $\tilde{q} \geq 1$. Dan is er een $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, zo dat $\tilde{p} = np$ en $\tilde{q} = nq$. Voor $x \geq 0$ geldt daarom dat

$$((x^{1/\tilde{q}})^n)^q = (x^{1/\tilde{q}})^{nq} = x,$$

dus

$$(x^{1/\tilde{q}})^n = x^{1/q}.$$

Hierbij hebben we gebruikt dat $(y^n)^q = y^{nq}$, voor alle $y \in \mathbb{R}$ en alle *natuurlijke getallen* q, n; ga na dat dit geoorloofd is. We concluderen nu dat

$$(x^{1/\tilde{q}})^{\tilde{p}} = (x^{1/\tilde{q}})^{np} = ((x^{1/\tilde{q}})^n)^p = (x^{1/q})^p.$$

De voorgaande discussie diende ter voorbereiding van de volgende definitie.

Definitie 6.13 Zij $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Dan definiëren we, voor $x \in [0, \infty[$, het getal x tot de macht r door

$$x^r := (x^{\frac{1}{q}})^p; \tag{6.5}$$

hierin zijn $p, q \in \mathbb{Z}$ zo dat $q \geq 1$ en $r = p/q$ (wegens de voorgaande discussie is de uitdrukking in het rechterlid van (6.5) onafhankelijk van de keuze van p, q).

Opmerking 6.14 Zij x, r, p, q als boven. Dan geldt dat

$$(x^r)^q = (x^{1/q})^{pq} = (x^{1/q})^q)^p = x^p,$$

waaruit we concluderen dat

$$(x^{1/q})^p = x^r = (x^p)^{1/q}.$$

Definitie 6.15 We definiëren het getal e door $e := \exp(1)$.

Opmerking. We negeren hier de reeds gegeven definitie van e door middel van een reeks, zie formule (3.7) in Voorbeeld 3.55. In Voorbeeld 6.39 zullen we uiteindelijk laten zien dat formule (3.7) een gevolg is van de zojuist gegeven definitie.

Lemma 6.16 *Er is precies één continue functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met de eigenschap dat*

$$f(x) = e^x \quad \text{voor alle} \quad x \in \mathbb{Q}, \tag{6.6}$$

namelijk de functie $f = \exp$.

Bewijs: We bewijzen eerst dat de functie $f = \exp$ voldoet. Voor $x = 0$ is aan de identiteit in (6.6) voldaan. Zij $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$ en schrijf $x = p/q$ met $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 1$. Dan geldt wegens Lemma 6.12 (c) dat

$$(\exp x)^q = \exp(qx) = \exp p = \exp(1)^p = e^p.$$

We concluderen dat $\exp x = (e^p)^{1/q} = e^{p/q} = e^x$. De functie exp voldoet dus. Zij g een tweede continue functie die voldoet. Dan is de functie $h = g - \exp$ continu op $\mathbb{R}$. Derhalve is de verzameling $h^{-1}(\{0\})$ gesloten, zie Lemma 2.9. De verzameling $h^{-1}(\{0\})$ omvat $\mathbb{Q}$, dus ook $\bar{\mathbb{Q}}$. In een van de opgaven zagen we dat $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. We concluderen dat $h = 0$ op $\mathbb{R}$, dus $g = \exp$. □

Het bovenstaande resultaat rechtvaardigt de notatie $e^x = \exp x$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. In het vervolg zullen we deze notatie dan ook steeds gebruiken.

Definitie 6.17 De inverse van de exponentiële functie heet de *logaritmische functie* en wordt genoteerd met $\log :]0, \infty[\to \mathbb{R}$.

Lemma 6.18 *De functie* log *is een differentieerbare monotoon strikt stijgende bijectie van* $]0, \infty[$ *op* $\mathbb{R}$. *De afgeleide wordt gegeven door*

$$\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}.$$

Voor alle $u, v \in]0, \infty[$ en alle $p, q \in \mathbb{Z}$ met $q \geq 1$ geldt

(a) $\log(uv) = \log u + \log v$,

(b) $\frac{p}{q}\log u = \log(u^{\frac{p}{q}})$.

Bewijs: De beweringen tot (a) en (b) volgen uit de Stellingen 6.7 en 6.4.

Voor (a) schrijven we $x = \log u$ en $y = \log v$. Dan is $e^x = u$ en $e^y = v$. Met Lemma 6.12 (a) volgt hieruit dat $uv = e^{x+y}$, dus $\log(uv) = x + y = \log u + \log v$.

Voor (b) schrijven we weer $x = \log u$. Met Lemma 6.12 (c) zien we dat $u^p = (e^x)^p = e^{px}$, dus $px = \log(u^p)$, en we concluderen dat (b) geldt met $q = 1$. Hieruit leiden we weer af dat

$$q\log(u^{p/q}) = \log((u^{p/q})^q) = \log(((u^p)^{1/q})^q) = \log u^p = p\log u;$$

delen we linker- en rechterlid door q dan vinden we (b). $\square$

Lemma 6.19 *Zij $a > 0$. Er is een unieke continue functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met de eigenschap dat $f(x) = a^x$ voor alle $x \in \mathbb{Q}$. Deze functie wordt gegeven door*

$$f(x) = e^{x\log a}. \tag{6.7}$$

Bewijs: We zullen aantonen dat de door (6.7) gegeven functie f voldoet. Het bewijs wordt dan voltooid als het bewijs van Lemma 6.16.

De functie $f : x \mapsto e^{x\log a}$ is een samenstelling van continue functies, dus continu. Voor $x = 0$ geldt $f(x) = f(0) = e^0 = a^0 = a^x$. Zij nu $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, en schrijf $x = p/q$ met $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 1$. Dan geldt wegens Lemma 6.18 (b) dat

$$f(x) = e^{\frac{p}{q}\log a} = e^{\log(a^{p/q})} = a^{p/q} = a^x.$$

$\square$

Definitie 6.20 Voor $a > 0$ en $x \in \mathbb{R}$ definiëren we a tot de macht x door

$$a^x := e^{x\log a}.$$

We eindigen deze paragraaf met enige eigenschappen van de *machtsfunctie* $x \mapsto a^x$. Het bewijs laten we over aan de lezer.

Stelling 6.21 *Zij $a > 0$. De functie $x \mapsto a^x$ is differentieerbaar met afgeleide*

$$\frac{d}{dx}a^x = \log a\; a^x.$$

Bovendien geldt voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ dat

(a) $\log a^x = x\log a$,

(b) $a^x a^y = a^{x+y}$,

(c) $(a^x)^y = a^{xy}$.

Is $a > 1$, dan is de functie $x \mapsto a^x$ een strikt monotoon stijgende bijectie van $\mathbb{R}$ op $]0, \infty[$.
Is $0 < a < 1$ dan is de functie een strikt monotoon dalende bijectie van $\mathbb{R}$ op $]0, \infty[$.
Voor $a = 1$ is de functie de constante functie 1.

6.3 De regel van de l'Hôpital

In deze paragraaf zullen we de bekende regel van de l'Hôpital voor limieten van quotiënten afleiden uit de volgende generalisatie van de eerste middelwaardestelling.

Stelling 6.22 (Tweede middelwaardestelling van de differentiaalrekening) *Laat $a, b \in \mathbb{R}$ zijn met $a < b$ en $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue functies die differentieerbaar zijn op $]\,a, b\,[$. Dan bestaat er een tussenpunt $c \in\,]\,a, b\,[$, zo dat*

$$(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c). \tag{6.8}$$

Opmerking 6.23 Door in de bovenstaande stelling $g(x) = x$ te nemen blijkt dat de eerste middelwaardestelling, Stelling 6.5, een bijzonder geval is.

Bewijs: Het idee is analoog aan dat van het bewijs van de eerste middelwaardestelling. We zoeken reële coëfficiënten λ en μ zo dat de stelling van Rolle toepasbaar wordt op de functie $h := \mu f + \lambda g$. De coëfficiënten moeten zodanig gekozen worden dat $h(a) = h(b)$, ofwel $\mu(f(b) - f(a)) + \lambda(g(b) - g(a)) = 0$. We maken de keuze $\mu = g(b) - g(a),\ \lambda = -(f(b) - f(a))$. Dan voldoet h aan de voorwaarden van de stelling van Rolle. Derhalve bestaat er een tussenpunt $c \in\,]\,a, b\,[$ zo dat $h'(c) = 0$, ofwel $0 = (g(b) - g(a)) f'(c) - (f(b) - f(a)) g'(c) = 0$.
$\square$

Opmerking 6.24 Veronderstel dat de voorwaarden van Stelling 6.22 vervuld zijn, en dat bovendien gegeven is dat $g'(x) \neq 0$ voor alle $x \in\,]\,a, b\,[$. Dan volgt door toepassing van de stelling van Rolle dat $g(b) \neq g(a)$. Derhalve kunnen we (6.8) herschrijven in de beter ogende vorm

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Een fraaie toepassing van het bovenstaande is de volgende regel van de l'Hôpital.

Stelling 6.25 (Regel van de l'Hôpital) *Zij $I =]\,a - \delta, a + \delta\,[$, met $a \in \mathbb{R}$ en $\delta > 0$. Laat $f, g : I \to \mathbb{R}$ continu zijn op I en differentieerbaar op $I \setminus \{a\}$. Veronderstel verder dat $f(a) = g(a) = 0$ en dat $g'(x) \neq 0$ voor alle $x \in I \setminus \{a\}$. Dan is $g(x) \neq 0$ voor alle $x \in I \setminus \{a\}$, terwijl*

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \ \Rightarrow\ \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda.$$

Bewijs: Veronderstel dat er een $x \in I \setminus \{a\}$ is met $g(x) = 0$. Dan volgt door toepassing van de stelling van Rolle op de functie g dat er een c tussen a en x bestaat met $g'(c) = 0$, tegenspraak. De functie g is dus nergens op $I \setminus \{a\}$ gelijk aan nul.

Met de tweede middelwaardestelling volgt voor iedere $x \in I \setminus \{a\}$ het bestaan van een strikt tussen a en x gelegen $c(x)$ zo dat $(f(x) - f(a)) g'(c(x)) = (g(x) - g(a)) f'(c(x))$, dus

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}.$$

Wegens de insluitstelling geldt dat $c(x) \to a$ voor $x \downarrow a$ en voor $x \uparrow a$, dus voor $x \to a,\ x \neq a$. Aangezien het domein van c gelijk is aan $I \setminus \{a\}$, concluderen we dat $\lim_{x \to a} c(x) = a$. Met de substitutieregel voor limieten, Lemma 1.32, volgt nu de gewenste implicatie. $\square$

De regel van de l'Hôpital is in het bijzonder toepasbaar onder de sterkere voorwaarden dat $f, g : I \to \mathbb{R}$ continu differentieerbaar zijn op I terwijl $f(a) = g(a) = 0$ en $g'(x) \neq 0$ voor alle $x \in I$. In dat geval is

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Het voordeel van de in de Stelling 6.25 gekozen formulering is dat hij herhaald toepasbaar is. We lichten dit toe aan de hand van enige voorbeelden.

Voorbeeld 6.26 We beschouwen de limiet

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}.$$

Schrijf $f(x) = \cos x - 1$ en $g(x) = x^2$. Dan is $f(0) = g(0) = 0$. Voorts is $f'(x) = -\sin x$ en $g'(x) = 2x$, dus $f'(0) = g'(0) = 0$. Tenslotte is $f''(x) = -\cos x$ en $g''(x) = 2$. Hieruit volgt dat g'' nergens op bijvoorbeeld het interval $I =]-1, 1[$ de waarde nul aanneemt. Door achtereenvolgens toepassen van de regel van de l'Hôpital op de functies f', g' en f, g concluderen we dat de functie g' nergens op $I \setminus \{0\}$ de waarde nul aanneemt en dat hetzelfde geldt voor de functie g. Verder volgt

$$\lim_{x \to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{f''(0)}{g''(0)} = -\frac{1}{2},$$

dus ook

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{1}{2}$$

en dus ook

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

Voorbeeld 6.27 Wederom door herhaald toepassen van de regel van de l'Hôpital vinden we dat

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^2(e^x - 1)} &= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{(x^2 + 2x)e^x - 2x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{(x^2 + 4x + 2)e^x - 2} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{-\cos x}{(x^2 + 6x + 6)e^x} = -\frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

6.4 De formule van Taylor

Laat $I \subset \mathbb{R}$ een interval zijn en $f : I \to \mathbb{R}$ een functie. Is f differentieerbaar, dan is $f' : x \mapsto f'(x)$ weer een functie $I \to \mathbb{R}$, die we de afgeleide van f noemen. Zo voortgaande kunnen we met inductie de n-de afgeleide van een functie definiëren.

Definitie 6.28 Laat $I \subset \mathbb{R}$ een interval zijn. Iedere functie $f : I \to \mathbb{R}$ noemen we nul keer differentieerbaar. We noteren $f^{(0)} = f$.

Zij $n \in \mathbb{N}$. Een functie $f : I \to \mathbb{R}$ heet $(n+1)$-keer differentieerbaar indien f n-keer differentieerbaar is met een n-de orde afgeleide $f^{(n)}$ die differentieerbaar is. De $(n+1)$-ste orde afgeleide van f is de functie $f^{(n+1)} : I \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

Opmerking 6.29 Men gebruikt ook vaak de notatie

$$\frac{d^n f}{dx^n} := f^{(n)}.$$

Lemma 6.30 *Laat I een open interval zijn, en $a \in I$. Laat de functies $f, g : I \to \mathbb{R}$ beide n-keer differentieerbaar zijn, $n \in \mathbb{N}$, en veronderstel dat $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a) = 0$ voor alle $0 \le k \le n-1$. Veronderstel verder dat $g^{(n)}(x) \neq 0$ voor alle $x \in I \setminus \{a\}$. Dan geldt dat $g^{(k)}(x) \neq 0$ voor alle $x \in I \setminus \{a\}$ en voor alle $0 \le k \le n$. Bovendien bestaat er bij iedere $x \in I \setminus \{a\}$ een strikt tussen a en x gelegen punt c met de eigenschap dat*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}. \tag{6.9}$$

Bewijs: We bewijzen het resultaat met inductie naar n. Voor $n = 0$ is het resultaat evident. De inductiestap gaat als volgt. Laat het resultaat voor n bewezen zijn. Veronderstel dat de functies $f, g : I \to \mathbb{R}$ beide $(n+1)$-keer differentieerbaar zijn en dat $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a) = 0$ voor alle $0 \le k \le n$. Veronderstel verder dat $g^{(n+1)}(x) \neq 0$ voor alle $a \in I \setminus \{a\}$. Uit de veronderstelling dat $g^{(n)}(x) = 0$ voor een $x \in I \setminus \{a\}$ volgt met de stelling van Rolle het bestaan van een strikt tussen a en x gelegen punt ξ zo dat $g^{(n+1)}(\xi) = 0$, tegenspraak. Derhalve is $g^{(n)}$ nergens op $I \setminus \{a\}$ gelijk aan nul. Met de inductieveronderstelling concluderen we dat hetzelfde geldt voor alle afgeleiden $g^{(k)}$, voor $0 \le k \le n$.

Zij nu $x \in I \setminus \{a\}$. Dan bestaat er volgens de inductieveronderstelling een strikt tussen a en x gelegen punt c' zo dat

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(c')}{g^{(n)}(c')} = \frac{f^{(n)}(c') - f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(c') - g^{(n)}(a)}.$$

De functies $f^{(n)}$ en $g^{(n)}$ voldoen aan de voorwaarden van de tweede middelwaardestelling. Bovendien is $g^{(n+1)}$ ongelijk nul buiten a. Derhalve bestaat er wegens de genoemde stelling een strikt tussen a en c' gelegen punt c zo dat

$$\frac{f^{(n)}(c') - f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(c') - g^{(n)}(a)} = \frac{f^{(n)\prime}(c)}{g^{(n)\prime}(c)} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{g^{(n+1)}(c)}.$$

Dit levert de gewenste formule (6.9). Aangezien c' strikt tussen a en x ligt, en c strikt tussen a en c', ligt c ook strikt tussen a en x. $\square$

Lemma 6.31 *De functie* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x-a)^n$ *voldoet aan*

$$g^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}(x-a)^{n-k}$$

voor alle $0 \le k \le n$. *In het bijzonder geldt* $g^{(k)}(a) = 0$ *voor alle* $0 \le k < n$ *en* $g^{(n)}(x) = n!$ *voor alle* $x \in \mathbb{R}$.

Bewijs: Het bewijs laten we aan de lezer over. □

Gevolg 6.32 *Zij* I *een open interval en* $a \in I$. *Laat de functie* $f : I \to \mathbb{R}$ n *keer differentieerbaar zijn en voldoen aan* $f^{(k)}(a) = 0$ *voor alle* $0 \le k < n$. *Dan bestaat er voor iedere* $x \in I \setminus \{a\}$ *eens strikt tussen* a *en* x *gelegen punt* c *zo dat*

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n.$$

Bewijs: Definieer $g(x) = (x-a)^n$. Dan volgt het resultaat direct door toepassen van Lemmas 6.30 en 6.31. □

Definitie 6.33 Laat f een n-keer differentieerbare functie zijn, gedefinieerd op een open interval dat a bevat. Het *n-de orde Taylor polynoom* $p = p_{f,a,n}$ van f in het punt a is gedefinieerd door

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

De functie $r = r_{f,a,n}$ gedefinieerd door $r = f - p$ heet de n-de orde Taylor restterm van f in het punt a.

Het volgende lemma geeft de motivatie achter de bovenstaande definitie.

Lemma 6.34 *Laat* f, p *en* r *als in de bovenstaande definitie zijn. Dan is* $r^{(k)}(a) = 0$ *voor alle* $0 \le k \le n$. *Is* f $(n+1)$*-keer differentieerbaar, dan geldt hetzelfde voor* r. *Bovendien is dan* $f^{(n+1)} = r^{(n+1)}$.

Bewijs: Dit volgt door toepassing van Lemma 6.31. □

Stelling 6.35 (Formule van Taylor) *Zij* I *een open interval,* $a \in I$ *en* $f : I \to \mathbb{R}$ *een* $n+1$ *keer differentieerbare functie. Dan is er bij iedere* $x \in I \setminus \{a\}$ *een strikt tussen* a *en* x *gelegen punt* c *zo dat*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Bewijs: Zij p het n-de orde Taylorpolynoom van f in a en r de bijbehorende restterm. Wegens Lemma 6.34 voldoet de functie r aan de voorwaarden van Gevolg 6.32 met $n + 1$ in plaats van n. Derhalve bestaat er bij iedere $x \in I \setminus \{a\}$ een strikt tussen a en x gelegen punt c zo dat

$$r(x) = \frac{r^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{6.10}$$

Voor de laatste identiteit hebben we wederom Lemma 6.34 gebruikt. □

Opmerking 6.36 De laatste uitdrukking van (6.10) heet de formule van Lagrange voor de n-de orde restterm. Leer de formule van Taylor en de bijbehorende formule van Lagrange uit het hoofd.

Voorbeeld 6.37 We beschouwen de functie $f : x \mapsto (1-x)^{-1}$ op het interval $I =]-1, 1[$. De functie f is willekeurig vaak differentieerbaar op I, met

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Derhalve wordt het n-de orde Taylor polynoom rond 0 gegeven door

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k.$$

De formule van Taylor geeft voor iedere $x \in I$ het bestaan van een tussen 0 en x gelegen punt $c = c_x$ zo dat

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{(1-c)^{n+2}}.$$

Als voorbereiding op het volgende voorbeeld bewijzen we eerst een lemma.

Lemma 6.38 *Voor iedere $M \geq 0$ geldt* $\lim_{n\to\infty} \frac{M^n}{n!} = 0$.

