NS106b/2014-2015
Versie 31/07/2014

Speciale Relativiteitstheorie

Stefan Vandoren

Instituut voor Theoretische Fysica
Universiteit Utrecht

Dictaat

Dit is een collegedictaat in voorbereiding. De tekst is gebaseerd op een eerder, in het Engels geschreven dictaat door Prof. dr. B. de Wit (dW), "Introduction to Special Relativity". Dit dictaat is beschikbaar via het Blackboard systeem.

Deze tekst zal met enige regelmaat bijgewerkt worden. Tekeningen en afbeeldingen zijn voorlopig nog niet toegevoegd, hopelijk wel in een volgende versie.

In het tweede deel van dit dictaat, vanaf Hoofdstuk 11, vindt u de opgaven voor de werkcolleges.

Schema

Week 1: Hoofdstuk 1[p. 3-7 in dW].
Week 2: Hoofdstukken 2 en 3 (Secties 3.1 en 3.2) [p. 9-14 in dW].
Week 3: Hoofdstuk 3, Secties 3.3 - 3.4 [p. 15-18 in dW].
Week 4: Hoofdstuk 4 [p.19-22 in dW, doch ietwat geherformuleerd].
Week 5: Hoofdstuk 5 [p. 22-25 in dW] en Hoofdstuk 6, Sectie 6.1 [p. 26-27 in dW].
Week 6: Hoofdstuk 6, Sectie 6.2 [niet in dW] en 6.3 [p. 28-29 in dW], en Hoofdstuk 7 [p. 39-41 in dW].
Week 7: Hoofdstuk 8, [p. 41-47 in dW].
Week 8: Hoofdstukken 9 en 10 [p.47-50 in dW].

Contents

1 Inleiding

In dit eerste, korte, hoofdstuk herhalen we een aantal begrippen uit de klassieke mechanica. We bespreken hoe er over ruimte en tijd gedacht wordt in de Newtoniaanse mechanica, en hoe verschillende inertiaalwaarnemers bepaalde gebeurtenissen onderling kunnen vergelijken. Daarna bespreken we de wet van de optelling van snelheden en het Doppler-effect voor geluidsgolven. Vervolgens vergelijken we dit met wat we weten over lichtgolven en zien we een conflict met de wet van de optelling van snelheden. Dit probleem leidt tot een vervanging van de klassieke mechanica door de speciale relativiteitstheorie, waarvan we de postulaten geven in Hoofdstuk 2.

1.1 Ruimte en tijd volgens Newton

Onze ruimte is drie dimensionaal, en we beschrijven gebeurtenissen in de ruimte met behulp van een Cartesiaans assenstelsel met drie loodrechte richtingen. De positie van een deeltje in de ruimte heeft drie coordinaten. Ten opzichte van een waarnemer O definieert dit een vector vanuit de oorsprong van het assenstelsel, naar de positie van het deeltje. We noteren een vector als

$$\vec{r} = (x, y, z) \ , \tag{1.1}$$

waarbij x, y en z de drie coordinaten van het deeltje zijn. Ten opzichte van een andere waarnemer, O', in rust ten opzichte van O, definieert dit een andere vector $\vec{r}\,' = (x', y', z')$.

Stel nu dat waarnemer O' weg beweegt van O, met een constante snelheid v in de richting van de x-as. De snelheidsvector noteren we dus als

$$\vec{v} = (v, 0, 0) \ , \qquad v_x = v \ , \qquad v_y = v_z = 0 \ . \tag{1.2}$$

Op een bepaald tijdstip, zeg $t = 0$, zijn O en O' nog samen, en zijn hun assenstelsels gelijk. Een deeltje dat voor O in rust is, is dat niet meer ten opzichte van O'. Er geldt nu de volgende relatie tussen de coordinaten van het deeltje:

$$z' = z \ , \qquad y' = y \ , \qquad x' = x - vt \ . \tag{1.3}$$

De tijd in de Newtoniaanse mechanica is absoluut en voor iedereen gelijk: $t' = t$. Met andere woorden, O en O' hebben ieder hun eigen klok, maar die tikken even snel. Tijdsduren tussen twee gebeurtenissen zijn dezelfde voor alle inertiaalwaarnemers.

Wanneer O' zich in een andere richting beweegt dan de x-as, in de richting van een constante snelheidsvector $\vec{v}$, dan gelden de volgende relaties:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}t \ , \qquad t' = t \ . \tag{1.4}$$

Dit zijn de zogenaamde *Galilei transformaties.* Ze laten ons toe de resultaten van een gebeurtenis, waargenomen door verschillende inertiaalwaarnemers, met elkaar te vergelijken.