Voor $M < 0$ is $\frac{M^n}{n!} = (-1)^n \frac{|M|^n}{n!}$ en daarom eveneens $\lim_{n\to\infty} \frac{M^n}{n!} = 0$.
Bewijs: Kies $N \in \mathbb{N}$ met $N > 2M$. Dan geldt voor $n \geq N$ dat

$$0 \leq \frac{M^n}{n!} = \frac{M^N}{N!}\frac{M^{n-N}}{(N+1)(N+2)\cdots n} \leq \frac{M^N}{N!}\frac{M^{n-N}}{(N+1)^{n-N}} \leq \frac{M^N}{N!}(\frac{1}{2})^{n-N}.$$

De laatste uitdrukking heeft limiet 0 voor $n \to \infty$. Gebruik nu de insluitstelling. □

Voorbeeld 6.39 We beschouwen de functie $f : x \mapsto e^x$ op $\mathbb{R}$. De functie f is willekeurig vaak differentieerbaar met $f^{(n)} = f$ voor alle n. Zij $x \in \mathbb{R}$. De formule van Taylor rond 0 geeft voor iedere n het bestaan van een $c = c_n$ tussen 0 en x zo dat

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!}\, x^{n+1}.$$

Kies nu $M \geq |x|$. Dan is ook $c \leq M$, en dus $e^c \leq e^M$. Hieruit leiden we af dat

$$|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}| \leq e^M \frac{M^{n+1}}{(n+1)!}$$

Wegens het bovenstaande lemma, gecombineerd met de insluitstelling, vinden we dat

$$\lim_{n\to\infty} e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 0,$$

dus

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Zoals eerder afgesproken schrijven we dit laatste ook als

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Door invullen van $x = 1$ vinden we tenslotte formule (3.7), zie ook de opmerking na Definitie 6.15.

Voor andere voorbeelden van Taylorreeksen verwijzen we de lezer naar het college Infinitesimaalrekening.

Hoofdstuk 7

Integratie

7.1 Definitie van de Riemann-integraal

In het vervolg is steeds $I = [a, b]$ een gesloten en begrensd interval met $a < b$.

Definitie 7.1 Een functie $f : I \to \mathbb{R}$ heet *begrensd* op I als er een constante $M > 0$ bestaat zo dat $|f(x)| \leq M$ voor alle $x \in I$.

In deze paragraaf behandelen we het begrip *Riemann-integraal* van een begrensde functie $f : I \to \mathbb{R}$.

Definitie 7.2 Onder een *verdeling* V van I verstaan we een eindige deelverzameling $V \subset I$ met $a, b \in V$. De collectie van alle verdelingen van I noteren we met $\mathcal{V}(I)$.

De punten van een verdeling V kunnen we ordenen naar grootte; dus $V = \{x_0, \ldots, x_n\}$, met $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. We zullen soms spreken over de verdeling $V = (x_j)_{j=0}^n$ van $[a, b]$ en bedoelen dan impliciet dat de punten x_j naar grootte geordend zijn.

Definitie 7.3 Is $f : I \to \mathbb{R}$ een begrensde functie, en V een verdeling van I als boven, dan definiëren we de *ondersom* $\underline{S}(f, V)$ van f bij de verdeling V door

$$\underline{S}(f, V) := \sum_{j=1}^{n} \inf_{I(j)} f \cdot (x_j - x_{j-1}).$$

Hierbij hebben we de notatie $I(j)$ gebruikt voor het j-de deelinterval $[x_{j-1}, x_j]$ $(1 \leq j \leq n)$. Op soortgelijke wijze definiëren we de *bovensom* van f bij V door:

$$\overline{S}(f, V) := \sum_{j=1}^{n} \sup_{I(j)} f \cdot (x_j - x_{j-1}).$$

Opmerking 7.4 De begrensdheid van de functie f naar onderen is nodig om het bestaan van de $\inf_{I(j)} f$ te garanderen, en daarmee het bestaan van de ondersom $\underline{S}(f, V)$. De begrensdheid van f naar boven is nodig om het bestaan van $\overline{S}(f, V)$ te garanderen.

Voorbeeld 7.5 Zij $f : I \to \mathbb{R}$ een begrensde functie. We beschouwen de tweepunts-verdeling $V = \{a, b\}$. Voor deze verdeling geldt dat

$$\underline{S}(f, V) = \inf_I f \cdot (b - a), \qquad \overline{S}(f, V) = \sup_I f \cdot (b - a).$$

Zij nu f de constante functie $x \mapsto c$, met $c \in \mathbb{R}$, dan is $\underline{S}(f, V) = \overline{S}(f, V) = c(b - a)$.

Voorbeeld 7.6 We beschouwen het geval dat $I = [0, 1]$ en dat $f : I \to \mathbb{R}$ gegeven wordt door $f(x) = x$. Voor iedere gehele $n \geq 1$ definiëren we de verdeling V_n van I door

$$V_n := \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\}.$$

Deze verdeling bepaalt n deelintervallen met lengte $1/n$. Er geldt dat

$$\inf_{I(j)} f = f(\frac{j-1}{n}) = \frac{j-1}{n} \quad \text{en} \quad \sup_{I(j)} f = f(\frac{j}{n}) = \frac{j}{n}.$$

Hieruit leiden we af dat

$$\underline{S}(f, V_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{j-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n},$$

en

$$\overline{S}(f, V_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Lemma 7.7 *Zij $f : I \to \mathbb{R}$ een begrensde functie en V een verdeling van I. Dan geldt:*

$$\inf_I f \cdot (b - a) \leq \underline{S}(f, V) \leq \overline{S}(f, V) \leq \sup_I f \cdot (b - a). \tag{7.1}$$

Bewijs: Zij $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ met $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Zij $1 \leq j \leq n$, dan is $\inf_{I(j)} f \leq \sup_{I(j)} f$. Verder is $\inf_I f$ een ondergrens van f op $I(j)$, dus kleiner of gelijk aan de grootste ondergrens: $\inf_I f \leq \inf_{I(j)} f$. Op soortgelijke wijze concluderen we dat $\sup_{I(j)} f \leq \sup_I f$. Uit de gevonden ongelijkheden volgt

$$\inf_I f \cdot (x_j - x_{j-1}) \leq \inf_{I(j)} f \cdot (x_j - x_{j-1}) \leq \sup_{I(j)} f \cdot (x_j - x_{j-1}) \leq \sup_I f \cdot (x_j - x_{j-1}).$$

Door sommatie over j volgt (7.1). $\square$

Voor twee reële getallen p, q met $p \leq q$ spreken we af dat we het interval $[p, q]$ ook noteren met $[q, p]$. Voor een begrensde functie $f : I \to \mathbb{R}$ definiëren we het gebied $G_{a,b}(f)$ van punten tussen de grafiek van f en de x-as als volgt

$$G_{a,b}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ y \in [0, f(x)]\}.$$

Merk op, als $f(x) < 0$ dan $[0, f(x)] = [f(x), 0]$ wegens de zojuist gemaakt afspraak.

We willen een getal $O_{a,b}(f)$ definiëren dat aan het gebied $G_{a,b}(f)$ een *oppervlakte* toekent. Daarbij rekenen we de oppervlakte van het deel van $G_{a,b}(f)$ boven de x-as als positief, en de oppervlakte van het deel onder de x-as als negatief.

De bovensom $\overline{S}(f, V)$ kunnen we interpreteren als de som van de oppervlakten van de rechthoeken $I(j) \times [0, \sup_{I(j)} f]$, positief gerekend als $\sup_{I(j)} f \geq 0$, anders negatief. De ondersom $\underline{S}(f, V)$ kunnen we interpreteren als de som van de (met teken gerekende) oppervlakten van de rechthoeken $I(j) \times [0, \inf_{I(j)} f]$. Op grond van deze observaties verwachten we dat het getal $O_{a,b}(f)$, als het al definieerbaar is, zal voldoen aan

$$\underline{S}(f, V) \leq O_{a,b}(f) \leq \overline{S}(f, V), \tag{7.2}$$

voor elke $V \in \mathcal{V}(I)$. Het doel van de analyse in het vervolg is te bewijzen dat voor redelijke functies f door de condities (7.2) een uniek getal $O_{a,b}(f)$ bepaald wordt. Dit getal noemen we dan de Riemann-integraal van f.

Zij $f : I \to \mathbb{R}$ een begrensde functie. Uit de schatting (7.1) blijkt dat $\underline{S}(f, V) \leq \sup_I f \cdot (b - a)$ voor elke verdeling $V \in \mathcal{V}(I)$. Hieruit blijkt dat $\{\underline{S}(f, V) \mid V \in \mathcal{V}(I)\}$ een niet-lege naar boven begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$ is. Evenzo is $\{\overline{S}(f, V) \mid V \in \mathcal{V}(I)\}$ een niet-lege naar onderen begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$. Dit rechtvaardigt de volgende definitie.

Definitie 7.8 De *Riemann-onder-* en *Riemann-bovenintegraal* van een begrensde functie $f : I \to \mathbb{R}$ worden gedefinieerd door, respectievelijk,

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup\{\underline{S}(f, V) \mid V \in \mathcal{V}(I)\}, \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \inf\{\overline{S}(f, V) \mid V \in \mathcal{V}(I)\}.$$

Opmerking 7.9 Uit de schatting (7.1) volgt dat $\inf_I f \cdot (b-a)$ een ondergrens is van de collectie $\{\underline{S}(f, V) \mid V \in \mathcal{V}(I)\}$ en $\sup_I f \cdot (b - a)$ een bovengrens. Hieruit volgt dat

$$\inf_I f \cdot (b - a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq \sup_I f \cdot (b - a). \tag{7.3}$$

Op soortgelijke wijze zien we dat deze schatting ook geldt met de onderintegraal vervangen door de bovenintegraal.

Voorbeeld 7.10 We beschouwen de functie $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ die constant gelijk aan $c \in \mathbb{R}$ is. Dan is $\sup_I f = \inf_I f = c$. Uit de bovenstaande opmerking blijkt dat de onder- en de bovenintegraal van f over $[a, b]$ gelijk zijn aan $c(b - a)$.

Voorbeeld 7.11 Veronderstel dat $I = [0, 1]$ en $f : x \mapsto x$. Zij V_n de verdeling van I gedefinieerd in Voorbeeld 7.6. Voor elke n geldt dat

$$\frac{n-1}{2n} = \underline{S}(f, V_n) \leq \underline{\int_0^1} x\, dx.$$

Het linkerlid heeft limiet $1/2$ voor $n \to \infty$. Wegens Lemma 3.19 volgt hieruit dat

$$\frac{1}{2} \leq \underline{\int_0^1} x \, dx.$$

Op soortgelijke wijze blijkt dat

$$\overline{\int_0^1} x \, dx \leq \frac{n+1}{2n}.$$

Door limietovergang voor $n \to \infty$ vinden we hieruit tenslotte dat

$$\overline{\int_0^1} x \, dx \leq \frac{1}{2}.$$

De volgende stap in de ontwikkeling van de theorie bestaat uit het vergelijken van onder- en bovenintegraal. De volgende relatie tussen verdelingen speelt hierbij een sleutelrol.

Definitie 7.12 Een verdeling W van I heet *fijner* dan een gegeven verdeling V van I indien $V \subset W$.

Lemma 7.13 *Zij V, W een tweetal verdelingen van I. Als W fijner is dan V, dan geldt, voor elke begrensde functie $f : I \to \mathbb{R}$,*

$$\underline{S}(f, V) \leq \underline{S}(f, W) \leq \overline{S}(f, W) \leq \overline{S}(f, V).$$

Bewijs: In het geval dat $V = W$ volgt de bewering uit Lemma 7.7. Veronderstel daarom dat $V \subsetneq W$.

We veronderstellen eerst dat W precies 1 element meer heeft dan V, dus $|W \setminus V| = 1$. Zij $W = \{x_j\}$ met $a = x_0 < x_1 \cdots < x_n = b$. Dan bestaat er precies één index $0 < i < n$ zo dat $V = W \setminus \{x_i\}$. De verdeling W bepaalt de intervallen $I(1), \ldots, I(n)$. De verdeling V bepaalt de intervallen $I(1), \ldots, I(i-1), J, I(i+2), \ldots, I(n)$, waarbij $J = I(i) \cup I(i+1)$. Er geldt dat $f \leq \sup_J f$ op $I(i)$ en op $I(i+1)$, dus $\sup_{I(i)} f \leq \sup_J f$ en $\sup_{I(i+1)} f \leq \sup_J f$. Hieruit leiden we af dat

$$\sup_{I(i)} f \cdot (x_i - x_{i-1}) + \sup_{I(i+1)} f \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \sup_J f \cdot (x_{i+1} - x_{i-1}),$$

en daarom

$$\overline{S}(f, W) \leq \overline{S}(f, V).$$

Op soortgelijke wijze bewijzen we dat $\underline{S}(f, V) \leq \underline{S}(f, W)$. De gewenste schatting volgt, aangezien $\underline{S}(f, W) \leq \overline{S}(f, W)$.

Zij nu $|W \setminus V| = k > 1$. Dan bestaat er een rij van verdelingen $V = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_k = W$ zo dat $|V_l \setminus V_{l-1}| = 1$ voor alle $1 \leq l \leq k$. Door het bovenstaande toe te passen op elk paar V_{l-1}, V_l vinden we de gewenste schatting. $\square$

Gevolg 7.14 *Zij $f : I \to \mathbb{R}$ een begrensde functie. Voor elk tweetal verdelingen V, W van I geldt:*

$$\underline{S}(f, V) \leq \overline{S}(f, W).$$

Bewijs: De vereniging $U = V \cup W$ is een verdeling van I die fijner is dan zowel V als W. Derhalve geldt: $\underline{S}(f, V) \leq \underline{S}(f, U) \leq \overline{S}(f, U) \leq \overline{S}(f, W)$. □

Stelling 7.15 *Zij $f : I \to \mathbb{R}$ een begrensde functie. Dan geldt*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\, dx. \tag{7.4}$$

Bewijs: Zij W een verdeling van I. Dan is vanwege het bovenstaande gevolg $\underline{S}(f, W)$ een ondergrens van de collectie $\{\overline{S}(f, V) \mid V \in \mathcal{V}(I)\}$. De grootste ondergrens van de collectie is de bovenintegraal. Derhalve

$$\underline{S}(f, W) \leq \overline{\int_a^b} f(x)\, dx.$$

Dit geldt voor iedere verdeling W. Derhalve is $\overline{\int_a^b} f(x)\, dx$ een bovengrens van de collectie $\{\underline{S}(f, V) \mid V \in \mathcal{V}(I)\}$. De kleinste bovengrens van die collectie is $\underline{\int_a^b} f(x)\, dx$. Dit geeft de gewenste schatting. □

Definitie 7.16 Zij $f : I \to \mathbb{R}$ een functie. De functie f heet *Riemann-integreerbaar* over I als

(a) de functie f begrensd is;

(b) $\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx$.

Is f Riemann-integreerbaar, dan noemen we het getal

$$\int_a^b f(x)\, dx := \underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

de Riemann-integraal van f over het interval $I = [a, b]$.

Voorbeeld 7.17 We beschouwen wederom de functie $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ die constant gelijk $c \in \mathbb{R}$ is. Uit Voorbeeld 7.10 blijkt dat f Riemann-integreerbaar is over I. Bovendien geldt

$$\int_a^b c\, dx = c(b - a).$$

Voorbeeld 7.18 Combineren we de schattingen voor de onder- en de bovenintegraal uit Voorbeeld 7.11 met die van Stelling 7.15, dan vinden we dat

$$\frac{1}{2} \leq \underline{\int_0^1} x\, dx \leq \overline{\int_0^1} x\, dx \leq \frac{1}{2}.$$

Hieruit blijkt dat onder- en bovenintegraal dezelfde waarde $1/2$ hebben. De functie $x \mapsto x$ is dus Riemann-integreerbaar over [0, 1] en

$$\int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}. \tag{7.5}$$

Uit het volgende resultaat blijkt dat het gezochte unieke getal $O_{a,b}(f)$ met (7.2) gegeven wordt door de Riemann-integraal.

Lemma 7.19 *Zij $f : I \to \mathbb{R}$ een begrensde functie. Dan zijn de volgende beweringen gelijkwaardig.*

(a) *De functie f is Riemann-integreerbaar over I.*

(b) *Er is een uniek getal $\Sigma \in \mathbb{R}$ met de eigenschap dat*

$$\underline{S}(f, V) \leq \Sigma \leq \overline{S}(f, V), \qquad (\forall\, V \in \mathcal{V}(I)).$$

Als (b) geldt, dan is het unieke getal Σ gelijk aan de Riemann-integraal $\int_a^b f(x)\, dx$.

Bewijs: We schrijven $\underline{\Sigma}$ en $\overline{\Sigma}$ voor de onder- en bovenintegraal van f over I. Is Σ een getal dat aan de eigenschap van (b) voldoet, dan is Σ een bovengrens van de collectie $\underline{S}(f, V)$, dus groter of gelijk aan de kleinste bovengrens, $\underline{\Sigma}$. Met een soortgelijke redenering volgt dat $\Sigma \leq \overline{\Sigma}$. Dus $\underline{\Sigma} \leq \Sigma \leq \overline{\Sigma}$.

Anderzijds geldt voor elke verdeling V van I dat $\underline{S}(f, V) \leq \underline{\Sigma} \leq \overline{\Sigma} \leq \overline{S}(f, V)$. Is $\underline{\Sigma} \leq \Sigma \leq \overline{\Sigma}$ dan voldoet Σ dus aan de eis van (b). We concluderen dat een reëel getal Σ aan de eis van (b) voldoet dan en slechts dan als $\underline{\Sigma} \leq \Sigma \leq \overline{\Sigma}$. De in (b) geëiste uniciteit is derhalve gelijkwaardig met $\underline{\Sigma} = \overline{\Sigma}$, dus met (a). $\square$

7.2 Rekenregels voor Riemann-integratie

In deze paragraaf behandelen we enkele voor de hand liggende rekenregels voor Riemann-integratie. Eerst een lemma ter voorbereiding.

Lemma 7.20 *Zij A een begrensde niet-lege deelverzameling van $\mathbb{R}$ en $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(a) *Is $\lambda \geq 0$ dan is* $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$ *en* $\inf(\lambda A) = \lambda \inf A$.

(b) *Is $\lambda \leq 0$ dan is* $\sup(\lambda A) = \lambda \inf A$ *en* $\inf(\lambda A) = \lambda \sup A$.

Bewijs: Is $\lambda = 0$, dan zijn beide beweringen duidelijk. We veronderstellen daarom dat $\lambda \neq 0$. Veronderstel eerst dat $\lambda > 0$. Dan geldt voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ dat $x \leq y \iff \lambda x \leq \lambda y$. Hieruit volgt voor elke $b \in \mathbb{R}$ dat b een bovengrens voor A is dan en slechts dan als λb dat is voor λA. Dus $\mathrm{bov}(\lambda A) = \lambda \,\mathrm{bov}\, A$. Schrijf $s = \sup A$, dan is $\mathrm{bov}(A) = [s, \infty[$, dus $\mathrm{bov}(\lambda A) = \lambda[s, \infty[= [\lambda s, \infty[$, waaruit blijkt dat $\sup(\lambda A) = \lambda s$. Dit geeft de eerste gelijkheid van (a). De tweede gelijkheid wordt op soortgelijke wijze bewezen.

Veronderstel nu dat $\lambda < 0$. Dan geldt voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ dat $x \leq y \iff \lambda x \geq \lambda y$. Hieruit volgt dat $\mathrm{ond}(\lambda A) = \lambda \,\mathrm{bov}(A)$. Is $s = \sup A$, dan is $\mathrm{bov}(A) = [s, \infty[$, dus $\mathrm{ond}(A) = \lambda[s, \infty[=]-\infty, \lambda s[$, en er volgt $\inf(\lambda A) = \lambda s = \lambda \sup A$. De overblijvende identiteit wordt op soortgelijke wijze bewezen. $\square$

We behandelen nu twee rekenregels voor onder- en bovenintegraal. In het vervolg is steeds $I = [a, b]$, met $a < b$.

Lemma 7.21 *Laat $f : I \to \mathbb{R}$ een begrensde functie zijn en zij $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(a) *Is $\lambda \geq 0$, dan is*

$$\underline{\int_a^b} \lambda f(x)\, dx = \lambda \underline{\int_a^b} f(x)\, dx \quad \text{en} \quad \overline{\int_a^b} \lambda f(x)\, dx = \lambda \overline{\int_a^b} f(x)\, dx.$$

(b) *Is $\lambda \leq 0$, dan is*

$$\underline{\int_a^b} \lambda f(x)\, dx = \lambda \overline{\int_a^b} f(x)\, dx \quad \text{en} \quad \overline{\int_a^b} \lambda f(x)\, dx = \lambda \underline{\int_a^b} f(x)\, dx.$$

Bewijs: Het is duidelijk dat beide beweringen waar zijn voor $\lambda = 0$. Daarom veronderstellen we dat $\lambda \neq 0$.

Veronderstel eerst dat $\lambda > 0$. Zij $V = (x_j)_{j=0}^n$ een verdeling van I en zij $I(j)$ het j-de deelinterval bij V. Dan volgt uit Lemma 7.20 (a) dat $\sup_{I(j)}(\lambda f) = \lambda \sup_{I(j)} f$. Vermenigvuldiging met $x_j - x_{j-1}$ en sommatie over j geeft dat $\lambda \overline{S}(f, V) = \lambda \overline{S}(f, V)$. Nemen we het infimum over alle $V \in \mathcal{V}(I)$, dan volgt door toepassing van Lemma 7.20 (a) dat de tweede identiteit van (a) geldt. De eerste identiteit wordt op soortgelijke wijze bewezen.

Veronderstel nu dat $\lambda < 0$. Zij V een verdeling als boven. Dan volgt door toepassing van Lemma 7.20 (b) dat $\inf_{I(j)} \lambda f = \lambda \sup_{I(j)} f$. Vermenigvuldiging met $x_j - x_{j-1}$ en sommatie over j geeft dat $\underline{S}(\lambda f, V) = \lambda \overline{S}(f, V)$. Hieruit volgt met Lemma 7.20 (b) dat

$$\sup\{\underline{S}(\lambda f, V) \mid V \in \mathcal{V}(I)\} = \lambda \inf\{\overline{S}(f, V) \mid V \in \mathcal{V}(I)\},$$

waaruit de eerste identiteit van (b) volgt. De tweede identiteit wordt op soortgelijke wijze bewezen. $\square$

Lemma 7.22 *Als $f, g : I \to \mathbb{R}$ begrensde functies zijn, dan geldt:*

$$\begin{aligned} \underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \underline{\int_a^b} g(x)\,dx &\leq \underline{\int_a^b} (f(x)+g(x))\,dx \qquad (7.6) \\ &\leq \overline{\int_a^b} (f(x)+g(x))\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \overline{\int_a^b} g(x)\,dx. \end{aligned}$$

Bewijs: Zij $U = (x_j)_{j=0}^n$ een verdeling van I. Zij $1 \leq j \leq n$. Er geldt dat $\inf_{I(j)} f \leq f$ op $I(j)$ en $\inf_{I(j)} g \leq g$ op $I(j)$. Hieruit volgt dat $\inf_{I(j)} f + \inf_{I(j)} g \leq f + g$ op $I(j)$, dus $\inf_{I(j)} f + \inf_{I(j)} g \leq \inf_{I(j)}(f+g)$. Vermenigvuldiging met $(x_j - x_{j-1})$ en sommatie over j levert dat

$$\underline{S}(f,U) + \underline{S}(g,U) \leq \underline{S}(f+g,U) \leq \underline{\int_a^b} (f(x)+g(x))\,dx.$$

Veronderstel nu dat $V, W \in \mathcal{V}(I)$ en zij $U = V \cup W$ de gemeenschappelijke verfijning. Dan volgt door combinatie van Lemma 7.13 en het bovenstaande dat

$$\underline{S}(f,V) + \underline{S}(g,W) \leq \underline{\int_a^b} (f(x)+g(x))\,dx.$$

Dit geldt voor (willekeurige) vaste V en alle W, dus

$$\underline{S}(f,V) + \underline{\int_a^b} g(x)\,dx \leq \underline{\int_a^b} (f(x)+g(x))\,dx.$$

De laatste bewering geldt voor alle V. Het supremum nemend over V leiden we de eerste gewenste ongelijkheid van (7.6) af. De tweede ongelijkheid volgt uit Stelling 7.15. De laatste ongelijkheid volgt met een soortgelijke redenering als hierboven. □

Tenslotte komen we tot de volgende bekende rekenregels voor Riemann-integratie.

Stelling 7.23 *Laat $f, g : I \to \mathbb{R}$ begrensde functies zijn en $\lambda \in \mathbb{R}$.*

(a) *Is f Riemann-integreerbaar over I, dan is λf dat ook en bovendien geldt:*

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

(b) *Zijn f en g Riemann-integreerbaar over I dan is $f+g$ dat ook en bovendien geldt:*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Bewijs: (a) Is f Riemannintegreerbaar over I, dan zijn onder- en bovenintegraal van f over I gelijk aan elkaar. Wegens Lemma 7.21 geldt hetzelfde voor de functie λf. Derhalve is λf Riemann-integreerbaar. De identiteit in (a) is een gevolg van Lemma 7.21 omdat van zowel f als λf de onder- en bovenintegraal samenvallen met de Riemann-integraal over I.

(b) Veronderstel dat f en g Riemann-integreerbaar zijn. Dan zijn de uitdrukkingen in de uiterste leden van de ongelijkheid in Lemma 7.22 gelijk aan elkaar. Het tweede en derde lid van de ongelijkheid zijn derhalve ook gelijk aan elkaar; hieruit volgt dat $f + g$ Riemann-integreerbaar is over I. Omdat voor alle betrokken functies onder- en bovenintegraal samenvallen met de Riemann-integraal volgt de gewenste identiteit uit Lemma 7.22. □

Zij $\mathcal{R}(I)$ de collectie van Riemann-integreerbare functies $I \to \mathbb{R}$. Het bovenstaande resultaat zegt dat $\mathcal{R}(I)$ een lineaire ruimte is ten aanzien van de puntsgewijze optelling en de puntsgewijze scalarvermenigvuldiging van functies. Bovendien is de afbeelding $f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx$, $\mathcal{R}(I) \to \mathbb{R}$ lineair. Men zegt dat de Riemann-integraal een lineaire functionaal op de ruimte van Riemann-integreerbare functies definieert. Het volgende resultaat staat bekend als monotonie van deze functionaal.

Lemma 7.24 *Laat $f, g : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integreerbare functies zijn en veronderstel dat $f(x) \le g(x)$ voor alle $x \in I$. Dan is*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

Bewijs: Veronderderstel eerst dat alleen gegeven is dat f, g begrensd zijn en dat $f \le g$. Is V een verdeling van I, dan geldt voor ieder bijbehorend deelinterval $I(j)$ dat $\sup_{I(j)} f \le \sup_{I(j)} g$ dus ook $\sup_{I(j)} f \cdot (x_j - x_{j-1}) \le \sup_{I(j)} g \cdot (x_j - x_{j-1})$. Hieruit volgt door sommatie over j dat

$$\overline{S}(f, V) \le \overline{S}(g, V),$$

en dus $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{S}(g, V)$. Aangezien de laatste schatting voor elke verdeling V geldt vinden we dat

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} g(x)\,dx.$$

Zijn f en g Riemann-integreerbaar, dan volgt hieruit direct de gewenste schatting. □

We beëindigen deze paragraaf met een rekenregel betreffende beperking tot een deelinterval. Ter voorbereiding een resultaat voor onder- en bovenintegraal.

Lemma 7.25 *Zij $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ een begrensde functie, en zij $c \in]\,a, b\,[$. Dan gelden de volgende identiteiten*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx$$

en

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx.$$

Bewijs: We bewijzen alleen de eerste identiteit. De tweede wordt op soortgelijke wijze aangetoond.

We schrijven $I = I' \cup I''$ met $I' = [a,c]$ en $I'' = [c,b]$. Zij $V' \in \mathcal{V}(I')$ en $V'' \in \mathcal{V}(I'')$, dan is $V = V' \cup V''$ een verdeling voor I. Bovendien geldt

$$\underline{S}(f,V') + \underline{S}(f,V'') = \underline{S}(f,V). \tag{7.7}$$

Uit deze identiteit volgt direct dat

$$\underline{S}(f,V') + \underline{S}(f,V'') \leq \underline{\int}_a^b f(x)\,dx.$$

Hieruit volgt dat voor vaste V'' het getal $\underline{\int}_a^b f(x)\,dx - \underline{S}(f,V'')$ een bovengrens is voor de collectie der ondersommen $\underline{S}(f,V')$, $V' \in \mathcal{V}([a,c])$. De onderintegraal van f over $[a,c]$ is de kleinste bovengrens, dus

$$\underline{\int}_a^c f(x)\,dx + \underline{S}(f,V'') \leq \underline{\int}_a^b f(x)\,dx$$

Deze ongelijkheid geldt voor alle verdelingen $V'' \in \mathcal{V}([c,b])$; met dezelfde redenering als daarnet volgt nu dat

$$\underline{\int}_a^c f(x)\,dx + \underline{\int}_c^b f(x)\,dx \leq \underline{\int}_a^b f(x)\,dx.$$

We zullen nu de omgekeerde ongelijkheid bewijzen. Dit impliceert de eerste gewenste identiteit.

Zij U een willekeurige verdeling van $[a,b]$. Zij V de fijnere verdeling die ontstaat door aan U het punt c toe te voegen. Dan zijn $V' := U \cap I'$ en $V'' := U \cap I''$ verdelingen van I' respectievelijk I'' en er geldt $V = V' \cup V''$, dus (7.7). Combineren we dit met $\underline{S}(f,U) \leq \underline{S}(f,V)$, zie Lemma 7.13, dan volgt dat

$$\underline{S}(f,U) \leq \underline{S}(f,V') + \underline{S}(f,V'') \leq \underline{\int}_a^c f(x)\,dx + \underline{\int}_c^b f(x)\,dx.$$

Het rechterlid is een bovengrens van alle ondersommen $\underline{S}(f,U)$, $U \in \mathcal{V}(I)$; de onderintegraal van f over I is de kleinste bovengrens. Dus

$$\underline{\int}_a^b f(x)\,dx \leq \underline{\int}_a^c f(x)\,dx + \underline{\int}_c^b f(x)\,dx.$$

$\square$

Stelling 7.26 *Zij $a < c < b$ en $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ een functie. Dan is f Riemann-integreerbaar over $[a,b]$ dan en slechts dan als f Riemann-integreerbaar is over zowel $[a,c]$ als $[c,b]$. Bovendien geldt in het geval van integreerbaarheid dat*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{7.8}$$

Bewijs: Schrijf $I = I' \cup I''$ als in het bewijs van Lemma 7.25. Schrijf $\underline{\Sigma}, \underline{\Sigma}'$ en $\underline{\Sigma}''$ voor de onderintegralen van f over I, I' respectievelijk I'', en schrijf $\overline{\Sigma}$, $\overline{\Sigma}'$, respectievelijk $\overline{\Sigma}''$ voor de soortgelijke bovenintegralen. Veronderstel dat f begrensd is op I. Dan geldt wegens Lemma 7.25 dat

$$(\overline{\Sigma}' - \underline{\Sigma}') + (\overline{\Sigma}'' - \underline{\Sigma}'') = (\overline{\Sigma} - \underline{\Sigma}). \tag{7.9}$$

Bovendien is elk der drie verschillen tussen haakjes een niet-negatief reëel getal.

Is f Riemann-integreerbaar over I, dan is f begrensd op I, dus (7.9) geldt; bovendien is het rechterlid van deze identiteit gelijk aan nul. De verschillen tussen haakjes in het linkerlid zijn niet-negatief, dus moeten gelijk zijn aan nul. Hieruit volgt per definitie de Riemann-integreerbaarheid van f over I' en I''.

Is f Riemann-integreerbaar over zowel I' als I'' dan is f begrensd op I' en op I'', dus op I, dus (7.9) geldt, en bovendien is de uitdrukking in het linkerlid van de identiteit gelijk aan nul. Het rechterlid van de identiteit is dus ook gelijk aan nul, en we concluderen dat f Riemann-integreerbaar is over I.

Veronderstel tenslotte dat f integreerbaar is over I. Dan volgt (7.8) direct uit een der identiteiten van Lemma 7.25. □

Is $b > a$ en is f een Riemann-integreerbare functie op $[a, b]$, dan definiëren we

$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx. \tag{7.10}$$

Bovendien definiëren we $\int_a^a f(x)\, dx = 0$. Deze definities garanderen de geldigheid van het volgende resultaat.

Gevolg 7.27 *Zij J een gesloten en begrensd interval en $f : J \to \mathbb{R}$ een Riemann-integreerbare functie. Dan geldt voor alle $a, b, c \in J$ dat*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

Bewijs: Zijn a, b, c niet alle verschillend, dan is minstens een van de drie integralen gelijk aan nul. De gelijkheid van de overgebleven integralen is evident. Veronderstel dus dat a, b, c alle verschillend zijn.

Als $a < c < b$ dan volgt de gelijkheid uit Stelling 7.26. Voor alle andere configuraties van a, b, c volgt de identiteit door toepassing van Stelling 7.26 gecombineerd met (7.10). □

7.3 Eigenschappen van Riemann-integratie

In deze paragraaf is weer $I = [a, b]$ met $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. We brengen in herinnering dat voor een Riemann-integreerbare functie $f : I \to \mathbb{R}$ en voor iedere verdeling $V \in \mathcal{V}(I)$ geldt dat

$$\underline{S}(f, V) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \overline{S}(f, V).$$

De integraal kan met willekeurige precisie ingeklemd worden door onder- en bovensom bij een geschikte verdeling.

Stelling 7.28 *Een begrensde functie $f : I \to \mathbb{R}$ is Riemann-integreerbaar dan en slechts dan als er voor iedere $\varepsilon > 0$ een verdeling V van I bestaat zo dat*

$$\overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) < \varepsilon. \tag{7.11}$$

Bewijs: Laat f een begrensde functie zijn. Veronderstel eerst dat f Riemann-integreerbaar is. Zij $\varepsilon > 0$. Er bestaat een verdeling V_1 van I zo dat

$$\underline{S}(f, V_1) > \underline{\int_a^b} f(x)\, dx - \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Tevens bestaat een verdeling V_2 van I zo dat

$$\overline{S}(f, V_2) < \overline{\int_a^b} f(x)\, dx + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Zij $V = V_1 \cup V_2$. Dan is V een verdeling van I die fijner is dan zowel V_1 als V_2. Derhalve geldt wegens Lemma 7.13 dat

$$\begin{aligned}\overline{S}(f, V) \le \overline{S}(f, V_2) &< \overline{\int_a^b} f(x)\, dx + \frac{1}{2}\varepsilon = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx + \frac{1}{2}\varepsilon \\ &\le \underline{S}(f, V_1) + \varepsilon \le \underline{S}(f, V) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Hieruit volgt (7.11).

We voltooien het bewijs door de omgekeerde implicatie te bewijzen. Zij $\varepsilon > 0$ en veronderstel dat er een verdeling V van I bestaat zo dat (7.11). Dan geldt

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx \le \overline{S}(f, V) < \underline{S}(f, V) + \varepsilon \le \underline{\int_a^b} f(x)\, dx + \varepsilon.$$

Hieruit volgt dat $0 \le \overline{\int_a^b} f(x)\, dx - \underline{\int_a^b} f(x)\, dx < \varepsilon$. Als dit voor alle $\varepsilon > 0$ het geval is, dan volgt $\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \underline{\int_a^b} f(x)\, dx$, dus f is Riemann-integreerbaar. □

Lemma 7.29 *Zij $f, g : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ een tweetal begrensde functies, die in slechts eindig veel punten van I van elkaar verschillen. Dan is f Riemann-integreerbaar dan en slechts dan als g dat is. Bovendien geldt in het geval van integreerbaarheid dat*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx.$$

Bewijs: Door het interval I in eindig veel stukken te verdelen en Stelling 7.26 toe te passen zien we dat het volstaat het bewijs te geven in het geval dat f en g in hooguit één punt van elkaar verschillen, dat bovendien randpunt van I is. Veronderstel dus dat $c \in \{a, b\}$ en dat $f = g$ op $I \setminus \{c\}$. We behandelen het geval dat $c = a$. Het andere geval wordt op soortgelijke wijze behandeld.

In het vervolg zullen we gebruiken dat f en g begrensd zijn. Er bestaat dus een $M > 0$ zo dat $-M \leq f, g \leq M$ op I. Op ieder deelinterval $J \subset I$ geldt dus dat $\inf_J f$ en $\inf_J g$ in $[-M, M]$ gelegen zijn.

Veronderstel dat f Riemann-integreerbaar is. Zij $\varepsilon > 0$. Er bestaat een verdeling V van I zo dat $\overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Deze schatting geldt ook voor iedere verdeling van I die fijner is dan V. Door eventueel een punt aan V toe te voegen kunnen we bereiken dat het eerste deelinterval $J := I(1)$ bij V een lengte heeft die strikt kleiner is dan $\varepsilon/8M$. De sommen $\underline{S}(f, V)$ en $\underline{S}(g, V)$ hebben slechts één term die van elkaar verschillen, namelijk de term die correspondeert met het interval J. Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned}
|\underline{S}(f, V) - \underline{S}(g, V)| &= |\inf_J f \cdot l(J) - \inf_J g \cdot l(J)| \\
&\leq (|\inf_J f| + |\inf_J g|)\, l(J) \\
&\leq 2M\, l(I(1)) < \frac{1}{4}\varepsilon.
\end{aligned} \tag{7.12}$$

Met dezelfde redenering volgt dat

$$|\overline{S}(f, V) - \overline{S}(g, V)| < \frac{1}{4}\varepsilon. \tag{7.13}$$

We concluderen dat

$$\overline{S}(g, V) - \underline{S}(g, V) < \overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) + \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon.$$

De functie g is derhalve Riemann-integreerbaar. De omgekeerde implicatie wordt net zo bewezen. Uit de schattingen (7.12) en (7.13) volgt bovendien dat

$$\underline{S}(f, V) < \underline{S}(g, V) + \frac{1}{4}\varepsilon \leq \int_a^b g(x)\, dx + \frac{1}{4}\varepsilon \leq \overline{S}(g, V) + \frac{1}{4}\varepsilon < \overline{S}(f, V) + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Hieruit volgt dat $\int_a^b g(x)\, dx + \frac{1}{4}\varepsilon$ en $\int_a^b f(x)\, dx$ hoogstens $\frac{1}{2}\varepsilon$ van elkaar verschillen. Aangezien dit voor elke $\varepsilon > 0$ geldt concluderen we de gewenste gelijkheid. $\square$

Gemotiveerd door Stelling 7.28 onderwerpen we de uitdrukking $\overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V)$ aan een nader onderzoek.

Definitie 7.30 Zij $f : I \to \mathbb{R}$ een begrensde functie. Het getal

$$\operatorname*{var}_I f := \sup\{f(x) - f(y) \mid x, y \in I\}$$

heet de *variatie* van f over het interval I.

Uit de bovenstaande definitie volgt direct dat $\operatorname{var}_I f \geq 0$.

Lemma 7.31 *Zij $f : I \to \mathbb{R}$ een begrensde functie. Dan is*

$$\operatorname*{var}_I f = \sup_I f - \inf_I f.$$

Bewijs: Voor vaste $x \in I$ en alle $y \in I$ geldt dat $f(x) - \operatorname{var}_I f \leq f(y)$. Het getal $f(x) - \operatorname{var}_I f$ is dus een ondergrens voor $\{f(y) \mid y \in I\}$. Hieruit volgt dat $f(x) - \operatorname{var}_I f \leq \inf_I f$, dus $f(x) \leq \operatorname{var}_I f + \inf_I f$. Dit geldt voor iedere $x \in I$. Derhalve $\sup_I f \leq \operatorname{var}_I f + \inf_I f$ en we concluderen dat

$$\sup_I f - \inf_I f \leq \operatorname*{var}_I f. \tag{7.14}$$

Zij $\varepsilon > 0$. Dan zijn er $x, y \in I$ zo dat $f(x) - f(y) > \operatorname{var}_I f - \varepsilon$. Hieruit volgt dat $\sup_I f \geq f(x) > f(y) + \operatorname{var}_I f - \varepsilon \geq \inf_I f + \operatorname{var}_I f - \varepsilon$, dus $\sup_I f - \inf_I f \geq \operatorname{var}_I f - \varepsilon$. Dit geldt voor elke $\varepsilon > 0$. Derhalve geldt de omkering van de ongelijkheid (7.14). □

Gevolg 7.32 *Zij $f : I \to \mathbb{R}$ een begrensde functie. Dan geldt voor iedere verdeling $V = (x_j)_{j=0}^n$ van I dat*

$$\overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) = \sum_{j=1}^n \operatorname*{var}_{I(j)} f \cdot (x_j - x_{j-1}).$$

Bewijs: Dit volgt direct uit het bovenstaande lemma gecombineerd met de definities van onder- en bovensom. □

7.4 Riemann-integratie van continue functies

We veronderstellen weer dat $I = [a, b]$ een gesloten en begrensd interval is, met $a < b$. Het volgende begrip dient ertoe de fijnheid van een verdeling $V \in \mathcal{V}(I)$ te meten.