Twee waarnemers die eenparig ten opzichte van elkaar bewegen, dus met constante snelheid, noemen we inertiaalwaarnemers. Een inertiaalstelsel is een coordinatenstelsel waarin voorwerpen waar geen kracht op werkt, stilstaan of eenparig rechtlijnig bewegen (dus met constante snelheid een rechte lijn volgen). In de strikte zin bestaan er geen inertiaalstelsels. Er is altijd wel een kracht aanwezig; er is in het heelal bijvoorbeeld geen plek waar de zwaartekracht helemaal niet aanwezig is. Echter, soms is die kracht verwaarloosbaar klein en speelt deze geen rol in de situatie. Tussen alle inertiaalstelsel gelden, volgens de Newtoniaanse mechanica, de Galilei transformaties. Er is geen voorkeurs-inertiaalstelsel, en alle inertiaalwaarnemers spelen een gelijke rol.

Stel nu dat het deeltje ook beweegt ten opzichte van O met een snelheid

$$\vec{u} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \ , \tag{1.5}$$

of meer precies is de snelheid de afgeleide van de positievector $\vec{r}(t)$ naar de tijd,

$$\vec{u} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}(t) \ . \tag{1.6}$$

Het beweegt dan in het algemeen ook ten opzichte van waarnemer O', met snelheid

$$\vec{u}\,' = \frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r} - \vec{v}t) = \vec{u} - \vec{v} \ . \tag{1.7}$$

Dit is de welbekende wet van de optelling van snelheden,

$$\vec{u}\,' = \vec{u} - \vec{v} \ . \tag{1.8}$$

Het was hier belangrijk aan te nemen dat $\vec{v}$ constant was, $\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t = 0$. Dit is een speciale situatie, en lang niet alle waarnemers bewegen met constante snelheden ten opzichte van mekaar. Deze *speciale* situatie leidt later tot de *speciale* relativiteitstheorie. Wanneer we ook waarnemers beschouwen die ten opzichte van elkaar versnellen, i.e. $\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t \neq 0$, dan leidt dit tot Einstein's *algemene* relativiteitstheorie[1].

1.2 Het Doppler-effect

Soms voeren we toch ogenschijnlijke voorkeurs referentiesystemen in, zoals bijvoorbeeld bij het voortplanten van geluidsgolven. Deze bewegen in een medium, vb. de lucht, en we noteren de geluidssnelheid in lucht met v_s. Het medium definieert hier een voorkeurstelsel omdat een waarnemer kan bepalen of hij/zij in rust is ten opzichte van het medium of niet.

Geluid is een golf met een frequentie f en een golflengte λ. De snelheid waarmee de golf zich voortplant is

$$v_s = f\,\lambda \ . \tag{1.9}$$

Stel nu dat een geluidsbron B zich van een waarnemer O (in rust t.o.v. het medium) weg beweegt met een snelheid v, zeg in de x-richting. Waarnemer O meet dan een lagere frequentie f' (de toonhoogte daalt), en een grotere golflengte λ' (de afstand tussen twee

[1] De situatie is iets genuanceerder. Ook systemen die versnelling ondergaan kunnen beschreven worden met de speciale relativiteitstheorie. We bespreken een voorbeeld in Hoofdstuk 4, wanneer het gaat over de oplossing van de tweelingparadox.

opeenvolgende golftoppen wordt groter). Dit is het Doppler-effect. De wet van Doppler is een empirische wet die zegt dat

$$f' = \frac{f}{1+v/v_s} \ , \qquad \lambda' = \lambda(1+\frac{v}{v_s}) \ . \tag{1.10}$$

De snelheid van het geluid blijft echter dezelfde. Inderdaad, we vinden

$$v_s' = f'\lambda' = f\lambda = v_s \ . \tag{1.11}$$

Echter, wanneer de waarnemer O zich weg beweegt ten opzichte van de bron en het medium, dan luidt Doppler's wet

$$f' = f(1-\frac{v}{v_s}) \ , \qquad \lambda' = \lambda \ . \tag{1.12}$$

De geluidsnelheid die O nu meet is

$$v_s' = f'\lambda' = f(1-\frac{v}{v_s})\lambda = v_s(1-\frac{v}{v_s}) = v_s - v \ . \tag{1.13}$$

Met andere woorden, we vinden hier ook weer de wet van de optelling van de snelheden terug.

Licht is ook een golf, maar gedraagt zich anders dan geluidsgolven:

- het heeft geen medium nodig, lichtgolven kunnen zich voortplanten in vacuum!
- licht blijkt altijd, voor *alle* inertiaalwaarnemers, zich met dezelfde snelheid voort te bewegen. Die snelheid wordt genoteerd met de letter c, van het Latijnse "celeritas" (snelheid), en heeft een waarde

  $$c = 299\,792\,458 \ m/s \ , \tag{1.14}$$

  of afgerond 300.000 kilometer per seconde.