Definitie 7.33 Zij $V = (x_j)_{0 \leq j \leq n}$ een verdeling van het interval I. Onder de *maas* van de verdeling V verstaan we het getal $m(V)$ gedefinieerd door:

$$m(V) := \max_{1 \leq j \leq n} (x_j - x_{j-1})$$

In het bewijs van de volgende stelling speelt Gevolg 4.55, die uniforme continuïteit van een continue functie op een segment garandeert, een fundamentele rol.

Stelling 7.34 *Zij $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ een continue functie. Dan is er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ zo dat voor elke verdeling V van I met $m(V) < \delta$ geldt:*

$$\overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) < \varepsilon.$$

In het bijzonder is f Riemann-integreerbaar over I.

Bewijs: Wegens Gevolg 4.55 is de functie f uniform continu op I. Zij $\varepsilon > 0$. Dan is er een $\delta > 0$ zo dat voor alle $x, y \in I$ geldt:

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon' := \varepsilon/2(b - a). \tag{7.15}$$

Zij nu $V = (x_j)_{j=0}^n$ een verdeling van I met $m(V) < \delta$. Zij $1 \leq j \leq n$. Dan geldt voor alle $x, y \in I(j) = [x_{j-1}, x_j]$ dat $|x - y| < \delta$, en dus:

$$f(x) - f(y) \leq |f(x) - f(y)| < \varepsilon',$$

waaruit volgt,

$$\sup_{I(j)} f - \inf_{I(j)} = \operatorname*{var}_{I(j)} f \leq \varepsilon'.$$

Wegens Gevolg 7.32 volgt uit de laatste schatting dat:

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) &= \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{var}_{I(j)} f \cdot (x_j - x_{j-1}) \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \varepsilon'(x_j - x_{j-1}) = \varepsilon'(b - a) < \varepsilon. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Hiermee is het eerste deel van de stelling bewezen. In het bijzonder zien we dat voor iedere $\varepsilon > 0$ een verdeling V te vinden is zo dat $\overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) < \varepsilon$. De functie f is derhalve Riemann-integreerbaar over I (Stelling 7.28). $\square$

In tal van praktijksituaties is het prettig over het volgende resultaat te kunnen beschikken.

Stelling 7.35 *Zij $f : I \to \mathbb{R}$ een begrensde functie. Zij $E \subset I$ een eindige deelverzameling en veronderstel dat f continu is op $I \setminus E$. Dan is f Riemann-integreerbaar op I.*

Bewijs: Door toepassing van Stelling 7.26 zien we dat we ons kunnen beperken tot de situatie dat E uit één punt bestaat dat bovendien randpunt is van I. We veronderstellen dat $E = \{a\}$. Het geval dat $E = \{b\}$ wordt op soortgelijke wijze behandeld. Zij $M > 0$ zo dat $|f| \leq M$ op I. Dan is $f \leq M$ dus $\sup_I f \leq M$. Evenzo is $f \geq -M$ dus $\inf_I f \geq -M$.

Zij $\varepsilon > 0$. Kies $c \in]\,a, b\,[$ zo dat $c - a < \varepsilon/4M$. De functie f is continu dus Riemann-integreerbaar op $[c, b]$. Er bestaat dus een verdeling V'' van $[c, b]$ zo dat $\overline{S}(f, V'') - \underline{S}(f, V'') < \varepsilon/2$. Zij $V' = \{a, c\}$, dan is V' een verdeling van $[a, c]$ en er geldt

$$\overline{S}(f, V') - \underline{S}(f, V') = (\sup_{[a,c]} f - \inf_{[a,c]} f)\,(c - a) \leq 2M(c - a) < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

De vereniging $V := V' \cup V''$ is een verdeling van I en er geldt

$$\overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) = [\overline{S}(f, V') - \underline{S}(f, V')] + [\overline{S}(f, V'') - \underline{S}(f, V'')] < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Wegens Stelling 7.28 volgt dat f Riemann-integreerbaar is over I. $\square$

Voorbeeld 7.36 De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $f(x) = \sin(1/x)$ voor alle $x \neq 0$ en door $f(0) = w$ ($w \in \mathbb{R}$) is begrensd op $\mathbb{R}$ en continu op $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Hieruit volgt dat f Riemann-integreerbaar is op ieder interval van de vorm $[a, b]$, $a < b$. Bovendien is de waarde van de integraal onafhankelijk van de waarde w van f in 0; zie Lemma 7.29.

Voor de liefhebbers – en voor de volledigheid – laten we nog zien dat de uitspraak van Stelling 7.34 geldt voor elke Riemann-integreerbare functie.

Stelling 7.37 *Laat $f : I \to \mathbb{R}$ een begrensde functie zijn. Dan zijn de volgende twee uitspraken equivalent.*

(a) *f is Riemann-integreerbaar.*

(b) *Voor iedere $\varepsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ zo dat voor elke verdeling V van I met $m(V) < \delta$ geldt:*

$$\overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) < \varepsilon.$$

We bereiden het bewijs voor met een lemma.

Lemma 7.38 *Laat $f : I \to \mathbb{R}$ een begrensde functie zijn. Dan geldt voor ieder tweetal verdelingen V, W van I met $V \subset W$ dat*

$$\overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) \leq [\overline{S}(f, W) - \underline{S}(f, W)] + d \cdot \operatorname*{var}_I f \cdot m(V),$$

met d het aantal elementen van de verschilverzameling $W \setminus V$.

Bewijs: We bewijzen het resultaat voor het speciale geval $d = 1$. Aangezien voor iedere verdeling $W' \supset V$ geldt $m(W') \leq m(V)$ volgt het algemene resultaat door herhaalde toepassing van het speciale geval. Veronderstel dus dat $d = 1$, en schrijf $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ met $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Zij y het unieke element van $W \setminus V$. Dan is er precies één index $1 \leq k \leq n$ zo dat $x_{k-1} < y < x_k$. Er geldt dat

$$\operatorname*{var}_{I_k} f \cdot (x_k - x_{k-1}) \leq \operatorname*{var}_I f \cdot m(V).$$

Hieruit volgt dat

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) &\leq \sum_{j \neq k} \operatorname*{var}_{I_j} f \cdot (x_j - x_{j-1}) + \operatorname*{var}_I f \cdot m(V) \\ &\leq [\overline{S}(W, f) - \underline{S}(W, f)] + \operatorname*{var}_I f \cdot m(V). \end{aligned}$$

Het bewijs is voltooid. $\square$

Bewijs van Stelling 7.37: Uit Stelling 7.28 volgt direct dat (b) $\Rightarrow$ (a). Blijft over de omgekeerde implicatie te bewijzen. Veronderstel dat (a) geldt en laat $\varepsilon > 0$. Dan bestaat er een verdeling U van I zo dat

$$\overline{S}(U, f) - \underline{S}(U, f) < \varepsilon/2.$$

Zij V een willekeurige verdeling van I en zij $W = U \cup V$ de gemeenschappelijke verfijning van U en V. Dan volgt uit het bovenstaande lemma gecombineerd met Lemma 7.13 dat

$$\begin{aligned}\overline{S}(V, f) - \underline{S}(f, V) &\leq \overline{S}(W, f) - \underline{S}(W, f) + d \cdot \operatorname*{var}_I f \cdot m(V)\\ &\leq \overline{S}(U, f) - \underline{S}(U, f) + d \cdot \operatorname*{var}_I f \cdot m(V) < \frac{\varepsilon}{2} + d \cdot \operatorname*{var}_I f \cdot m(V).\end{aligned}$$

Hierin is d het aantal elementen van $W \setminus V$, dus $d \leq |U|$. Zij $\delta = \varepsilon/[2|U| \cdot \operatorname{var}_I f + 1]$. Dan geldt voor elke verdeling V met $m(V) < \delta$ dat

$$\overline{S}(V, f) - \underline{S}(f, V) \leq \frac{\varepsilon}{2} + d \cdot \operatorname*{var}_I f \cdot \delta < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Hiermee is (b) bewezen. Dus (a) $\Rightarrow$ (b). $\square$

7.5 Primitieven en integratie

We veronderstellen weer dat $I = [a, b]$ met $a < b$.

Definitie 7.39 Zij $f : I \to \mathbb{R}$. Onder een *primitieve* van f op I verstaan we een differentieerbare functie $F : I \to \mathbb{R}$ waarvan de afgeleide F' gelijk is aan f.

Lemma 7.40 *Laat $f : I \to \mathbb{R}$ een primitieve F op I hebben. Dan is de collectie van alle primitieven van f op I gelijk aan $\{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}$.*

Bewijs: Uit $(F+c)' = F'+c' = F' = f$ blijkt dat iedere functie van de vorm $F+c$ met $c \in \mathbb{R}$ een primitieve van f is. Is G een tweede primitieve van f dan is de verschilfunctie $H = G - F$ differentieerbaar, met afgeleide $H' = G' - F' = f - f = 0$. Kies $x_0 \in I$. Dan geldt voor alle $x \in I$ dat er een tussen x_0 en x gelegen punt c bestaat zo dat $H(x) - H(x_0) = H'(c)(x - x_0)$ (middelwaardestelling). Hieruit blijkt dat $H(x) = H(x_0)$ voor alle $x \in I$, ofwel H is constant. Dus $G = F + H(x_0)$. $\square$

Stelling 7.41 (Hoofdstelling van de integraalrekening) *Zij $f : I \to \mathbb{R}$ continu en zij $x_0 \in I$. Dan wordt door*

$$F_0(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \qquad (x \in I)$$

een primitieve van f op I gedefinieerd. Is F een willekeurige primitieve van f op I, dan geldt

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Bewijs: We beschouwen het differentiequotiënt van de functie F_0 in een punt $c \in I$. Er geldt dat

$$\frac{F_0(c+h) - F_0(c)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_{x_0}^{c+h} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{c} f(t)\,dt\right] = \frac{1}{h}\int_{c}^{c+h} f(t)\,dt,$$

wegens Gevolg 7.27. Er volgt dat

$$\begin{aligned} \frac{F_0(c+h) - F_0(c)}{h} - f(c) &= \frac{1}{h}\int_{c}^{c+h} f(t)\,dt - \frac{1}{h}\int_{c}^{c+h} f(c)\,dt \\ &= \frac{1}{h}\int_{c}^{c+h} [f(t) - f(c)]\,dt. \end{aligned} \tag{7.17}$$

Zij $\varepsilon > 0$. Uit de continuïteit van f in c volgt het bestaan van een $\delta > 0$ zo dat voor alle $t \in I$ met $|t - c| < \delta$ geldt dat $|f(t) - f(c)| < \varepsilon/2$, ofwel $-\varepsilon/2 < f(t) - f(c) < \varepsilon/2$. Zij nu $h \in \mathbb{R}$ zo dat $c + h \in I$ en zo dat $|h| < \delta$. Omdat in de integraal in (7.17) de integratie plaatsvindt over een interval met punten t die voldoen aan $|t - c| < \delta$, geldt de volgende schatting

$$-\frac{1}{2}\varepsilon|h| < \int_{c}^{c+h} [f(t) - f(c)]\,dt \leq \frac{1}{2}\varepsilon|h|$$

(onderscheid de gevallen $h \geq 0$ en $h \leq 0$ en gebruik Lemma 7.24 en (7.10)). Combineren we de gevonden schatting met (7.17), dan vinden we, voor alle $h \in \mathbb{R}$ met $0 < |h| < \delta$ en $c + h \in I$, dat

$$\left|\frac{F_0(c+h) - F_0(c)}{h} - f(c)\right| \leq \frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon.$$

Wegens de definitie van limiet volgt hieruit dat

$$\lim_{h \to 0} \frac{F_0(c+h) - F_0(c)}{h} = f(c).$$

Dus F_0 is differentieerbaar in c met afgeleide $f(c)$.

Zij F een primitieve van f. Dan is $F = F_0 + C$ met $C \in \mathbb{R}$ een constante. Er volgt dat

$$F(b) - F(a) = F_0(b) - F_0(a) = \int_{x_0}^{b} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{a} f(t)\,dt = \int_{a}^{b} f(t)\,dt,$$

wegens Gevolg 7.27. □

Voorbeeld 7.42 We beschouwen de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door $f(x) = x$. De functie $F : x \mapsto x^2/2$ is een primitieve van f. Derhalve geldt voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ met $a < b$ dat

$$\int_{a}^{b} x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

Nemen we $a = 0$ en $b = 1$ dan vinden we opnieuw (7.5).

We besluiten deze paragraaf met de bewijzen van twee bekende stellingen uit de integratietheorie. De eerste betreft partiële integratie, de tweede substitutie.

Definitie 7.43 Een functie $f : I \to \mathbb{R}$ heet *continu differentieerbaar* indien f differentieerbaar is op I en indien bovendien de afgeleide functie f' continu is op I.

Stelling 7.44 (Partiële integratie) *Laat $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continu differentieerbare functies zijn. Dan geldt*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Bewijs: De functie $f'g + fg'$ is continu, en heeft fg als primitieve. De identiteit volgt door Stelling 7.41 toe te passen. □

Stelling 7.45 (Substitutiestelling) *Laat $\varphi : I \to \mathbb{R}$ een continu differentieerbare functie zijn. Is $f : \varphi(I) \to \mathbb{R}$ continu, dan is*

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt. \tag{7.18}$$

Bewijs: We merken op dat $J := \varphi(I)$ een segment is, wegens Gevolg 4.33. De functie f heeft derhalve een primitieve $F : J \to \mathbb{R}$. Wegens Stelling 7.41 is de integraal in het tweede lid van (7.18) gelijk aan

$$F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)). \tag{7.19}$$

Met de kettingregel voor differentiatie volgt dat $F \circ \varphi$ een primitieve is van de continue functie $x \mapsto F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$. Wegens Stelling 7.41 is de integraal in het eerste lid van (7.18) gelijk aan $F \circ \varphi(b) - F \circ \varphi(a)$ hetgeen ook gelijk is aan (7.19). Beide leden van (7.18) zijn dus gelijk aan (7.19). □

Voorbeeld 7.46 In dit voorbeeld verschaffen we de ontbrekende stappen in het bewijs van Lemma 6.8, zie ook Opmerking 6.9. Zij $g :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$g(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt;$$

aangezien de functie $t \mapsto \frac{1}{t}$ continu is op $]0, \infty[$ is de integraal gedefinieerd wegens Stelling 7.34. Bovendien geldt wegens Stelling 7.41 dat de functie g differentieerbaar is op $]0, \infty[$ met afgeleide

$$g'(x) = \frac{1}{x} \qquad (x > 0).$$

Hieruit blijkt dat $g' > 0$, dus g is een monotoon strikt stijgende functie op $]0, \infty[$.

We tonen aan dat voor iedere $R > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zo dat $g(N) > R$. Hiertoe beschouwen we de verdeling $V = \{1, 2, \dots, N\}$ van het interval $[1, N]$ en merken we op dat

$$g(N) = \int_1^N \frac{1}{t}\,dt \;\geq\; \underline{S}(\frac{1}{t}, V) = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k}.$$

Zij nu $N = 2^p$ met $p \in \mathbb{N}$, dan volgt dat

$$g(N) \geq \sum_{k=1}^{2^p-1} \frac{1}{k} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=2^{j-1}}^{2^j-1} \frac{1}{k} \geq \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=2^{j-1}}^{2^j-1} \frac{1}{2^j} = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{2} = \frac{p}{2}.$$

Kiezen we dus $p > 2R$ en $N = 2^p$, dan is $g(N) > R$. Nu is $g(1) = 0$, dus met de tussenwaardestelling voor continue functies volgt dat $g([1, N]) \supset [0, R]$. We concluderen hieruit dat $g([1, \infty[) = [0, \infty[$.

Met Stelling 7.45 volgt door de substitutie $t = 1/s$ dat

$$g(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \int_1^{\frac{1}{x}} s\frac{d}{ds}(\frac{1}{s})\,ds = -g(1/x).$$

Combineren we dit met het bovenstaande dan zien we dat

$$g(]\,0, 1]) = g(([1, \infty[)^{-1}) = -g([1, \infty[) =]-\infty, 0].$$

7.6 Schatten van integralen

Het volgende resultaat, nuttig voor het schatten van integralen, is analoog aan de driehoeksongelijkheid voor eindige sommen. Wij noemen het daarom de driehoeksongelijkheid voor integralen. Zij $I = [a, b]$ met $a < b$.

Lemma 7.47 *Zij $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integreerbaar. Dan is ook $|f|$ Riemann-integreerbaar en er geldt dat*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Bewijs: Zij V een verdeling van I en J een bijbehorend deelinterval. Dan geldt voor alle $x, y \in J$ dat

$$|f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)| = \max(f(x) - f(y), f(y) - f(x)) \leq \operatorname*{var}_J f.$$

Hieruit volgt dat

$$\operatorname*{var}_J |f| \leq \operatorname*{var}_J f.$$

Met behulp van Gevolg 7.32 concluderen we dat hieruit volgt dat

$$\overline{S}(|f|, V) - \underline{S}(|f|, V) \leq \overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V).$$

Is f Riemann-integreerbaar, dan volgt door toepassen van Stelling 7.28 op achtereenvolgens f en $|f|$ dat $|f|$ Riemann-integreerbaar is.

Uit $f \leq |f|$ en $-f \leq |f|$ volgt door toepassing van Lemma 7.24 dat

$$\pm \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx,$$

hetgeen de driehoeksongelijkheid voor de integraal tot gevolg heeft. □

Gevolg 7.48 *Veronderstel dat $f, g : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integreerbaar zijn. Dan zijn ook de functies* $\min(f, g)$ *en* $\max(f, g)$ *Riemann-integreerbaar.*

Bewijs: We merken op dat

$$\min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g) - \frac{1}{2}|f - g| \quad \text{en} \quad \max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g) + \frac{1}{2}|f - g|.$$

Het resultaat volgt nu door toepassing van Stelling 7.23 en Lemma 7.47. □

7.7 Riemann-sommen

In deze paragraaf is $I = [a, b]$ weer een gesloten en begrensd interval in $\mathbb{R}$.

Definitie 7.49 Onder een rij *strooipunten* bij een verdeling $V = (x_j)_{j=0}^n$ van I verstaan we een rij $\Xi = (\xi_j)_{1 \leq j \leq n}$ met $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$.

Definitie 7.50 Zij $f : I \to \mathbb{R}$ een begrensde functie, V een verdeling van I en Ξ een rij strooipunten bij V. Dan heet

$$S(f, V, \Xi) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$$

de *Riemann-som* van f voor de verdeling V en de rij strooipunten Ξ.

Lemma 7.51 *Laat $f : I \to \mathbb{R}$ een begrensde functie zijn, V een verdeling van I en Ξ een rij strooipunten bij V. Dan geldt:*

$$\underline{S}(f, V) \leq S(f, V, \Xi) \leq \overline{S}(f, V). \tag{7.20}$$

Is de functie f Riemann-integreerbaar dan geldt:

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - S(f, V, \Xi) \right| \leq \overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V). \tag{7.21}$$

Bewijs: Schrijf $V = (x_j)_{j=0}^n$ en $\Xi = (\xi_j)_{1\le j\le n}$. Dan geldt voor alle $1 \le j \le n$ dat

$$\inf_{I_j} f \cdot (x_j - x_{j-1}) \le f(\xi_j)\cdot(x_j - x_{j-1}) \le \sup_{I_j} f \cdot (x_j - x_{j-1}).$$

Schatting (7.20) volgt hieruit door sommatie over j.

Schatting (7.21) volgt uit schatting (7.20) gecombineerd met de karakterisering van de Riemann-integraal als het getal Σ in Lemma 7.19. □

Voor de liefhebber, en ter volledigheid, laten we hieronder zien dat Riemann-integratie ook gekarakteriseerd kan worden met behulp van Riemann-sommen. Het volgende lemma dient als voorbereiding.

Lemma 7.52 *Laat $V = (x_j)_{j=0}^n$ een verdeling zijn van het interval $I = [a,b]$, $a < b$. Zij $\mathfrak{X}(V)$ de verzameling van rijen strooipunten bij V. Dan geldt*

$$\overline{S}(f,V) = \sup\{S(f,V,\Xi) \mid \Xi \in \mathfrak{X}(V)\}, \quad \underline{S}(f,V) = \inf\{S(f,V,\Xi) \mid \Xi \in \mathfrak{X}(V)\}.$$

Bewijs: Uit schatting (7.20) volgt dat $\overline{S}(f,V)$ een bovengrens is van de verzameling $\{S(f,V,\Xi) \mid \Xi \in \mathfrak{X}(V)\}$. Zij $\varepsilon > 0$. Dan bestaat er voor iedere $1 \le j \le n$ een $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ zo dat $f(\xi_j) > \sup_{I_j} f - \varepsilon/(b-a)$. Zij $\Xi = (\xi_j)_{1\le j\le n}$. Dan geldt dat

$$\begin{aligned} S(f,V,\Xi) &= \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \\ &> \overline{S}(f,V) - \varepsilon \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - x_{j-1})}{b-a} \\ &= \overline{S}(f,V) - \frac{\varepsilon(b-a)}{b-a} \\ &= \overline{S}(f,V) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Hieruit volgt de eerste uitspraak, dat $\overline{S}(f,V)$ de kleinste bovengrens is van de verzameling $\{S(f,V,\Xi) \mid \Xi \in \mathfrak{X}(V)\}$. De tweede uitspraak wordt op soortgelijke wijze bewezen. □

Lemma 7.53 *Laat $f : I \to \mathbb{R}$ een begrensde functie zijn en $\Sigma \in \mathbb{R}$. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*

(a) *f is Riemann-integreerbaar met integraal $\int_a^b f(x)\,dx = \Sigma$.*

(b) *Voor iedere $\varepsilon > 0$ bestaat een verdeling V van I zo dat*

$$|\Sigma - S(f,V,\Xi)| < \varepsilon \tag{7.22}$$

voor iedere keuze Ξ van strooipunten bij V.

Bewijs: Veronderstel eerst dat (a) geldt. Dan volgt (b) door combinatie van Stelling 7.34 met Lemma 7.51.

Veronderstel omgekeerd dat (b) geldt. Zij $\varepsilon > 0$. Dan bestaat er een verdeling V van I zo dat voor iedere keuze van strooipunten Ξ bij V de schatting (7.22) geldt met $\varepsilon/4$ in plaats van ε. In het bijzonder geldt de ongelijkheid $\Sigma > S(f, V, \Xi) - \varepsilon/4$ voor alle $\Xi \in \mathfrak{X}(V)$. Tevens bestaat er volgens Lemma 7.52 een keuze van strooipunten Ξ° bij V zo dat $S(f, V, \Xi^\circ) > \overline{S}(f, V) - \varepsilon/4$. Er volgt dat

$$\Sigma > S(f, V, \Xi^\circ) - \frac{\varepsilon}{4} > \overline{S}(f, V) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Op soortgelijke wijze volgt dat $\Sigma < \underline{S}(f, V) + \varepsilon/2$. Hieruit blijkt dat

$$\overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) < (\Sigma + \frac{\varepsilon}{2}) - (\Sigma - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon.$$

Door toepassing van Stelling 7.37 concluderen we dat (a) geldt. □

Er bestaat een variatie op het bovenstaande resultaat waarin de maas van de verdeling een rol speelt.

Stelling 7.54 *Laat $f : I \to \mathbb{R}$ een begrensde functie zijn en $\Sigma \in \mathbb{R}$. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*

(a) *f is Riemann-integreerbaar met integraal $\int_a^b f(x)\, dx = \Sigma$.*

(b) *Voor iedere $\varepsilon > 0$ bestaat een $\delta > 0$ zo dat*

$$|\Sigma - S(f, V, \Xi)| < \varepsilon \tag{7.23}$$

voor iedere verdeling V van I met $m(V) < \delta$ en voor iedere keuze Ξ van strooipunten bij V.

Opmerking 7.55 Het bovenstaande lemma wordt in sommige literatuur wel samengevat door middel van de volgende formule:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{m(V)\to 0} S(f, V, \Xi).$$

Bewijs: Als conditie (b) geldt, dan geldt in het bijzonder conditie (b) van Lemma 7.53, dus ook conditie (a). Veronderstel omgekeerd dat conditie (a) geldt en zij $\varepsilon > 0$. Wegens Stelling 7.37 bestaat er een $\delta > 0$ zo dat voor elke verdeling V van I met $m(V) < \delta$ geldt dat $0 \leq \overline{S}(f, V) - \underline{S}(f, V) < \varepsilon$, dus $[\underline{S}(f, V), \overline{S}(f, V)]$ is een segment met lengte strikt kleiner dan ε. Zij nu Ξ een rij strooipunten bij zo'n verdeling V. Dan liggen zowel Σ als $S(f, V, \Xi)$ in het interval $[\underline{S}(f, V), \overline{S}(f, V)]$. Hieruit volgt de schatting (7.23). Hiermee is de geldigheid van (b) aangetoond. □

Als voorbeeld van benadering van een integraal met behulp van Riemann-sommen noemen we het volgende.

Lemma 7.56 *Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een Riemann-integreerbare functie. Dan is*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{7.24}$$

Bewijs: Zij V_n de verdeling van I bestaande uit de punten $x_k^n = a+k(b-a)/n$, voor $0 \leq k \leq n$. Dan is $\Xi_n = \{x_1^n, \dots, x_n^n\}$ een rij strooipunten bij V_n. De uitdrukking achter de limiet in (7.24) is gelijk aan de bijbehorende Riemann-som $S(f, V_n, \Xi_n)$. De identiteit (7.24) kan dus herschreven worden als

$$\lim_{n\to\infty} S(f, V_n, \Xi_n) = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{7.25}$$

Zij $\varepsilon > 0$. Volgens Stelling 7.54 is er een $\delta > 0$ zo dat voor elke verdeling $V \in \mathcal{V}(I)$ met $m(V) < \delta$ en iedere keuze van strooipunten Ξ bij V de schatting (7.23) geldt.

Kies $N \in \mathbb{N}$ zo dat $(b-a)/N < \delta$. Dan geldt voor alle $n \geq N$ dat $m(V_n) < \delta$, dus

$$\left| S(f, V_n, \Xi_n) - \int_a^b f(x)\, dx \right| < \varepsilon,$$

voor alle $n \geq N$. Hiermee is de geldigheid van (7.25), dus van (7.24) aangetoond. □

Voorbeeld 7.57 We beschouwen de functie $f : x \mapsto x^k$ op het interval $[0, 1]$, met $k \geq 1$ geheel. De functie $F : x \mapsto x^{k+1}/(k+1)$ is een primitieve van f. Uit het bovenstaande lemma volgt derhalve dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \int_0^1 x^k\, dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{k+1}.$$

Hoofdstuk 8

Appendix: Definitie van de reële getallen

8.1 Rationale getallen

In deze paragraaf geven we aan hoe we de *rationale getallen* kunnen definiëren in termen van de gehele getallen en de verzamelingenleer. Het gaat er hier om te laten zien dat de rationale getallen met daarop de bewerkingen optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen precies gedefinieerd kunnen worden in termen van de gehele getallen. Uit de definitie kunnen de eigenschappen van de rationale getallen afgeleid worden. Het zijn de eigenschappen die we later nodig zullen hebben; de precieze definitie van de verzameling der rationale getallen zullen we buiten het huidige hoofdstuk niet meer gebruiken.

Rationale getallen zijn breuken van de vorm p/q, met $p \in \mathbb{Z}$ en $q \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Daarbij weten we dat twee breuken p/q en r/s gelijk zijn dan en slechts dan als $ps = qr$. Het idee is nu rationale getallen te *definiëren* als uitdrukkingen van de vorm (p, q) (hierbij houden we p/q in gedachten) waarbij we twee uitdrukkingen (p, q) en (r, s) met elkaar identificeren precies dan als $ps = qr$. De formele manier om dit te doen gaat met behulp van een equivalentierelatie als volgt.

We beschouwen de verzameling $\mathcal{Q} := \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ met daarop de relatie $\sim$ gedefinieerd door

$$(p, q) \sim (r, s) \iff ps = qr.$$

Men gaat gemakkelijk na dat $\sim$ een equivalentierelatie op $\mathcal{Q}$ definieert. We noteren de equivalentieklasse van een paar (p, q) met $[(p, q)]$. De collectie van equivalentieklassen wordt zoals gebruikelijk genoteerd met $\mathcal{Q}/\sim$. We *definiëren* $\mathbb{Q}$ als verzameling door $\mathbb{Q} := \mathcal{Q}/\sim$.

We zijn er aan gewend dat breuken opgeteld kunnen worden door hun noemers gelijknamig te maken. De definitie van optelling zullen we op dit inzicht baseren. Het volgende lemma dient ter voorbereiding.

Lemma 8.1 *Voor alle* $(p, q), (r, s), (p', q'), (r', s') \in \mathcal{Q}$ *met* $(p, q) \sim (p', q')$ *en* $(r, s) \sim (r', s')$ *geldt:*

$$(ps + qr, qs) \sim (p's' + q'r', q's'). \tag{8.1}$$

Bewijs: Uit de gegeven equivalenties volgt dat $pq' = qp'$ en $rs' = r's$. Derhalve geldt:

$$(ps + qr)q's' - (p's' + q'r')qs = (pq' - p'q)ss' + qq'(rs' - r's) = 0,$$

waaruit (8.1) volgt. □

Voor $x, y \in \mathbb{Q}$ definiëren we de som $x + y := [(ps + qr, qs)]$ met $(p, q), (r, s) \in \mathcal{Q}$ zodanig dat $x = [(p, q)]$en $y = [(r, s)]$. Deze definitie is correct omdat wegens het bovenstaande lemma de klasse $[(ps + qr, qs)]$ niet afhangt van de gekozen representanten voor x en y. De bovenstaande definitie kunnen we ook samenvatten door:

$$[(p, q)] + [(r, s)] = [(ps + qr, qs)].$$

Uiteraard willen we $\mathbb{Z}$ zien als deel van $\mathbb{Q}$. Hiertoe merken we op dat de afbeelding $\iota : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}, n \mapsto [(n, 1)]$ injectief is. In het vervolg zullen we $n \in \mathbb{Z}$ identificeren met het beeld $[(n, 1)] \in \mathbb{Q}$ onder ι. We merken op dat $\iota(n+m) = \iota(n)+\iota(m)$, volgens de zojuist gedefinieerde optelling. De optelling op $\mathbb{Q}$ kan hierdoor gezien worden als voortzetting van de optelling op $\mathbb{Z}$.

Voor een element $x = [(p, q)]$ definiëren we zijn *tegengestelde* $-x$ door

$$-x = -[(p, q)] := [(-p, q)].$$

We gaan gemakkelijk na dat de klasse van $(-p, q)$ onafhankelijk is van de keuze van de representant (p, q) van x, zodat de definitie correct is. We merken op dat $x + (-x) = [(0, 1)] = 0$ en spreken af $x - y$ als notatie voor $x + (-y)$ te zullen gebruiken.

We definiëren $\mathbb{Q}_{>0}$ als verzameling van $x \in \mathbb{Q}$ waarvoor een $(p, q) \in \mathcal{Q}$ bestaat met $p > 0$. Men gaat gemakkelijk na dat voor iedere andere representant (p', q') van x dan ook geldt $p' > 0$. Verder definiëren we $\mathbb{Q}_{<0} := -\mathbb{Q}_{>0}$. Men gaat nu gemakkelijk na dat $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_{<0} \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_{>0}$, waarbij de vereniging disjunct is. We definiëren de relatie $\leq$ op $\mathbb{Q}$ door

$$x \leq y \iff y - x \in \mathbb{Q}_{>0} \cup \{0\}.$$

Men gaat gemakkelijk na dat $\leq$ een ordening op $\mathbb{Q}$ definieert die *totaal* is; dat laatste wil zeggen dat voor alle $x, y \in \mathbb{Q}$ geldt $x \leq y$ of $y \leq x$. Bovendien komt de ordening op $\mathbb{Z}$ overeen met de daar gebruikelijke.

Het volgende lemma dient ter voorbereiding op de definitie van vermenigvuldiging. Houdt daarbij in gedachten dat breuken vermenigvuldigd kunnen worden door tellers en noemers met elkaar te vermenigvuldigen.

Lemma 8.2 *Voor alle $(p, q), (r, s), (p', q'), (r', s') \in \mathcal{Q}$ met $(p, q) \sim (p', q')$ en $(r, s) \sim (r', s')$ geldt:*

$$(pr, qs) \sim (p'r', q's'). \tag{8.2}$$

Bewijs: Uit de gegeven equivalenties volgt dat $pq' = qp'$ en $rs' = r's$. Derhalve geldt:

$$prq's' - p'r'qs = pq'rs' - pq'r's = 0,$$

waaruit (8.2). De vermenigvuldiging op $\mathbb{Q}$ kunnen we nu definiëren door

$$[(p,q)][(r,s)] := [(pr,qs)].$$

Voor $p, r \in \mathbb{Z}$ hebben we $[(p,1)][(r,1)] = [(pr,1)]$ waaraan we zien dat de vermenigvuldiging op $\mathbb{Q}$ een uitbreiding is van de vermenigvuldiging op $\mathbb{Z}$. Uit de definitie van de equivalentierelatie volgt meteen, voor $p, q, p', q' \in \mathbb{N}^*$:

$$(p,q) \sim (p',q') \Rightarrow (q,p) \sim (q',p').$$

Voor $x = [(p,q)] \in \mathbb{Q}_{>0}$ kunnen we de *inverse* daarom definiëren door de formule

$$x^{-1} = [(p,q)]^{-1} := [(q,p)].$$

Voor $x \in \mathbb{Q}_{<0}$ definiëren we de inverse door $x^{-1} = -(-x)^{-1}$. Hiermee is de inverse op $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ gedefinieerd. We merken op dat voor alle $x \neq 0$ geldt:

$$xx^{-1} = 1.$$

We spreken af dat we voor $x, y \in \mathbb{Q}$ met $y \neq 0$ de notatie $\frac{x}{y} := xy^{-1}$ zullen gebruiken. Wegens de hierboven genoemde identificatie van $\mathbb{Z}$ met een deel van $\mathbb{Q}$ geldt nu, voor $p, q \in \mathbb{Z}$ en $q > 0$,

$$\frac{p}{q} = [(p,1)][(q,1)]^{-1} = [(p,1)][(1,q)] = [(p,q)].$$

Definitie 8.3 Onder een *lichaam* verstaan we een drietal (L, s, v) met L een verzameling, $s : L \times L \to L,\ (x,y) \mapsto x + y$ een afbeelding (sommatie of optelling geheten) en $v : L \times L \to L,\ (x,y) \mapsto xy$ een afbeelding (vermenigvuldiging geheten), die voldoen aan de volgende eigenschappen.

(L1) Voor iedere $x, y, z \in L$ geldt $(x + y) + x = x + (y + z)$ (associativeit).

(L2) Voor iedere $x, y \in L$ geldt: $x + y = y + x$ (commutativiteit).

(L3) Er is precies één element $0 \in L$ met de eigenschap dat voor alle $x \in L$ geldt $x + 0 = x$ (nulelement).

(L4) Voor elke $x \in L$ bestaat precies één $y \in L$ met $x + y = 0$; dit element wordt genoteerd met $-x$ (tegengestelde).

(L5) Voor alle $x, y, z \in L$ geldt $(xy)z = x(yz)$ (associativiteit).

(L6) Voor alle $x, y \in L$ geldt $xy = yx$ (commutativiteit).

(L7) Er is precies één element $1 \in L$ met $1x = x$ voor alle $x \in L$ (eenheid).

(L8) Voor iedere $x \in L \setminus \{0\}$ bestaat precies één element $y \in L$ met $xy = 1$; dit element wordt genoteerd met x^{-1} (inverse).

(L9) Voor alle $x, y, z \in L$ geldt $x(y + z) = xy + xz$ (distributiviteit).

Uit de rekenregels voor de gehele getallen en de hier boven gegeven definities kan men afleiden dat $\mathbb{Q}$ met de gedefinieerde optelling en vermenigvuldiging een lichaam is. We laten de details achterwege. Eveneens kan men afleiden dat $\mathbb{Q}$ een geordend lichaam is.

Definitie 8.4 Onder een *geordend lichaam* verstaan we een lichaam L voorzien van een ordening zo dat

(O1) Voor alle $x, y \in L$ geldt $x \leq y$ of $y \leq x$ (de ordening is totaal);

(O2) Voor alle $x, y, z \in L$ geldt $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$.

(O3) Voor alle $x, y, z \in L$ met $x \leq y$ en $z \geq 0$ geldt $xz \leq yz$.

Een voor de hand liggende vraag is nu: kan men ook $\mathbb{Z}$ op een zodanige manier definiëren in termen van de verzamelingenleer, dat men de rekenregels voor optelling en vermenigvuldiging af kan leiden. Dit is inderdaad mogelijk op basis van een eenvoudige karakterisering van de natuurlijke getallen door middel van het hieronder geformuleerde, verrassend korte *axiomasysteem van Peano*.

Definitie 8.5 Een *systeem van natuurlijke getallen* is een tripel $(N, 0, \phi)$, met N een verzameling, 0 een element van $\mathbb{N}$ en ϕ een afbeelding $N \to N$ (de 'opvolgersafbeelding'), zo dat het volgende geldt.

(P1) Voor alle $n \in N$ geldt $\phi(n) \neq 0$.

(P2) Voor alle $n, m \in \mathbb{N}$ geldt $\phi(n) = \phi(m) \Rightarrow n = m$;

(P3) Laat S een deelverzameling van N zijn met $0 \in N$, en zo dat voor elke $n \in N$ geldt $n \in W \Rightarrow \phi(n) \in W$. Dan is $W = N$.

Met behulp van de verzamelingenleer kan men laten zien dat er in wezen slechts één systeem van natuurlijke getallen bestaat. Met andere woorden, de natuurlijke getallen zijn met behulp van een drietal eenvoudige axioma's te karakteriseren.

Stelling 8.6 *Laat $(N, 0, \phi)$ en $(\widetilde{N}, \widetilde{0}, \widetilde{\phi})$ een tweetal systemen van natuurlijke getallen zijn. Dan is er een unieke afbeelding $f : N \to \widetilde{N}$ met $f(0) = \widetilde{0}$ en $\widetilde{\phi}(f(n)) = f(\phi(n))$ voor alle $n \in N$.*

Voor het bewijs, dat verrassend interessant is, verwijzen we naar elders. We nemen het bestaan van een systeem van natuurlijke getallen als basisgegeven aan. Dit is niet vanzelfsprekend, omdat de verzameling N noodzakelijkerwijs oneindig is. Immers uit (P1) en (P2) volgt dat de afbeelding $\phi : N \to N$ injectief maar niet surjectief is – binnen de verzamelingenleer is dit precies de manier om oneindige verzamelingen te karakteriseren.

In het vervolg veronderstellen we een vast systeem van natuurlijke getallen gegeven, waarbij we de onderliggende verzameling noteren met $\mathbb{N}$. Via de opvolgersafbeelding kunnen we aan de elementen achtereenvolgens de bekende tientallige notatie toekennen.

Uit het axiomasysteem van Peano kan men gemakkelijk de geldigheid van het principe van volledige inductie afleiden. We doen dit ter illustratie.