Dit laatste punt is in tegenspraak met de wet van de optelling voor snelheden. Immers, volgens Newton zou een waarnemer die tegen het licht in beweegt een grotere lichtsnelheid moeten meten, en een waarnemer die met het licht meebeweegt een kleinere. Uit het beroemde en oorspronkelijke experiment van Michelson en Morley, uitgevoerd in 1887, blijkt dat dit echter niet zo is[2]. Dit feit, onder meer, was voor Einstein aanleiding om een nieuwe natuurkunde theorie te formuleren, de speciale relativiteitstheorie. We zullen deze opbouwen aan de hand van twee postulaten die aan de basis liggen van de speciale relativiteitstheorie. Vervolgens werken we de gevolgen van deze postulaten uit in latere hoofdstukken.

[2] We behandelen dit experiment niet in dit dictaat, maar stimuleren elke student om hier zelfstandig wat over op te zoeken.

2 De postulaten van de speciale relativiteitstheorie

Twee postulaten liggen aan de basis van de speciale relativiteitstheorie, het postulaat van de relativiteit en het lichtpostulaat.

- Het postulaat van de relativiteit bestaat uit twee uitspraken:
  a) Er is geen voorkeurs-inertiaalstelsel: dit betekent dat het onmogelijk is voor een inertiaalwaarnemer om te bepalen of hij/zij in rust is of eenparig rechtlijnig beweegt (d.w.z. met constante snelheid). Dit deel van het postulaat is ook onderdeel van de Newtoniaanse mechanica.
  b) Er is geen absolute tijd; tijd is relatief en afhankelijk van de waarnemer. Dit postulaat staat haaks op de onderbouwing van Newton's klassieke mechanica, waar tijd absoluut is en voor elke waarnemer dezelfde.
- Het lichtpostulaat, dat zegt dat de lichtsnelheid in vacuüm dezelfde is voor alle inertiale waarnemers (geverifieerd door experimenten zoals dat van Michelson en Morley in 1887).

De gevolgen van deze postulaten zijn drastisch: een nieuwe theorie die de mechanica van Newton vervangt! Maxwell's theorie van het elektromagnetische veld is wel consistent met de postulaten van de relativiteit.

3 Spelen met lichtgolven - Ruimtetijd diagrammen

In dit hoofdstuk doen we een aantal gedachten experimenten om de gevolgen van de postulaten van de relativiteitstheorie te begrijpen. We zullen aantonen dat tijdsduren afhangen van de waarnemer, en dus niet voor iedere inertiaalwaarnemer gelijk zijn. Daarna bespreken we de tijdsdilatatie waarbij voor het eerst de belangrijke Lorentz-factor, ook wel de γ-factor genoemd, verschijnt. Vervolgens herhalen we het Doppler-effect, maar nu in een relativistische context. Maar eerst voeren we het concept van ruimtetijd diagrammen in. Dit is een belangrijk hulpmiddel om de relativiteitstheorie beter te begrijpen.

3.1 Ruimtetijd diagrammen en de lichtkegel

Zowel in de klassieke mechanica als in de relativiteitstheorie is het gebruikelijk ruimtetijd diagrammen in te voeren. Dit is een Cartesisch assenstelsel waarbij zowel ruimte- als tijd coordinaten worden getekend. De meest eenvoudige en aanschouwelijke voorbeelden vinden plaats in een tweedimensionaal ruimtetijd diagram, i.e. het (t, x) diagram. De wereldlijn van een deeltje in rust op positie $x = x_0$ ten opzichte van een waarnemer O is dan een verticale lijn in het (t, x) diagram. Wanneer het deeltje, of een ander inertiaalstelsel O', een constante snelheid v heeft, wordt dit een rechte lijn met als afgeleide $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$.

In de relativiteitstheorie is het gebruikelijk over te gaan naar het (ct, x) diagram. Omdat de lichtsnelheid voor alle inertiaalwaarnemers dezelfde is, kunnen we de tijd van iedere inertiaalwaarnemer vermenigvuldigen met c. In het (ct, x) diagram maken wereldlijnen van lichtdeeltjes altijd een hoek van 45 graden. In drie ruimtelijke dimensies spannen de wereldlijnen van lichtstralen een drie-dimensionale kegel op, de zogenaamde *lichtkegel*. Wereldlijnen van deeltjes met snelheid $v < c$ maken dan een hoek met de tijdsas (of beter, de ct-as) die steeds kleiner is dan 45 graden en vallen binnen de lichtkegel.

3.2 Tijd is relatief

We beginnen dit hoofdstuk met een gedachten experiment dat zich afspeelt in één ruimtelijke dimensie, zeg de x-as. Op tijdstip $t = 0$ passeert een waarnemer O' (voor de gedachtengang denken we aan een auto op de snelweg) een andere waarnemer O (de politie met een radar flits-systeem) met constante snelheid v. We synchroniseren de klokken van O en O', dit wil zeggen: $t = 0$ voor O betekent ook $t' = 0$ voor O'[3]. Ietsje later, op tijdstip $t = T$ stuurt de politie een lichtgolf (of radarsignaal) in de richting van de auto O', en op een nog later tijdstip $t = t_r$ komt de lichtstraal bij O' aan, waar die vervolgens met een perfecte spiegel weerkaatst wordt in de richting van de politie. De lichtstraal komt uiteindelijk terug aan bij de politie O op tijdstip $t = \alpha T$, waarbij α een getal is dat de politie kan meten door de tijd van aankomst op zijn klok vast te stellen.

Wat we nu willen berekenen of bepalen zijn de tijdsduur van de heenreis en terugreis van de lichtgolf, eerst vanuit het perspectief van de politie, daarna vanuit het perspectief van de auto. De afstand die het licht aflegt gedurende heen en weer-reis is dezelfde. Dat is namelijk de afstand tussen O en O' op het tijdstip t_r. Laten we die afstand noteren met

[3] Het synchroniseren van de klokken van O en O' bij $t = t' = 0$ gebruiken we over het gehele dictaat.

x_r. Omdat volgens het lichtpostulaat de snelheid van het licht dezelfde is tijdens heen en weer-reis betekent dit dat ook de reistijden dezelfde zijn. Dit is anders dan in de klassieke mechanica, waar, door behoud van impuls en energie, het teruggekaatste licht (gezien als een deeltje met een massa) een lagere snelheid zou hebben. We gaan dit nu omzetten in formules, die makkelijk uit het ruimtetijd diagram kunnen worden afgelezen:

De heenreis duurt volgens de politie O

$$Reistijd\ heen: \qquad \Delta t_H = t_r - T \ . \tag{3.1}$$

De terugreis duurt dan

$$Reistijd\ terug: \qquad \Delta t_W = \alpha T - t_r \ . \tag{3.2}$$

Omdat de reistijden dezelfde zijn, volgt hieruit

$$\Delta t_H = \Delta t_W \qquad \Rightarrow \qquad t_r = \left(\frac{\alpha + 1}{2}\right) T \ . \tag{3.3}$$

De totale reistijd is dus

$$Totale\ reistijd: \qquad \Delta t = \Delta t_H + \Delta t_W = \alpha T - T = (\alpha - 1)T \ . \tag{3.4}$$

Merk op dat in het rechterlid nog steeds de onbekende factor α staat. Die gaan we nu bepalen als functie van de snelheid v van de auto O'. Hiervoor gaan we eerst een andere formules zoeken voor t_r. Dit gaat als volgt. In een tijd t_r heeft de auto een afstand x_r afgelegd. Het licht heeft daarintegen een tijd $t_r - T$ nodig om dezelfde afstand x_r af te leggen. Uit de formules voor de snelheden (snelheid = afgelegde weg/tijd) volgt dan

$$v = \frac{x_r}{t_r} \ , \qquad c = \frac{x_r}{t_r - T} \qquad \Rightarrow \qquad t_r = \frac{T}{1 - \frac{v}{c}} \ . \tag{3.5}$$

Van in het begin veronderstellen we dat $0 < v < c$, omdat anders de lichtstraal de auto nooit kan bereiken. Merk nu op dat we twee formules hebben voor t_r, namelijk in (3.3) en (3.5). Als we die aan mekaar gelijk stellen kunnen we vervolgens α hieruit berekenen,

$$\alpha = \frac{1 + v/c}{1 - v/c} \ . \tag{3.6}$$

Door α te meten bij de politie kunnen we dan v uit deze formule berekenen. Op die manier kan de politie bepalen hoe snel de auto O' rijdt. De totale reistijd kunnen we nu dan schrijven als functie van v, door vb. (3.6) te substitueren in (3.4),

$$\Delta t = \left(\frac{2v/c}{1 - v/c}\right) T \ . \tag{3.7}$$

We gaan nu dezelfde analyse doen vanuit het perspectief van de auto O'. Vanuit het standpunt van O', beweegt O van O' weg met een snelheid $v' = -v$. Op een bepaald tijdstip, zeg $t' = T'$, stuurt de politie een lichtstraal uit in de richting van de auto. Op dat tijdstip is de politie op een afstand die we noteren met x'_e (de "e" staat voor *emissie*). Dit is de afstand die het licht moet afleggen naar de auto, en die lichtstraal komt aan bij O' op een later tijdstip dat we noteren met t'_r. We hebben dus de formules[4]

$$v = \frac{x'_e}{T'} \; , \qquad c = \frac{x'_e}{t'_r - T'} \qquad \Rightarrow \qquad t'_r = (1 + \frac{v}{c})T' \; . \tag{3.8}$$