Stelling 8.7 *Laat voor iedere $n \in \mathbb{N}$ een uitspraak $P(n)$ gegeven zijn. Veronderstel dat $P(0)$ geldt en dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $P(n) \Rightarrow P(\phi(n))$. Dan geldt de uitspraak $\forall n \in \mathbb{N}: \quad P(n)$.*

Bewijs: We definiëren $W := \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$. Dan geldt dat $0 \in W$. Tevens geldt: $n \in W \Rightarrow P(n) \Rightarrow P(\phi(n)) \Rightarrow \phi(n) \in W$. Wegens (P3) geldt $W = \mathbb{N}$. Dus $\forall n \in \mathbb{N}: \quad P(n)$. □

Uit (P1)–(P3) kan men tevens met wat meer moeite het principe afleiden dat *definitie door inductie* mogelijk is. Voor details verwijzen we weer naar elders. De optelling in $\mathbb{N}$ definiëren we door inductie als volgt:

$$m + 0 := m \qquad \text{en} \qquad m + \phi(n) := \phi(m + n).$$

We noteren $1 := \phi(0)$. Dan volgt uit het bovenstaande in het bijzonder dat $\phi(n) = n + 1$.

De vermenigvuldiging definiëren we inductief door

$$m \cdot 0 := 0 \quad \text{en} \quad m(n + 1) := mn + m.$$

De bekende rekenregels voor de optelling en vermenigvuldiging zijn hier met behulp van volledige inductie uit af te leiden. Voor details verwijzen we naar elders.

We kunnen $\mathbb{Z}$ als volgt definiëren. Het achterliggende idee is dat ieder element van $\mathbb{Z}$ te schrijven is als $m - n$ met $m, n \in \mathbb{N}$. Er geldt dat $m - n$ en $p - q$ hetzelfde gehele getal leveren dan en slechts dan als $m + q = p + n$. Formeel kunnen we daarom de gehele getallen weer definiëren door middel van een equivalentierelatie. We voorzien $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ van de relatie $\sim$ gedefinieerd door

$$(m, n) \sim (p, q) \iff m + q = n + p.$$

Men gaat zonder al te veel moeite na dat deze relatie een equivalentierelatie is. De klasse van een element (m, n) wordt genoteerd met $[(m, n)]$. De collectie equivalentieklassen noteren we met $\mathbb{Z} := \mathbb{N}^2/\sim$.

Een element $n \in \mathbb{N}$ identificeren we met het element $[(n, 0)]$ van $\mathbb{Z}$. We breiden de sommatie op $\mathbb{N}$ uit tot $\mathbb{Z}$ door de regel

$$[(m, n)] + [(p, q)] = [(m + p, n + q)].$$

Deze definitie is correct, aangezien de klasse in het rechterlid onafhankelijk is van de keuze van de representanten in het linkerlid. We definiëren het tegengestelde van een element door

$$-[(m, n)] = [(n, m)].$$

Verder spreken we af voor $x, y \in \mathbb{Z}$ de notatie $x - y := x + (-y)$ te zullen gebruiken. Met de genoemde identificatie van $\mathbb{N}$ als een deel van $\mathbb{Z}$ geldt nu, voor $m, n \in \mathbb{N}$,

$$m - n = [(m, 0)] + (-[(n, 0)]) = [(m, 0)] + [(0, n)] = [(m, n)].$$

De vermenigvuldiging op $\mathbb{Z}$ wordt gedefinieerd door

$$[(m, n)][(p, q)] = [(mp + nq, mq + np)].$$

We nodigen de lezer uit na te gaan dat ook deze definitie correct is.

Alle rekenregels voor $\mathbb{Z}$ kunnen uit de bovenstaande definities bewezen worden. We laten de details achterwege.

8.2 Reële getallen

In deze paragraaf zullen we laten zien hoe we de verzameling $\mathbb{R}$ van reële getallen in termen van de verzameling $\mathbb{Q}$ der rationale getallen kunnen definiëren, zo dat we de volledigheidsstelling kunnen bewijzen.

Het leidende idee bij de definitie is dat een reëel getal x volledig bepaald is door de volgende deelverzameling S van $\mathbb{Q}$,

$$S = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\}.$$

De volgende definitie dient er toe een verzameling S als hierboven te definiëren, zonder daarbij gebruik te maken van het reële getal x.

We noteren de machtsverzameling van $\mathbb{Q}$, dwz. de collectie van alle deelverzamelingen van $\mathbb{Q}$, met $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Is $r \in \mathbb{Q}$, dan zullen we de notaties

$$\mathbb{Q}_{<r} = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < r\} \quad \text{en} \quad \mathbb{Q}_{\leq r} = \{a \in \mathbb{Q} \mid a \leq r\}$$

gebruiken. Deze verzamelingen zijn deelverzamelingen van $\mathbb{Q}$ dus elementen van $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

Definitie 8.8 Onder een *Dedekind snede* of kortweg snede, verstaan we een element S van $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ met de volgende eigenschappen,

(a) S is niet leeg en naar boven begrensd, dwz. er is een $b \in \mathbb{Q}$ met $S \subset \mathbb{Q}_{<b}$;

(b) voor alle $a \in S$ geldt: $\mathbb{Q}_{\leq a} \subset S$;

(c) S heeft geen grootste element, dwz. er is geen $m \in S$ zo dat $S \subset \mathbb{Q}_{\leq m}$.

Opmerking 8.9 Bij een snede S definiëren we de verzameling S' van rationale getallen r waarvoor een $a \in \mathbb{Q} \setminus S$ bestaat met $a < r$. Het is duidelijk dat S en S' disjunct zijn. Verderop zullen we nagaan dat het complement van $S \cup S'$ in $\mathbb{Q}$ nul of één element bevat. Het laatste treedt precies dan op als $S = \mathbb{Q}_{<a}$ voor een $a \in \mathbb{Q}$, dus als de snede correspondeert met het rationale getal a. In de oorspronkelijke terminologie van R. Dedekind, van wie deze ideeën afkomstig zijn, wordt het paar (S, S') een snede genoemd. Onze terminologie is verantwoord aangezien S' volledig bepaald is door S.

De collectie van Dedekind sneden noteren we voorlopig met $\mathcal{D}$. Nadat we hebben laten zien dat $\mathcal{D}$ voldoet aan alle eisen die we de reële getallen opleggen zullen we deze notatie vervangen door de gebruikelijke notatie $\mathbb{R}$.

We laten eerst zien dat we $\mathbb{Q}$ kunnen opvatten als een deel van $\mathcal{D}$. Voor elke $r \in \mathbb{Q}$ zien we gemakkelijk in dat de verzameling $\mathbb{Q}_{<r}$ een snede is, dus tot $\mathcal{D}$ behoort. Derhalve wordt door

$$i : r \mapsto \mathbb{Q}_{<r},$$

een afbeelding $\mathbb{Q} \to \mathcal{D}$ gedefinieerd.

Lemma 8.10 *De afbeelding $i : \mathbb{Q} \to \mathcal{D}$ is injectief.*

Bewijs: Laat a, b twee verschillende elementen van $\mathbb{Q}$ zijn. Zonder verlies van algemeenheid mogen we veronderstellen dat $a < b$. Er bestaat een $r \in \mathbb{Q}$ met $a < r < b$. Hiervoor geldt $r \in i(b)$ maar $r \notin i(a)$. Dus $i(a)$ en $i(b)$ zijn verschillend. □

Door een element $r \in \mathbb{Q}$ te identificeren met zijn beeld $i(r)$ in $\mathcal{D}$ kunnen we $\mathbb{Q}$ opvatten als deel van $\mathcal{D}$. We zeggen ook wel dat we $\mathbb{Q}$ opvatten als deel van $\mathcal{D}$ via de afbeelding i.

Op $\mathcal{D}$ hebben we de natuurlijke partiële ordening $\subset$. Deze ordening kunnen we zien als voortzetting van de partiële ordening $\leq$ op $\mathbb{Q}$. Preziezer,

Lemma 8.11 *Voor alle $a, b \in \mathbb{Q}$ geldt $a \leq b \iff i(a) \subset i(b)$.*

Bewijs: Laat $a, b \in \mathbb{Q}$ zijn. Veronderstel $a \leq b$. Dan is het evident dat $i(a) \subset i(b)$. Veronderstel dat niet $a \leq b$. Dan geldt $b < a$, dus $i(b) \subset i(a)$. Wegens de reeds bewezen injectiviteit van i geldt dat $i(a) \neq i(b)$. Dus $i(b) \subsetneq i(a)$ waaruit volgt dat niet $i(a) \subset i(b)$. □

Op grond van het bovenstaande lemma kan geen verwarring ontstaan als we in het vervolg de ordening $\subset$ op $\mathcal{D}$ met $\leq$ noteren.

Lemma 8.12 *De ordening $\leq$ op $\mathcal{D}$ is totaal; dwz. voor ieder tweetal $S, T \in \mathcal{D}$ geldt $S \leq T$ of $T \leq S$.*

Bewijs: Laat $S, T \in \mathcal{D}$ zijn. Zonder verlies van algemeenheid mogen we veronderstellen dat $S \neq T$ en na eventuele verwisseling van S en T dat $T \setminus S \neq \emptyset$. Kies een element $t \in T$ met $t \notin S$. Is $s \in S$ dan zou uit $t \leq s$ volgen dat $t \in S$ wegens eigenschap (b) in Definitie 8.8. Er moet dus gelden $S \subset \mathbb{Q}_{<t}$. Met eigenschap (b) concluderen we ook dat $\mathbb{Q}_{<t} \subset T$, dus $S \subset T$. □

Definitie 8.13 Laat $(\mathcal{E}, \leq)$ een geordende verzameling zijn. Een rij $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{E}$ heet (monotoon) stijgend als $x_n \leq x_{n+1}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. De rij heet naar boven begrensd als er een $b \in \mathcal{E}$ bestaat met $x_n \leq b$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 8.14 *Zij $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een stijgende naar boven begrensde rij in $\mathcal{D}$. Dan behoort $S := \cup_n S_n$ tot $\mathcal{D}$.*

Bewijs: We merken allereerst op dat $S_n \subset \mathbb{Q}$ voor alle n, dus $S \subset \mathbb{Q}$. Geen der verzamelingen S_n is leeg, dus S is niet leeg. Zij $T \in \mathcal{D}$ een bovengrens voor de rij S_n. Dan is er een $b \in \mathbb{Q}$ zo dat $T \subset \mathbb{Q}_{<b}$. Voor elke n geldt $S_n \subset T \subset \mathbb{Q}_{<b}$, dus ook $S \subset \mathbb{Q}_{<b}$. De verzameling S voldoet dus aan eigenschap (a) van Definitie 8.8.

Nu (b). Veronderstel dat $a \in S$. Dan is er een $n \in \mathbb{N}$ zo dat $a \in S_n$. Aangezien S_n een snede is geldt $\mathbb{Q}_{\leq a} \subset S_n$ dus $Q_{\leq a} \subset S$. Eigenschap (b) geldt dus.

Tenslotte verifiëren we (c). Veronderstel dat $r \in S$. Dan is er een $n \in \mathbb{N}$ zo dat $r \in S_n$. De laatste verzameling is een snede, dus heeft geen grootste element. Derhalve is er een $x \in S_n$ zo dat $r < x$. Er volgt dat $x \in S$ en $x > r$. De verzameling S heeft derhalve geen grootste element. □

Definitie 8.15 Laat $(\mathcal{E}, \leq)$ een totaal geordende verzameling zijn. Voor elementen $a, b \in \mathcal{E}$ met $a \leq b$ noteren we

$$[a, b] := \{x \in \mathcal{E} \mid a \leq x \leq b\}.$$

De verzamelingen van dit type noemen we de *segmenten* van $\mathcal{E}$. Onder een *dalende rij segmenten* in $\mathcal{E}$ verstaan we een rij $I_n = [a_n, b_n]$ van segmenten in $\mathcal{E}$ die voldoet aan $I_{n+1} \subset I_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Anders gezegd, $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

De volledigheid van de reële getallen zal later equivalent blijken te zijn met de volgende stelling voor Dedekind sneden.

Stelling 8.16 *Iedere dalende rij segmenten in $\mathcal{D}$ heeft een niet lege doorsnede.*

Bewijs: Zij $I_n = [S_n, T_n]$ een dalende rij segmenten in $\mathcal{D}$. Dan geldt $S_n \leq S_{n+1} \leq T_{n+1} \leq T_1$. De rij S_n is derhalve stijgend en naar boven begrensd. Met Lemma 8.14 volgt dat $S = \cup_n S_n$ een element van $\mathcal{D}$ is. We zullen laten zien dat $S \in \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Zij n willekeurig. Dan geldt dat $S_n \subset S$ dus $S_n \leq S$. Voor iedere $k \in \mathbb{N}$ geldt $S_k \leq S_{\max(k,n)} \leq T_{\max(k,n)} \leq T_n$, dus $S_k \subset T_n$. Hieruit volgt dat $S \subset T_n$, dus $S \leq T_n$. We concluderen dat $S \in I_n$. □

Definitie 8.17 Onder een *totaal geordende uitbreiding* van $\mathbb{Q}$ verstaan we een tripel $(j, \mathcal{E}, \leq)$ met $(\mathcal{E}, \leq)$ een totaal geordende verzameling, en met $j : \mathbb{Q} \to \mathcal{E}$ een injectieve afbeelding die de ordening respecteert, dwz. voor alle $a, b \in \mathbb{Q}$ geldt $a \leq b \iff j(a) \leq j(b)$.

De uitbreiding heet *volledig* indien iedere dalende rij segmenten in $\mathcal{E}$ een niet-lege doorsnede heeft.

We zeggen dat $\mathbb{Q}$ *tweezijdig onbegrensd* is in $\mathcal{E}$ indien $j(\mathbb{Q})$ noch naar onderen noch naar boven begrensd is in $\mathcal{E}$. We zeggen dat $\mathbb{Q}$ *dicht ligt* in $\mathcal{E}$ indien voor elk tweetal elementen $x, y \in \mathcal{E}$ met $x < y$ een $a \in \mathbb{Q}$ bestaat met $x < j(a) < y$.

Stelling 8.18 *Het tripel $(i, \mathcal{D}, \leq)$ is een totaal geordende uitbreiding van $\mathbb{Q}$ die volledig is, waarin $\mathbb{Q}$ tweezijdig onbegrensd is en waarin $\mathbb{Q}$ dicht ligt.*

Bewijs: Dat $(i, \mathcal{D}, \leq)$ een totaal geordende uitbreiding van $\mathbb{Q}$ is volgt uit Lemma's 8.11 en 8.12. Dat de uitbreiding volledig is volgt uit Stelling 8.16. Veronderstel dat $S \in \mathcal{D}$. Dan is er een $b \in \mathbb{Q}$ met $S \subset \mathbb{Q}_{<b}$. Hieruit volgt dat $S \subsetneq i(b+1)$, dus S is geen bovengrens van $i(\mathbb{Q})$. De verzameling S bevat een element $r \in \mathbb{Q}$. Er bestaat een $a \in \mathbb{Q}$ met $a < r$. Nu is $\mathbb{Q}_{<a} \subsetneq S$, dus $i(a) < S$ en we zien dat S ook geen ondergrens van $i(\mathbb{Q})$ is. De verzameling $i(\mathbb{Q})$ heeft dus geen onder- of bovengrens in $\mathcal{D}$.

Veronderstel tenslotte dat $S, T \in \mathcal{D}$ en $S < T$. Dan is $S \subsetneq T$, dus er bestaat een $r \in \mathbb{Q}$ met $r \in T$ maar $r \notin S$. Uit het feit dat T geen bovengrens heeft volgt het bestaan van $t_1, t_2 \in T$ met $r < t_1 < t_2$. Nu volgt $S \subset \mathbb{Q}_{<r} \subsetneq \mathbb{Q}_{<t_1} \subsetneq \mathbb{Q}_{<t_2} \subset T$. We concluderen dat $S < i(t_1) < T$. Dus $\mathbb{Q}$ ligt dicht in $\mathcal{D}$. □

Het volgende resultaat garandeert dat iedere totaal geordende uitbreiding van $\mathbb{Q}$ met de bovenstaande eigenschappen van volledigheid, onbegrensdheid en dichtliggen in essentie gelijk is aan $\mathcal{D}$.

Stelling 8.19 *Zij $(j, \mathcal{E}, \leq)$ een totaal geordende uitbreiding van $\mathbb{Q}$ die volledig is, en waarin $\mathbb{Q}$ tweezijdig onbegrensd is en dicht ligt. Dan is er een unieke afbeelding $f : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ met de volgende eigenschappen*

(a) $f \circ j = i$ *op* $\mathbb{Q}$;

(b) *de afbeelding f respecteert de ordeningen, dwz. voor alle $a, b \in \mathcal{E}$ geldt $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$.*

De afbeelding f is bijectief.

Opmerking 8.20 Identificeren we $\mathbb{Q}$ via j met een deel van $\mathcal{E}$ en via i met een deel van $\mathcal{D}$ dan zegt eigenschap (a) dat f de identiteit op $\mathbb{Q}$ is.

Bewijs: We tonen eerst het bestaan van f aan. Voor $x \in \mathcal{E}$ definiëren we

$$f(x) := \{r \in \mathbb{Q} \mid j(r) < x\}.$$

Allereerst laten we zien dat $f(x)$ een snede is. Veronderstel eerst $x = j(a)$ met $a \in \mathbb{Q}$. Voor elk rationaal getal $r \in \mathbb{Q}$ geldt dat $r < a \iff j(r) < j(a)$. Hieruit volgt direct dat

$$f(x) = \{r \in \mathbb{Q} \mid j(r) < x\} = \mathbb{Q}_{<a},$$

dus $f(j(a))$ is een snede, en bovendien $f(j(a)) = i(a)$. Veronderstel nu dat $x \in \mathcal{E}$ willekeurig is. Uit het feit dat $j(Q)$ tweezijdig onbegrensd is in $\mathcal{E}$ volgt het bestaan van $a, b \in \mathbb{Q}$ met $j(a) < x < j(b)$. Hieruit volgt dat $a \in f(x)$ en dat $f(x) \subset \mathbb{Q}_{<b}$. Dus $f(x)$ is niet-leeg en naar boven begrensd en we zien dat $f(x)$ conditie (a) van Definitie 8.8 vervult.

Om in te zien dat ook conditie (b) vervuld is, veronderstellen we dat $a \in f(x)$. Dan volgt voor alle $r \in \mathbb{Q}_{<a}$ dat $j(r) < j(a) < x$, dus $r \in f(x)$. De verzameling $f(x)$ voldoet dus aan conditie (b) van Definitie 8.8.

We verifiëren tenslotte conditie (c). Zij $r \in f(x)$, dan is $j(r) < x$. Aangezien $\mathbb{Q}$ dicht ligt in $\mathcal{E}$, bestaat er een $s \in \mathbb{Q}$ met $j(r) < j(s) < x$. Er geldt dus $r < s$ en $s \in f(x)$. Hieruit blijkt dat r geen bovengrens van $f(x)$ is. De verzameling $f(x)$ heeft dus geen grootste element.

We zien dat $f : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ een afbeelding is die aan (a) voldoet. Om in te zien dat f ook aan (b) voldoet merken we het volgende op. Veronderstel dat $x, y \in \mathcal{E}$ en dat $x < y$. Voor elke $r \in f(x)$ geldt $j(r) < x < y$, dus $r \in f(y)$. We concluderen dat $f(x) \subset f(y)$, dus $f(x) \leq f(y)$.

Om de uniciteit van f aan te tonen, veronderstellen we dat g een afbeelding $\mathcal{E} \to \mathcal{D}$ is die aan de gestelde eisen voldoet. We zullen aantonen dat $g(x) = f(x)$ voor alle $x \in \mathcal{E}$. Voor $x \in j(\mathbb{Q})$ volgt dit uit conditie (a). We mogen dus veronderstellen dat $x \in \mathcal{E} \setminus j(Q)$.

Eerst tonen we aan dat $f(x) \subset g(x)$. Als $a \in f(x)$, dan $a \in \mathbb{Q}$ en $j(a) < x$, dus bestaat er een $a' \in Q$ met $j(a) < j(a') < x$. Uit deze eis volgt $a < a'$ dus $a \in Q_{<a'} = i(a') = g(j(a'))$. Bovendien moet gelden dat $g(j(a')) \leq g(x)$, dus $i(a') \subset g(x)$, dus $a \in g(x)$. We concluderen dat $f(x) \subset g(x)$. Om de omgekeerde inclusie aan te tonen veronderstellen we dat $a \in g(x)$. Hieruit volgt dat $g(j(a)) = i(a) = \mathbb{Q}_{<a} \subsetneq g(x)$, dus $g(j(a)) < g(x)$. Uit $j(a) \geq x$ zou volgen $g(j(a)) \geq g(x)$, hetgeen onmogelijk is. Dus niet $j(a) \geq x$ waaruit volgt dat $j(a) < x$, omdat $\mathcal{E}$ totaal geordend is. We concluderen dat $a \in f(x)$. Hiermee is ook de inclusie $g(x) \subset f(x)$ aangetoond.

Tenslotte tonen we aan dat de afbeelding f bijectief is. Eerst de injectiviteit. Als $x, y \in \mathcal{E}$ en $x \neq y$, dan mogen we zonder verlies aan algemeenheid veronderstellen dat $x < y$. Er is een $a \in \mathbb{Q}$ met $x < j(a) < y$. Nu is $a \notin f(x)$ en $a \in f(y)$, dus $f(x) \neq f(y)$.

De surjectiviteit van f zien we als volgt in. Zij $S \in \mathcal{D}$ een snede. Wegens het onderstaande lemma bestaat er een monotoon stijgende rij (a_n) van rationale getallen en een monotoon dalende rij (b_n) van rationale getallen zo dat $a_n \in S$ en $b_n \notin S$ en $0 < b_n - a_n < \frac{1}{n}$ voor alle $n \geq 1$. De segmenten $I_n = [j(a_n), j(b_n)]$ in $\mathcal{E}$ vormen een dalende rij, en hebben wegens de volledigheid van $\mathcal{E}$ dus een punt x in de doorsnede. We zullen aantonen dat $f(x) = S$. Zij $r \in f(x)$. Dan is $j(r) < x$. Omdat $\mathbb{Q}$ dicht ligt in $\mathcal{E}$ bestaat er $s \in \mathbb{Q}$ zo dat $j(r) < j(s) < x$. Hieruit volgt dat $r < s$ dus er bestaat een n zo dat $r + \frac{1}{n} < s$ dus ook $j(r + \frac{1}{n}) < x$. Uit $j(b_n) > x$ volgt $j(b_n) > j(r + \frac{1}{n})$ dus $b_n > r + \frac{1}{n}$, dus $a_n > b_n - \frac{1}{n} > r$. We concluderen dat $r \in S$. Dus $f(x) \subset S$. Nu de omgekeerde inclusie. Stel dat $r \in S$. Dan is r geen bovengrens S dus er bestaat een rationaal getal $s \in S$ met $r < s$. Hierbij bestaat een n zo dat $r + \frac{1}{n} < s$, dus $r + \frac{1}{n} \in S$. We concluderen nu dat $r + \frac{1}{n} < b_n$, dus $r < b_n - \frac{1}{n} < a_n$. Hieruit volgt dat $j(r) < j(a_n)$, dus $j(r) < x$, dus $r \in f(x)$. □

Lemma 8.21 *Zij $S \in \mathcal{D}$. Dan bestaan er een monotoon stijgende rij (a_n) in S en een monotoon dalende rij (b_n) in $\mathbb{Q} \setminus S$ met $0 < b_n - a_n < \frac{1}{n}$.*

Bewijs: We laten eerst zien dat er bij gegeven $a \in S$ en $b \in \mathbb{Q} \setminus S$ een tweetal $a' = \alpha(a, b) \in S$ en $b' = \beta(a, b) \in \mathbb{Q} \setminus S$ bestaat met de eigenschap dat $a \le a' \le b' \le b$ en $b' - a' \le \frac{1}{2}(b - a)$. Dit gaat als volgt. We merken eerst op dat $b \le a \Rightarrow b \in S$. Derhalve $a < b$. Beschouw $c = \frac{1}{2}(a + b)$ dan geldt $a < c < b$. Er zijn twee mogelijkheden, $c \in S$ of $c \in \mathbb{Q} \setminus S$. In het eerste geval definiëren we $a' = c$ en $b' = b$ en in het tweede geval definiëren we $a' = a$ en $b' = c$.

De hierboven beschreven constructie gaan we herhaaldelijk toepassen. Kies $a_0 \in S$ en $b_0 \in \mathbb{Q} \setminus S$. Definieer inductief $a_{n+1} = \alpha(a_n, b_n)$ en $b_{n+1} = \beta(a_n, b_n)$. Dan geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$ dat $b_n - a_n = 2^{-n}(b_0 - a_0)$. We vinden de gewenste rij door de deelrij te nemen die start bij een index N met $2^{-N}(b_0 - a_0) < 1$. □

We zullen nu laten zien dat we de collectie $\mathcal{D}$ kunnen voorzien van een optelling die een uitbreiding geeft aan de optelling en vermenigvuldiging van $\mathbb{Q}$.

Is S een snede, dan definiëren we de deelverzameling S' van $\mathbb{Q}$ door

$$S' = \{a \in \mathbb{Q} \mid \exists b \in \mathbb{Q} \setminus S : \quad b < a\},$$

zie ook Opmerking 8.9. We merken op dat voor iedere $a \in \mathbb{Q}$ geldt dat

$$(\mathbb{Q}_{<a})' = \mathbb{Q}_{>a}. \tag{8.3}$$

Lemma 8.22 *Zij $S \in \mathcal{D}$. De verzamelingen S en S' zijn disjunct. Het complement in $\mathbb{Q}$ van hun vereniging bestaat uit nul of één element. Het laatste geval treedt op dan en slechts dan als $S = \mathbb{Q}_{<a}$ voor een rationaal getal $a \in \mathbb{Q}$.*

Bewijs: Als $a \in S'$ dan bestaat er een $b \in \mathbb{Q} \setminus S$ met $b < a$. Uit $a \in S'$ zou volgen $b \in S$ tegenspraak. Dus S en S' zijn disjunct. Als $a, b \in \mathbb{Q}$ en $a < b$, dan volgt uit $a \notin S$ dat $b \in S'$. Hieruit blijkt dat $a \in S$ of $b \in S'$. Het complement van $S \cup S'$ heeft dus hoogstens één element. Veronderstel dat het complement een element $a \in \mathbb{Q}$ bevat. Dan geldt voor alle $r \in S$ dat $r < a$. Is anderzijds $r < a$ dan zou uit $r \notin S$ volgen dat $a \in S'$, tegenspraak. We zien dat $S = \mathbb{Q}_{<a}$. Veronderstel tenslotte dat $S = \mathbb{Q}_{<a}$. Dan blijkt uit (8.3) dat in dit geval $S \cup S'$ de verzameling $\{a\}$ als complement in $\mathbb{Q}$ heeft. □

Is S een snede, dan definiëren we de deelverzameling $-S$ van $\mathbb{Q}$ door

$$-S := \{a \in \mathbb{Q} \mid -a \in S'\}.$$

Waarschuwing: $-S$ bestaat dus niet uit de elementen $-s$ met $s \in S$. We merken verder op dat door combinatie met (8.3) blijkt dat $-\mathbb{Q}_{<a} = \mathbb{Q}_{<-a}$, ofwel

$$-i(a) = i(-a) \qquad (a \in \mathbb{Q}). \tag{8.4}$$

De afbeelding $S \mapsto -S$ kan dus opgevat worden als voortzetting van de afbeelding $a \mapsto -a, \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tot een afbeelding $\mathcal{D} \to \mathcal{D}$.

Lemma 8.23 *Voor iedere $S \in \mathcal{D}$ behoort ook $-S$ tot $\mathcal{D}$. Voor iedere snede S geldt $-(-S) = S$ en voor elk tweetal sneden $S, T \in \mathcal{D}$ geldt $S \leq T \iff -T \leq -S$.*

Bewijs: Uit de definitie van $-S$ blijkt onmiddelijk dat $a \in -S \Rightarrow \mathbb{Q}_{\leq a} \subset -S$, dus conditie (b) van Definitie 8.8 is vervuld. We richten ons nu op conditie (a).

Laat $b \notin S$. Dan geldt dat $\mathbb{Q}_{>b} \subset S'$. Hieruit blijkt dat S' dus ook $-S$ niet leeg is. Is $c \in S$ dan geldt dat er geen $b \in Q \setminus S$ is met $b < c$. Derhalve is $c \notin S'$. We concluderen dat $\mathbb{Q} \setminus (-S) \neq \emptyset$. Combineren we dit met de hierboven bewezen geldigheid van conditie (b), dan zien we dat ieder element van $\mathbb{Q} \setminus (-S)$ een bovengrens van $-S$ is. De verzameling $-S$ is dus naar boven begrensd en we zien dat conditie (b) van Definitie 8.8 vervuld is.

Is $a \in -S$ dan is er een $b \in S$ met $b < -a$. De verzameling S heeft geen bovengrens, dus er is een $c \in S$ met $b < c$. Kies een $d \in \mathbb{Q}$ met $b < d < \min(c, -a)$. Dan is $d \in S$ en $b < d < -a$. We zien dat $-d \in -S$ en $-d > a$. Het element a is dus geen bovengrens van $-S$. De verzameling $-S$ heeft geen grootste element. Hiermee is aangetoond dat $-S$ een snede is.

We richten ons nu op het bewijs van de tweede bewering. door eerst aan te tonen dat $S \subset -(-S)$. Zij $a \in S$. Dan is er een $b \in S$ met $a < b$. Er geldt dat $b \notin S'$ dus $-b \notin -S$. Aangezien $-a > -b$ volgt $-a \in (-S)'$ dus $a \in -(-S)$. Zij nu omgekeerd $a \in -(-S)$. Dan is $-a \in (-S)'$ Dus $-a > b$ voor een $b \notin -S$. Kies c met $-a > c > b$ dan is $c \notin -S$ Uit $b, c \notin -S$ volgt $-b, -c \notin S'$, dus een van beiden behoort tot S. Aangezien $a < -b, -c$ volgt dat $a \in S$. In het bijzonder volgt nu ook $S = T \iff -S = -T$.

Laat tenslotte $S, T \in \mathcal{D}$ zijn en $S \leq T$. Dan $S \subset T$ waaruit direct volgt dat $T' \subset S'$. We concluderen dat $-T \subset -S$ dus $-T \leq -S$. Is omgekeerd $-T \leq -S$ dan geldt niet $-T > -S$ dus niet $T < S$ dus $S \leq T$ (want $\mathcal{D}$ is totaal geordend). $\square$

We definiëren nu een optelling van sneden door

$$S + T := \{a + b \mid a \in S,\ b \in T\}.$$

Men gaat gemakkelijk na dat $S + T$ weer een element van $\mathcal{D}$ is. We laten de details over aan de lezer. Verder geldt

$$i(a + b) = i(a) + i(b).$$

De zo gedefinieerde optelling van sneden is dus een voortzetting van de bekende optelling op $\mathbb{Q}$.

Lemma 8.24 *Voor alle $S, T \in \mathcal{D}$ geldt dat $S + T \in \mathcal{D}$. Bovendien voldoet de optelling aan de volgende eisen:*

(a) $(R + S) + T = R + (S + T)$;

(b) $S + T = T + S$;

(c) $S + i(0) = S$;

(d) $S + (-S) = i(0)$.

Bewijs: Het bewijs bevat geen wezenlijk nieuwe ideeën. We laten de details over aan de lezer. □

We merken op dat we wegens de in (a) geformuleerde associativiteit van de optelling de notatie

$$R + S + T := (R + S) + T$$

kunnen gebruiken. Het verband tussen optelling en ordening wordt door het volgende lemma gegeven.

Lemma 8.25 *Als R, S, T sneden in $\mathcal{D}$ zijn en $R \leq S$ dan geldt $R + T \leq S + T$.*

Bewijs: Oefening. □

Voor een tweetal sneden $S, T \in \mathcal{D}$ definiëren we de snede $\max(S, T)$ door

$$\max(S, T) := \begin{cases} S & \text{als} \quad T \leq S \\ T & \text{als} \quad S \leq T. \end{cases}$$

Deze definitie is volledig omdat $\mathcal{D}$ totaal geordend is. Merk op dat $\max(i(a), i(b)) = i(\max(a, b))$ voor alle $a, b \in \mathbb{Q}$. We definiëren de absolute waarde van een snede $S \in \mathcal{D}$ door

$$|S| := \max(S, -S).$$

Merk op dat $S \geq 0 \Rightarrow |S| = S$ en $S \leq 0 \Rightarrow |S| = -S$. Merk ook op dat $|i(a)| = i(|a|)$ voor alle $a \in \mathbb{Q}$. Als $S, T \in \mathcal{D}$ dan schrijven we

$$S - T := S + (-T).$$

Het volgende lemma zal garanderen dat $\mathcal{D}$ opgevat kan worden als metrische ruimte.

Lemma 8.26 *Voor alle $S, T \in \mathcal{D}$ geldt:*

(a) $|S| \geq i(0)$, *verder* $|S| = i(0) \iff S = i(0)$.

(b) $|-S| = |S|$;

(c) $|S + T| \leq |S| + |T|$.

Bewijs: Het bewijs is niet moeilijk. Details zijn voor de lezer. □

We formuleren nog een resultaat dat vaak in de theorie van limieten gebruikt wordt.

Lemma 8.27 *Zij $S \in \mathbb{R}$ en veronderstel dat $|S| < T$ voor alle $T > 0$. Dan is $S = i(0)$.*

Bewijs: Het is voldoende te laten zien dat $|S| = i(0)$. We weten $|S| \geq i(0)$. Veronderstel dat $|S| \neq i(0)$, dan $|S| > i(0)$, hetgeen betekent dat $\mathbb{Q}_{<0}$ strikt bevat is in $|S|$. Er bestaat dus een element $a \in |S|$ met $a \geq 0$. Aangezien a geen bovengrens van $|S|$ is bestaat er ook een element $b \in |S|$ met $b > 0$. Hieruit volgt dat $i(b) = \mathbb{Q}_{<b} < |S|$, tegenspraak. □

In het vervolg zullen we $\mathcal{D}$ met $\mathbb{R}$ noteren. Bovendien zullen we een element $a \in \mathbb{Q}$ identificeren met zijn beeld $i(a)$ in $\mathbb{R}$. Aldus vatten we $\mathbb{Q}$ op als deelverzameling van $\mathbb{R}$.

We definiëren de afbeelding $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $d(x, y) := |x - y|$.

Lemma 8.28 *d is een metriek op $\mathbb{R}$.*

Bewijs: Allereerst merken we op dat $d \geq 0$ wegens Lemma 8.26 (a). Bovendien is $d(x, x) = |x + (-x)| = |0| = 0$ en uit $d(x, y) = 0$ volgt $|x - y| = 0$ dus $x - y = 0$ waaruit weer volgt $(x + (-y)) + y = y$, dus $x = x + 0 = x + ((-y) + y) = y$.

We merken ook op dat voor elk tweetal reële getallen $x, y \in \mathbb{R}$ geldt

$$-(x + y) = -x + (-y).$$

Immers, $0 = (x + y) + [-(x + y)]$, dus

$$\begin{aligned} -x + (-y) &= [-x + (-y)] + (x + y) + [-(x + y)] \\ &= ((-x) + x) + ((-y) + y) + [-(x + y)] \\ &= 0 + 0 + [-(x + y)] = -(x + y). \end{aligned}$$

Hierbij is steeds gebruik gemaakt van een van de reeds afgeleide rekenregels in $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
Uit het bovenstaande leiden we m.b.v Lemma 8.26 (b) weer af dat

$$d(x, y) = |x - y| = | - (y + (-x)| = |y + (-x)| = d(y, x).$$

Tenslotte volgt de driehoeksongelijkheid door toepassing van Lemma 8.26 (c) als volgt:

$$\begin{aligned} d(x, z) = |x - z| &= |x + (-y) + y + (-z)| \\ &\leq |x + (-y)| + |y + (-z)| \\ &= d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

□

We hebben nu een welgedefinieerd limietbegrip voor rijen in $\mathbb{R}$. Door gebruik te maken van benaderende rijen kunnen we de vermenigvuldiging op $\mathbb{Q}$ voortzetten tot een vermenigvuldiging op $\mathbb{R}$.

Lemma 8.29 *Voor iedere reëel getal x bestaat een monotoon stijgende rij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ met $\lim_{n\to\infty} a_n = x$.*

Bewijs: Kies $a_1 \in \mathbb{Q}$ zo dat $x - 1 < a_1 < x$. Is a_n gevonden, dan kiezen we voor a_{n+1} een rationaal getal met $\max(a_n, x - \frac{1}{n}) < a_{n+1} < x$. Nu volgt $x - \frac{1}{n} < a_n < x$, en met de definitie van limiet zien we gemakkelijk in dat $\lim_{n\to\infty} a_n = x$. □

Uiteraard is er een soortgelijk resultaat met dalende rijen.

Lemma 8.30 *Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een monotoon stijgende rij in $\mathbb{R}$ die naar boven begrensd is. Dan is $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.*

Bewijs: In termen van sneden weten we dat $a := \cup_n a_n$ weer een snede, dus een element van $\mathbb{R}$ is. We zullen aantonen dat $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Zij $\varepsilon > 0$. Dan is $a - \varepsilon < a$. Er is een rationaal getal $r \in \mathbb{Q}$ met $a - \varepsilon < r < a$. Er geldt dat $r = i(r)$ behoort tot de snede a, dus er is een $N \in \mathbb{N}$ zo dat $r \in a_N$. Dit betekent dat $r < a_N$. Voor alle $n \geq N$ geldt nu $a - \varepsilon < r < a_N \leq a_n \leq a$. Dus $d(a_n, a) < \varepsilon$. We concluderen dat $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. □

Lemma 8.31 *Laat $x, y \in \mathbb{R}$ zijn. Dan is er precies één $z \in \mathbb{R}$ met de volgende eigenschap. Voor ieder tweetal rijen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ met $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ en $\lim_{n\to\infty} b_n = y$ geldt $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = z$.*

Bewijs: We beschouwen eerst de situatie dat $x, y \geq 0$. Er zijn monotoon stijgende rijen (a_n) en (b_n) in $\mathbb{Q}$ met $a_n \to x$ en $b_n \to y$. Door eventueel over te gaan op de rijen $\max(0, a_n)$ en $\min(0, b_n)$ zien we dat we het zo in kunnen richten dat bovendien geldt $a_n \geq 0$ en $b_n \geq 0$ voor alle n. Dan is de rij $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij niet-negatieve rationale getallen die monotoon stijgend is. Laat $r, s \in \mathbb{Q}$ zijn met $r > x$ en $s > y$. Dan geldt voor alle n dat $a_n b_n \leq rs$. Hieruit volgt dat de rij $(a_n b_n)$ monotoon stijgend en naar boven begrensd is. We concluderen dat de rij convergent is. Noem de limiet z. We tonen nu aan dat voor willekeurige rijen $(\tilde{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(\tilde{b}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ met $\tilde{a}_n \to x$ en $\tilde{b}_n \to y$ geldt dat $\tilde{a}_n \tilde{b}_n \to xy$. Laten dergelijke rijen $(\tilde{a}_n)$ en $(\tilde{b}_n)$ gegeven zijn. Uit de convergentie van de rijen volgt hun begrensdheid. Er bestaat dus een rationaal getal $M > 0$ zo dat $|a_n|, |\tilde{b}_n| \leq M$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt nu

$$\begin{aligned} |\tilde{a}_n \tilde{b}_n - z| &= |(\tilde{a}_n \tilde{b}_n - a_n \tilde{b}_n) + (a_n \tilde{b}_n - a_n b_n) + (a_n b_n - z)| \\ &\leq |\tilde{a}_n - a_n||\tilde{b}_n| + |a_n||\tilde{b}_n - b_n| + |a_n b_n - z| \\ &\leq M|\tilde{a}_n - a_n| + M|\tilde{b}_n - b_n| + |a_n b_n - z|. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Merk op dat we in het bovenstaande alleen rekenregels voor de vermenigvuldiging van rationale getallen gebruikt hebben. Uit de schattingen

$$|\tilde{a}_n - a_n| \leq |\tilde{a}_n - x| + |x - a_n| \quad \text{en} \quad |\tilde{b}_n - b_n| \leq |\tilde{b}_n - x| + |x - b_n|$$

leiden we af dat $|\tilde{a}_n - a_n| \to 0$ en $|\tilde{b}_n - b_n| \to 0$. Combineren we dit met (8.5) dan zien we tenslotte dat $|\tilde{a}_n \tilde{b}_n - z| \to 0$. Dus $\tilde{a}_n \tilde{b}_n \to z$. Hiermee is het bewijs voltooid in het geval dat $x, y \geq 0$. We beschouwen nu het geval dat $x < 0$ en $y \geq 0$. Dan is er wegens het eerste deel van het bewijs een $w \in \mathbb{R}$ met de eigenschap dat voor ieder tweetal rijen $(\alpha_n), (b_n)$ in $\mathbb{Q}$ met $\alpha_n \to -x$ en $b_n \to y$ geldt $\alpha_n b_n \to w$. Is bovendien (a_n) een rij in $\mathbb{Q}$ met $a_n \to x$ dan geldt $-a_n \to -x$, dus $-(a_n b_n) = (-a_n) b_n \to w$, waaruit we afleiden dat $a_n b_n \to z := -w$. De gevallen $x \geq 0, y < 0$ en $x, y < 0$ worden op soortgelijke wijze herleid tot het geval $x, y \geq 0$. □

Het getal z uit het bovenstaande lemma wordt het product van x en y genoemd en genoteerd met xy. Hiermee is de vermenigvuldiging op $\mathbb{R}$ gedefinieerd. Met wat werk, maar zonder dat er wezenlijk nieuwe ideeën aan te pas komen, kan men tenslotte laten zien dat $\mathbb{R}$ met de optelling en de vermenigvuldiging een lichaam is, zie Definitie 8.3. De ordening $\leq$ heeft verder nog de volgende eigenschappen.