Op een nog later tijdstip, zeg $\alpha' T'$, komt de lichtstraal weer aan bij de politie, die ondertussen op een verdere positie staat, zeg x'_d (de "d" staat voor *detectie*). We passen op dit traject nu opnieuw de snelheidsformules toe, en krijgen

$$v = \frac{x'_d}{\alpha' T'} \; , \qquad c = \frac{x'_d}{\alpha' T' - t'_r} \qquad \Rightarrow \qquad t'_r = (1 - \frac{v}{c})\alpha' T' \; . \tag{3.9}$$

Door t'_r in (3.8) en (3.9) met mekaar te vergelijken vinden we

$$\alpha' = \frac{1 + v/c}{1 - v/c} \; , \tag{3.10}$$

en dit is hetzelfde resultaat als O, dus $\alpha = \alpha'$.

We kunnen nu makkelijk de reistijden heen en weer berekenen in het O' stelsel:

$$Reistijd\ \ heen : \qquad \Delta t'_H = t'_r - T' = \frac{v}{c}\, T' \; , \tag{3.11}$$

en

$$Reistijd\ \ terug : \qquad \Delta t'_W = \alpha' T' - t'_r = \alpha\, \frac{v}{c}\, T' = \alpha\, \Delta t'_H \neq \Delta t'_H \; . \tag{3.12}$$

De twee reistijden zijn dus niet gelijk, omdat $\alpha \neq 1$ voor $v \neq 0$. Maar dit is een andere conclusie dan vanuit het perspectief van de politie, voor wie de reistijden op de heen en weer-reis wel gelijk zijn! Het lijkt dus dat tijdsintervallen tussen twee gebeurtenissen afhangen van de waarnemer. Met andere woorden, *tijd is relatief!*

De totale reistijd kan nu makkelijk berekend worden, en we vinden

$$Totale\ \ reistijd : \qquad \Delta t' = \Delta t'_H + \Delta t'_W = \frac{1}{1 - v/c}\, \frac{2v}{c}\, T' \; . \tag{3.13}$$

De vraag die zich nu voordoet is of de totale reistijd waargenomen door O en O' wel gelijk zijn, en indien niet, willen we weten wat het verband is tussen Δt en $\Delta t'$.

[4]Strict genomen staan er mintekens in de eerste twee vergelijkingen van (3.8), en analoog in (3.9). Dit is omdat x'_e en x'_d eigenlijk negatief zijn vanwege het feit dat O van O' wegbeweegt in de negatieve x-richting. Deze tekens vallen echter tegen mekaar weg in de formules voor t'_r.

3.3 Tijdsdilatatie

Hoe kunnen we nu de twee tijdsintervallen (3.7) en (3.13) die O en O' meten, met mekaar vergelijken ? Hiervoor moeten we een verband vinden tussen T' en T. Dit verband kunnen we vinden door het relativiteitsprincipe te gaan gebruiken. Dat werkt als volgt:

We kunnen het gedachten-experiment opsplitsen in twee delen. Het eerste deel bestaat uit het proces dat O een lichtsignaal uitstuurt op tijdstip $t_e = T$ naar O', die dan het signaal detecteert op tijdstip $t'_d = t'_r$. Er moet een verband bestaan tussen t'_d en t_e, m.a.w. er is een functie tussen de twee die we noteren als

$$t'_d = f(t_e) \ , \tag{3.14}$$

met f een functie die we moeten bepalen.

Het tweede deel bestaat uit het proces dat het lichtsignaal gereflecteerd en uitgestuurd wordt bij O' op tijdstip $t'_e = t'_r$ en naar O, die het signaal detecteert op tijdstip $t_d = \alpha T$. Maar dit is precies hetzelfde soort proces als in het eerste deel, alleen zijn O en O' omgewisseld. Omwille van het relativiteitsprincipe moet dan het verband tussen t_d en t'_e hetzelfde zijn, d.w.z.

$$t_d = f(t'_e) \ . \tag{3.15}$$

Omdat $t'_e = t'_r = t'_d$ (het moment van detectie, reflectie en emissie bij O' zijn gelijk) kunnen we (3.14) en (3.15) nu combineren tot

$$\alpha T = t_d = f(t'_e) = f(t'_d) = f[f(t_e)] = f[f(T)] \ . \tag{3.16}$$

Men kan nu bewijzen dat de oplossing voor de functie f voor generieke waarde van α is gegeven door

$$f(T) = \pm\sqrt{\alpha}\, T \ . \tag{3.17}$$

De oplossing met het min-teken is echter niet fysisch. Passen we dit nu terug toe op (3.14), dan volgt

$$t'_r = t'_d = \sqrt{\alpha}\, t_e = \sqrt{\alpha}\, T \ , \tag{3.18}$$

dus krijgen we een verband tussen t'_r en T. Gebruik makende van de uitdrukking voor t'_r in (3.8), en de waarde voor α in (3.6), geeft dit een verband tussen T' en T:

$$T' = \gamma\, T \ , \qquad \gamma \equiv \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \ . \tag{3.19}$$

Verder vinden we ook de relatie

$$t'_r = \frac{1}{\gamma}\, t_r \ , \tag{3.20}$$

waarbij de inverse γ-factor verschijnt.

Het uiteindelijke resultaat is het verband tussen de twee totale reistijden:

$$\Delta t' = \gamma \, \Delta t \ . \tag{3.21}$$

De relatie tussen de twee tijdsduren is een herschaling, of dilatatie (een "uitrekking"), met een factor γ. Omdat voor $0 < v < c$ de schaalfactor $\gamma > 1$, is $\Delta t' > \Delta t$. Nadat O en O' terug samenkomen en hun informatie uitwisselen zegt O' dat de hele gebeurtenis langer geduurd heeft dan volgens O ! Dit effect heet de tijdsdilatatie. Voor steeds grotere snelheden wordt de dilatatie ook steeds groter. Merk verder op dat voor $v = c$ de dilatatie oneindig groot wordt, en voor $v > c$ is γ imaginair. Deze situaties zijn onfysisch; dit wordt verder uitgelegd in Sectie 5.2 en ook in het werkcollege.

3.4 Het longitudinale Doppler-effect

Als toepassing op het vorige bestuderen we nu het relativistische Doppler-effect. Hierin wordt een lichtsignaal uitgestuurd door een bron O naar een bewegende (relatief t.o.v. O, met constante snelheid v) waarnemer O'. We veronderstellen dat de waarnemer in dezelfde richting beweegt als het lichtsignaal, vb. volgens de x-richting; we spreken dan van het *longitudinale* Doppler-effect. Wanneer O het lichtsignaal uitzendt op tijdstip t_e, detecteert O' dit op tijdstip t'_d. Uit (3.14) en (3.17) volgt dan

$$t'_d = k(\beta) \, t_e \ , \qquad k(\beta) \equiv \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \ , \qquad \beta \equiv \frac{v}{c} \ . \tag{3.22}$$

Merk op dat we de notatie hebben ingevoerd dat $k(\beta) = \sqrt{\alpha}$.

Beschouw nu de situatie dat O een lichtgolf uitstuurt. Zo'n golf kunnen we zien als een periodisch verschijnsel waarin lichtpulsen worden doorgestuurd met een vast tijdsinterval. Laten we veronderstellen dat O dus lichtpulsen uitstuurt gescheiden door een vast tijdsinterval, Δt. Elk van die lichtpulsen komt aan bij O' op een tijdstip dat bepaald wordt door (3.22). Het tijdsinterval tussen twee gedetecteerde lichtpulsen, gemeten door O' is dan

$$\Delta t' = k(\beta) \, \Delta t \ . \tag{3.23}$$

De frequentie van de bijbehorende lichtgolf is per definitie één gedeeld door de periode, dus krijgen we dat de frequenties in het O en O' stelsel gerelateerd zijn via

$$f' = \frac{f}{k(\beta)} = f \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \ . \tag{3.24}$$

Wanneer O' van O weg beweegt is de richting van de snelheid v dezelfde als die van c, en is $1 > \beta > 0$. In dat geval is $k(\beta) > 1$ en dus $f' < f$. Wanneer O' naar O toebeweegt is $v < 0$ en dus $f' > f$. Als de snelheid van O' klein is ten opzichte van de lichtsnelheid kunnen we gebruik maken van de Taylor-expansies (zie Problem Sheet 3)

$$k(\beta) = 1 + \beta + \frac{1}{2}\beta^2 + \mathcal{O}(\beta^3) \ , \qquad \frac{1}{k(\beta)} = k(-\beta) = 1 - \beta + \frac{1}{2}\beta^2 + \mathcal{O}(\beta^3) \ , \tag{3.25}$$

zodat

$$f' = f\left(1 - \beta + \frac{1}{2}\beta^2 + \mathcal{O}(\beta^3)\right) \ . \tag{3.26}$$

In vergelijking met de niet-relativistische versie van het Doppler-effect, vergelijking (1.12) met $v_s = c$, zien we dat er verschillen zijn met termen evenredig met β^2. Deze verschillen zijn klein (afhankelijk natuurlijk van de grootte van v), maar in de praktijk wel meetbaar!

De golflengte λ, is zoals steeds gelijk aan de snelheid maal de periode. We krijgen dan het verband

$$\lambda' = \lambda\, k(\beta) = \lambda\left(1 + \beta + \frac{1}{2}\beta^2 + ...\right) \ . \tag{3.27}$$

Ook hier zijn er verschillen met het niet-relativistische Doppler-effect, die klein maar meetbaar zijn. Het relativistische Doppler-effect is experimenteel tot op grote nauwkeurigheid getest, en bevestigd. Merk overigens op dat de snelheid van de golf voor beide waarnemers dezelfde is: $c = f\,\lambda = f'\lambda'$, in overeeenstemming met het lichtpostulaat.