Lemma 8.32 *Voor alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ geldt*

(a) $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$;

(b) $x \leq y,\ z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz$.

Bewijs: Uitspraak (a) is geformuleerd in Lemma 8.25. Uitspraak (b) kan men als volgt bewijzen. Er zijn monotoon stijgende rijen rationale getallen a_n, b_n en c_n met $a_n \to x$, $b_n \to y$ en $c_n \to z$. Definieer $a'_n = a_n$, $b'_n = \max(a_n, b_n)$ en $c'_n := \max(0, c_n)$. Dan geldt $a'_n \leq b'_n$ en $c'_n \geq 0$. Bovendien geldt $a'_n \to x$, $b'_n \to y$ en $c'_n \to z$. We concluderen dat $a'_n c'_n \to xz$ en $b'_n c'_n \to yz$. De uitspraak geldt voor rationale getallen, dus $a'_n c'_n \leq b'_n c'_n$, waaruit we concluderen dat $xz \leq yz$. Hierbij hebben we gebruik gemaakt van Lemma 3.19. Vergewis u ervan dat dit lemma inderdaad geldig is op basis van de tot dusver ontwikkelde theorie. □

Uit het bovenstaande volgt dat $\mathbb{R}$ net als $\mathbb{Q}$ een geordend lichaam is, zie Definitie 8.4. Het lichaam $\mathbb{R}$ is archimedisch in de zin van Axioma 3.8.

Lemma 8.33 (archimedische eigenschap) *Voor iedere $x \in \mathbb{R}$ bestaat een $n \in \mathbb{N}$ zo dat $x < n$.*

Bewijs: Uit Stelling 8.18 volgt dat x geen bovengrens van $\mathbb{Q}$ kan zijn. Derhalve bestaat een $a \in \mathbb{Q}$ met $x < a$. Kies $n \in \mathbb{N}$ zo dat $a < n$. Dan geldt $x < n$. □

Algemener definiëren we voor een lichaam L, een element $x \in L$ en een element $n \in \mathbb{N}$ het element nx als de som van n termen x. Inductief kan de definitie gegeven worden door $0x := 0_L$ en $(n + 1)x := nx + x$. Hierin hebben we de notatie 0_L gebruikt om het nul-element van L expliciet te onderscheiden van dat van $\mathbb{N}$. Om dezelfde reden gebruiken we hieronder de notatie 1_L voor het eenheidselement van L ten aanzien van de vermenigvuldiging.

Definitie 8.34 Laat L een geordend lichaam zijn. We zeggen dat L *archimedisch* is indien voor elke $x \in L$ een natuurlijk getal n bestaat zo dat $n1_L > x$.

Opmerking 8.35 In het voorgaande hebben we $\mathbb{Q}$, en daarmee ook $\mathbb{N}$, geïdentificeerd met een deelverzameling van $\mathbb{R}$. Deze identificatie maakt dat $n = n1_{\mathbb{R}}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ (dit kan met behulp van volledige inductie uit de gegeven definities worden afgeleid). De archimedische eigenschap van $\mathbb{R}$ is dus een speciaal geval van de in Definitie 8.34 geformuleerde eigenschap.

Het geordende lichaam $\mathbb{R}$ onderscheidt zich van $\mathbb{Q}$ door het feit dat het volledig is.

Definitie 8.36 Een geordend lichaam L heet *volledig* indien iedere dalende rij segmenten een niet-lege doorsnede heeft.

Het volgende resultaat garandeert dat $\mathbb{R}$ in essentie het enige archimedische en volledige geordende lichaam is.

Stelling 8.37 *Zij L een volledig geordend lichaam dat bovendien archimedisch is. Dan is er een unieke bijectieve afbeelding $\varphi : L \to \mathbb{R}$ met de volgende eigenschappen.*

(a) *Voor alle $x, y \in L$ geldt $x \leq y \iff \varphi(x) \leq \varphi(y)$.*

(b) *Voor alle $x, y \in L$ geldt $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.*

(c) *Voor alle $x, y \in L$ geldt $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.*

Ter voorbereiding op het bewijs behandelen we eerst enkele eigenschappen van een geordend lichaam. In het vervolg schrijven we 1_L voor het eenheidselement van L, terwijl we het nulelement van L zonder index noteren.

Lemma 8.38 *Zij L een geordend lichaam. Dan geldt dat*

(a) $1_L > 0$.

Bovendien geldt voor alle $x \in L$ dat

(b) $x > 0 \iff -x < 0 \quad en \quad x < 0 \iff -x > 0$;

(c) $x > 0 \iff x^{-1} > 0 \quad en \quad x < 0 \iff x^{-1} < 0$.

Bewijs: We merken eerst op dat voor $x > 0$ geldt $x + (-x) > 0 + (-x)$, dus $-x < 0$. De omgekeerde implicatie geldt om een soortgelijke reden, dus de eerste bewering van (b) volgt. Aangezien $-(-x) = x$, volgt ook de tweede bewering van (b).

Omdat $1_L \neq 0$, geldt $1_L < 0$ of $1_L > 0$. Uit $1_L < 0$ zou volgen dat $-1_L > 0$ dus ook $1_L = (-1_L)^2 > 0$ tegenspraak. We concluderen dat (a) geldt.

We merken ook op dat uit $x > 0$ en $x^{-1} < 0$ zou volgen dat $1_L = x^{-1}x < 0$ tegenspraak. Derhalve geldt voor alle $x \in L$ de implicatie $x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$. Omdat $(x^{-1})^{-1} = x$ (ga na) zien we dat de omgekeerde implicatie ook geldt. Derhalve geldt de eerst equivalentie van (c). Door te gebruiken dat $(-x)^{-1} = -(x^{-1})$ (ga ook na) leiden we uit de eerste equivalentie van (c) de tweede af. □

Bewijs van Stelling 8.37: We laten nu zien dat we $\mathbb{Q}$ op kunnen vatten als deel van L. Hiertoe definiëren we eerst de afbeelding $j : \mathbb{N} \to L$ door $j(n) = n1_L$. Uit $j(n+1) = j(n)+1_L$ en Lemma 8.38 (a) leiden we af dat $j(n + 1) > j(n)$ dus j is injectief. Het is met inductie naar m gemakkelijk te bewijzen dat $j(n + m) = j(n) + j(m)$ en $j(nm) = j(n)j(m)$ voor alle $n, m \in \mathbb{N}$.

Vervolgens breiden we j uit tot $\mathbb{Z}$ door $j(-n) := -j(n)$ voor alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dan geldt voor alle $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$ dat $j(n - 1) = j(n) + (-1_L) < j(n) < 0$, dus $j : \mathbb{Z} \to L$ is injectief. Bovendien geldt voor alle $n, m \in \mathbb{Z}$ dat $j(n + m) = j(n) + j(m)$ en $j(nm) = j(n)j(m)$.

Tenslotte breiden we j uit tot $\mathbb{Q}$. Veronderstel dat $p_j, q_j \in \mathbb{Z}$ en $q_j > 0$, voor $j = 1, 2$ en dat $p_1/q_1 = p_2/q_2$. Dan is $q_2p_1 = q_1p_2$, dus ook $j(q_2)j(p_1) = j(q_1)j(p_2)$ en $j(p_1)j(q_1)^{-1} = j(p_2)j(q_2)^{-1}$. Derhalve is door

$$j(p/q) = j(p)j(q)^{-1} \tag{8.6}$$

voor p, q geheel, $q > 0$, een uitbreiding van j naar $\mathbb{Q}$ gedefinieerd.

Zijn ook $p', q' \in \mathbb{Z}$ en $q' > 0$, dan is $p/q < p'/q'$ equivalent met $pq' < qp'$. Uit dit laatste volgt $j(p)j(q') < j(q)j(p')$ en omdat $j(q) > 0$ en $j(q') > 0$ en dus ook $j(q)^{-1}j(q')^{-1} > 0$ concluderen we dat

$$\begin{aligned} j(p)j(q)^{-1} &= j(p)j(q')j(q)^{-1}j(q')^{-1} \\ &< j(p')j(q)j(q)^{-1}j(q')^{-1} = j(p')j(q')^{-1} \end{aligned}$$

dus $j(p/q) < j(p'/q')$. We concluderen dat $j : \mathbb{Q} \to L$ de ordening behoudt. Het is evident uit de definitie van j dat $j(r_1 r_2) = j(r_1)j(r_2)$ voor alle $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$. Om te zien dat j ook de optelling behoudt schrijven we $r_j = p_j/q_j$, voor $j = 1, 2$, met $p_j, q_j \in \mathbb{Z}$ en $q_j > 0$. Uit

$$(q_1 q_2)(r_1 + r_2) = q_2 p_1 + q_1 p_2$$

leiden we af dat

$$j(q_1)j(q_2)j(r_1 + r_2) = j(q_2)j(p_1) + j(q_1)j(p_2),$$

waaruit door vermenigvuldiging met $j(q_1)^{-1}j(q_2)^{-1}$ volgt dat $j(r_1 + r_2) = j(r_1) + j(r_2)$. De afbeelding j behoudt dus ook de optelling.

In het volgende zullen we Stelling 8.19 gebruiken om het bestaan van een geschikte afbeelding $\varphi : L \to \mathbb{R}$ aan te tonen.

Uit het feit dat $j : \mathbb{Q} \to L$ de strikte ordening behoudt volgt dat j injectief is en dat we L met de ordening $\leq$ kunnen opvatten als een volledige totaal geordende uitbreiding van $\mathbb{Q}$. Als $x \in L$ dan is er wegens de archimedische eigenschap een $n \in \mathbb{N}$ met $j(n) > x$. Anderzijds is er wegens de archimedische eigenschap een $m \in \mathbb{N}$ met $j(m) > -x$ dus met $j(-m) = -j(m) < x$. We concluderen dat $\mathbb{Q}$ tweezijdig onbegrensd is in L.

We laten tenslotte zien dat $\mathbb{Q}$ dicht ligt in L. Laat $x, y \in L$ met $x < y$ gegeven zijn. Dan is $0 < y - x$, dus ook $0 < (y - x)^{-1}$. Wegens de archimedische eigenschap bestaat er een positieve gehele n met $(y - x)^{-1} < j(n)$. Hieruit volgt door vermenigvuldiging met $(y - x)j(n)^{-1}$ dat $j(n)^{-1} < (y - x)$. Uit de archimedische eigenschap volgt het bestaan van gehele getallen p, q zo dat $p < j(n)x < q$. Er is dus een grootste geheel getal k met $j(k) \leq j(n)x$. Hiervoor geldt $j(k)j(n)^{-1} < x < j(k + 1)j(n)^{-1}$. Aangezien $(y - x) > j(n)^{-1}$, volgt dat

$$j(k + 1)j(n)^{-1} = j(k)j(n)^{-1} + j(n)^{-1} \leq x + j(n)^{-1} < y.$$

Het rationale getal $r = (k + 1)/n$ voldoet dus aan $x < j(r) < y$. We concluderen dat $\mathbb{Q}$ dicht ligt in L. Hiermee is aangetoond dat de voorwaarden van Stelling 8.19 vervuld zijn door het tripel $(j, L, \leq)$. Er bestaat dus een unieke bijectie $\varphi : L \to \mathbb{R}$ die de ordeningen respecteert (vgl. (a)) en voldoet aan $\varphi \circ j = i$ op $\mathbb{Q}$.

We zullen aantonen dat φ ook de gewenste eigenschappen (b) en (c) heeft. Merk op dat we hiervoor de in dit dictaat ontwikkelde theorie betreffende limieten in $\mathbb{R}$ mogen gebruiken. Laat $x, y \in L$ zijn. Dan bestaat er vanwege de dichtheid van $\mathbb{Q}$ in L voor iedere positief geheel getal n een $x_n \in \mathbb{Q}$ met $x - j(\frac{1}{n}) < j(x_n) < x$. Hieruit volgt ook dat $j(x_n) < x < j(x_n) + j(\frac{1}{n})$. Omdat x_n en $1/n$ rationaal zijn, kan de meest rechtse uitdrukking herschreven worden als $j(x_n + 1/n)$. Dus

$$j(x_n) < x < j(x_n + \frac{1}{n}). \tag{8.7}$$

Omdat φ de ordeningen respecteert concluderen we dat $x_n < \varphi(x) < x_n + \frac{1}{n}$, dus $\lim_{n\to\infty} x_n = \varphi(x)$.

Evenzo bestaat er voor iedere positief geheel getal n een $y_n \in \mathbb{Q}$ met $y - j(\frac{1}{n}) < j(y_n) < y$. Er volgt weer dat

$$j(y_n) < y < j(y_n + \frac{1}{n}) \tag{8.8}$$

en dat $\lim_{n\to\infty} y_n = \varphi(y)$.

Door combineren van (8.7) en (8.8) en te gebruiken dat $j : \mathbb{Q} \to L$ de optellingen respecteert, vinden we $j(x_n + y_n) < x + y < j(x_n + y_n + \frac{2}{n})$. Omdat φ de ordeningen respecteert volgt hier weer uit dat

$$x_n + y_n < \varphi(x + y) < x_n + y_n + \frac{2}{n}$$

voor alle positieve gehele n. Er volgt dat $\varphi(x + y) = \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n)$. Met de somregel voor limieten concluderen we dat $\varphi(x + y) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty y_n} = \varphi(x) + \varphi(y)$. Hiermee is (b) aangetoond.

We richten ons op het bewijzen van (c). Eerst behandelen we het geval dat $x, y \in L$ en $x, y > 0$. Laat (x_n) en (y_n) rijen rationale getallen als hierboven zijn. Voor n voldoende groot geldt dat $j(n) > x^{-1}, y^{-1}$, dus ook $x - j(\frac{1}{n}) > 0$ en $y - j(\frac{1}{n}) > 0$. Hieruit leiden we af dat $x_n > 0$ en $y_n > 0$ voor n voldoende groot. Voor zulke n geldt dus

$$j(x_n)j(y_n) < xj(y_n) < xy$$

en

$$xy < (x_n + j(\frac{1}{n}))y < (x_n + j(\frac{1}{n}))(y_n + j(\frac{1}{n})).$$

Door toepassen van φ leiden we af dat $x_n y_n < \varphi(xy) < (x_n + \frac{1}{n})(y_n + \frac{1}{n})$ en door de limiet voor $n \to \infty$ te nemen vinden we $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. Hiermee is (c) aangetoond voor $x, y > 0$. Is $x = 0$ of $y = 0$, dan is $xy = 0$ en (c) is duidelijk. De overgebleven gevallen (i) $x < 0,\ y > 0$, (ii) $x > 0,\ y < 0$, en (iii) $x < 0,\ y < 0$ kunnen we herleiden tot het geval $x > 0, y > 0$. We laten dit zien voor (i).

Veronderstel dat $x, y \in L$ en $x < 0, y > 0$. Dan is reeds bewezen dat

$$\varphi((-x)y) = \varphi(-x)\varphi(y). \tag{8.9}$$

Uit $(-x)y + xy = ((-x) + x)y = 0 \cdot y = 0$ volgt dat $(-x)y = -(xy)$. Voor alle $z \in L$ geldt $\varphi(-z) + \varphi(z) = \varphi(0) = 0$, waaruit we aflezen dat $\varphi(-z) = -\varphi(z)$. Uit (8.9) volgt daarom dat

$$\varphi(xy) = -\varphi(-(xy)) = -\varphi(-x)y) = -\varphi(-x)\varphi(y) = \varphi(x)\varphi(y).$$

De over gebleven gevallen (ii) en (iii) worden op soortgelijke wijze behandeld.

Tenslotte tonen we de uniciteit van φ aan. Veronderstel dat $\varphi : L \to \mathbb{R}$ een bijectie is met de eigenschappen (a – c). Uit eigenschap (b) gecombineerd met de surjectiviteit van φ volgt dat $\varphi(0)$ neutraal element is ten aanzien van de optelling in $\mathbb{R}$. Derhalve $\varphi(0) = 0$. Tevens volgt uit eigenschap (c) gecombineerd met de surjectiviteit van φ dat $\varphi(1_L)$ neutraal element is voor de vermenigvuldiging in $\mathbb{R}$. Hieruit volgt dat $\varphi(1_L) = 1$. Combineren we dit met (b), dan zien we dat $\varphi(n1_L) = n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Uit $\varphi(n1_L) + \varphi((-n)1_L) = \varphi(n1_L + (-n)1_L) = \varphi(0) = 0$ volgt dat $\varphi((-n)1_L) = -\varphi(n1_L)$ voor $n \in \mathbb{N}$. We concluderen dat $\varphi(j(n)) = n$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$. Zijn $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$, dan volgt uit

$$\varphi(j(p)j(q)^{-1})q = \varphi(j(p)j(q)^{-1})\varphi(j(q)) = \varphi(j(p)) = p$$

dat $\varphi(j(p/q)) = \varphi(j(p)j(q)^{-1}) = p/q$, dus $\varphi \circ j = i$ op $\mathbb{Q}$. Aangezien $(j, L, \leq)$ volgens het eerste deel van het bewijs voldoet aan de voorwaarden van Stelling 8.19 concluderen we dat φ uniek bepaald wordt door de gestelde eisen. □

Tenslotte schetsen we nog hoe de gehele analyse opgebouwd kan worden vanuit de verzamelingenleer, met behulp van de regels van de logica en de verzamelingenleer.

Hierboven hebben we gezien hoe $\mathbb{R}$ gedefinieerd kan worden als uitbreiding van $\mathbb{Q}$. Bovendien dat we $\mathbb{R}$ op kunnen vatten als metrische ruimte. Alle theorie van het dictaat geldt nu voor $\mathbb{R}$ en zijn deelverzamelingen (voorzien van de restrictiemetriek). In het bijzonder hebben we gezien dat het volledigheidsaxioma een gevolg is van de definities.

De wortelfunctie $\sqrt{\cdot} : [0, \infty[\to [0, \infty[$ is te definiëren met behulp van de theorie voor $\mathbb{R}$ die in Hoofdstuk 5 van het dictaat ontwikkeld wordt. In het bijzonder blijkt daar dat de wortelfunctie welgedefinieerd, continu en monotoon strikt stijgend is. De definitie van de norm op $\mathbb{R}^n$ in (1.1) is nu zinvol voor elke $n \geq 1$. Hiermee is $\mathbb{R}^n$ een metrische ruimte en de in het dictaat ontwikkelde theorie is geldig voor $\mathbb{R}^n$. Zie ook Opmerking 1.1.