4 Tijdsdilatatie en Tweelingparadox

4.1 Richting van de tijdsdilatatie - De eigentijd

We meten tijdsduren of tijdsintervallen tussen twee *gebeurtenissen*. Een gebeurtenis is een punt in het ruimtetijd diagram. Verschillende inertiaalwaarnemers kunnen verschillende tijdsintervallen meten tussen dezelfde twee gebeurtenissen. Dit effect heet tijdsdilatatie. De vraag is dan wie de kortste tijdsduur meet, en hoe groot de tijdsdilatatie is.

Beschouw nu weer het gedachten experiment van de auto en de politie, zie Hoofdstuk 3. Dat experiment kunnen we opsplitsen in verschillende gebeurtenissen, die elk tijdstippen hebben zowel in het stelsel van de politie als in het stelsel van de auto:

1 : auto passeert politie : $\quad t_1 = t_1' = 0$,

2 : politie stuurt lichtsignaal uit : $\quad t_2 = T;\ \ t_2' = T'$,

$$3 : \text{auto detecteert en reflecteert lichtsignaal :} \qquad t_3 = t_r; \;\; t'_3 = t'_r = t'_d = t'_e \ ,$$
$$4 : \text{politie detecteert lichtsignaal :} \qquad t_4 = \alpha T; \;\; t'_4 = \alpha T' \ .$$

We kunnen nu de tijdsintervallen berekenen tussen iedere twee gekozen gebeurtenissen, die we noteren met vb. $\Delta t_{12} \equiv t_2 - t_1$ als het gaat om het tijdsinterval tussen gebeurtenis 2 en 1, enz. Aan de hand van de gegevens en resultaten in Hoofdstuk 3 kunnen we nu het volgende lijstje maken:

$$\begin{aligned}
\Delta t_{12} &= T \ , & \Delta t'_{12} &= \gamma\, \Delta t_{12} \ , \\
\Delta t_{13} &= t_r \ , & \Delta t'_{13} &= \gamma^{-1}\, \Delta t_{13} \ , \\
\Delta t_{14} &= \alpha T \ , & \Delta t'_{14} &= \gamma\, \Delta t_{14} \ , \\
\Delta t_{23} &= t_r - T \ , & \Delta t'_{23} &= k^{-1}(\beta)\, \Delta t_{23} \ , \\
\Delta t_{24} &= (\alpha - 1)T \ , & \Delta t'_{24} &= \gamma\, \Delta t_{24} \ , \\
\Delta t_{34} &= \alpha T - t_r \ , & \Delta t'_{34} &= k(\beta)\, \Delta t_{34} \ .
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Merk op dat niet al deze vergelijkingen onafhankelijk zijn, en we sommige van deze relaties kunnen samenstellen, vb.

$$\Delta t'_{24} = \Delta t'_{23} + \Delta t'_{34} = \left(\frac{1}{k} + k \right) \Delta t_{23} = 2\gamma \Delta t_{23} = \gamma \Delta t_{24} \ , \tag{4.2}$$

waarbij we bij het laatste gelijkheidsteken gebruiken dat de reisweg in het O-stelsel heen en terug even lang duurt, dus de helft van de totale reistijd van het lichtsignaal.

We zien dus dat soms de tijdsdilatatie een factor γ is, soms γ^{-1}, soms $k(\beta)$, en een andere keer dan weer $k^{-1}(\beta)$. Soms meet dus de politie de kortste tijd, en soms de auto. Wat is nu het principe dat ons in staat stelt de kortste tijd te bepalen ?

Een uiteindelijk antwoord en begrip volgt pas in Hoofdstuk 6, maar we geven hier al een aanwijzing. Verdere inspectie van de tijdlijst in (4.1) laat zien dat *de waarnemer waarvoor het tijdsinterval het kortst is, die waarnemer is waarvoor de afstand tussen de twee gebeurtenissen het kleinst is.* Immers, we hebben dat (verifieer dit aan de hand van het ruimtetijd diagram!)

$$\begin{aligned}
\Delta x_{12} &= 0 \ , & \Delta x'_{12} &= vT' \ , \\
\Delta x_{13} &= vt_r \ , & \Delta x'_{13} &= 0 \ , \\
\Delta x_{14} &= 0 \ , & \Delta x'_{14} &= v\alpha T' \ , \\
\Delta x_{23} &= vt_r \ , & \Delta x'_{23} &= vT' \ , \\
\Delta x_{24} &= 0 \ , & \Delta x'_{24} &= (\alpha - 1)vT' \ ,
\end{aligned}$$

$$\Delta x_{34} = vt_r \ , \qquad\qquad \Delta x'_{34} = v\alpha T' \ . \tag{4.3}$$

Uit het feit dat $T' = \gamma T = \gamma(1 - v/c)t_r = k^{-1}(\beta)t_r < t_r$ (gebruik (3.19) en (3.5)), en $\alpha = k^2(\beta)$, volgt vb. dat $\Delta x'_{23} < \Delta x_{23}$ en $\Delta x'_{34} > \Delta x_{34}$, en dus bovenstaande bewering. Als controle op de berekening kan men uit de twee bovenstaande lijstjes de volgende relaties afleiden,

$$\frac{\Delta x'_{34}}{\Delta t'_{34}} = \frac{\Delta x_{34}}{\Delta t_{34}} = c \ , \qquad \frac{\Delta x'_{23}}{\Delta t'_{23}} = \frac{\Delta x_{23}}{\Delta t_{23}} = c \ , \tag{4.4}$$

zoals het hoort.

Meer in het algemeen vinden we de volgende relatie voor iedere willekeurige twee gebeurtenissen i en j:

$$c^2 \Delta t_{ij}^2 - \Delta x_{ij}^2 = c^2 \Delta t_{ij}'^2 - \Delta x_{ij}'^2 \ . \tag{4.5}$$

De grootheid $c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$ blijkt steeds hetzelfde voor iedere inertiaalwaarnemer! Later bewijzen we dat dit een algemene eigenschap is van de speciale relativiteitstheorie. Uit (4.5) volgt dat wanneer in een van de twee stelsels de afstand tussen twee gebeurtenissen nul is - we noemen dit het *ruststelsel* -, de tijdsduur het kortst is. Dit levert de kortst mogelijke tijdsduur op, die we de *eigentijd* noemen. Het is de eigenlijke tijd die nodig is tussen twee gebeurtenissen in het ruststelsel. We noteren de eigentijd met τ of $\Delta\tau$. In dat geval komt de tijdsdilatatie dan steeds met een factor γ. Inderdaad, wanneer $\Delta x = 0$ tussen twee willekeurige gebeurtenissen - ze vinden dus op dezelfde positie plaats -, dan is $\Delta x'/\Delta t' = v$ (overtuig jezelf hiervan!), en volgt er uit (4.5) dat

$$\Delta t' = \gamma \, \Delta\tau \ . \tag{4.6}$$

De eigentijd is het meest te vergelijken met de absolute tijd in de klassieke mechanica. Dit begrip wordt daarom ook vaak gebruikt.

4.2 Een experiment met muonen - Ruststelsels

Muonen zijn elementaire deeltjes zoals elektronen. Ze hebben dezelfde elektrische lading, negatief dus, maar zijn ongeveer tweehonderd keer zwaarder dan elektronen. Het muon deeltje wordt genoteerd met de Griekse letter μ^-, het bovenschrift geeft de elektrische lading weer. In tegenstelling tot elektronen zijn muonen niet stabiel. Na enige tijd vervallen ze in het lichtere elektron, waarbij ook 2 neutrinos geproduceerd worden. De gemiddelde levensduur van een muon in rust is

$$t_{\mu^-} = 2,2 \times 10^{-6} s \ . \tag{4.7}$$

Muonen worden in de bovenlaag van de atmosfeer gevormd door inkomende kosmische straling. Hier valt veel over te vertellen, maar dat is echter niet belangrijk voor onderstaande redenering. Wat van belang is hier, is dat muonen geproduceerd worden hoog in de atmosfeer, en met grote snelheid richting aardoppervlak bewegen waar ze eventueel kunnen gedetecteerd worden. Laten we voor het gemak even aannemen dat ze met bijna de lichtsnelheid bewegen en geproduceerd worden 50 kilometer boven het aardoppervlak. Alvorens een muon vervalt, kan het maximaal een afstand afleggen van

$$\Delta x = ct_{\mu^-} = 0,6 \; km \; . \tag{4.8}$$

In werkelijkheid is de snelheid van het muon nog een stuk kleiner dan de lichtsnelheid, en dus de afgelegde weg nog kleiner dan $0,6\; km$. Dit zou betekenen dat het muon het aardoppervlak nooit (beter: "gemiddeld nooit") kan bereiken voor het vervalt. Toch kunnen we veel van die muonen detecteren op het aardoppervlak! Dit fenomeen kan niet verklaard worden met de Newtoniaanse mechanica, maar wel met de relativiteitstheorie.

De verklaring van dit effect hangt af van de waarnemer. Beschouw een waarnemer O' op het aardoppervlak. Deze ziet het muon geproduceerd worden (gebeurtenis 1), en vervolgens wordt het muon op het aardoppervlak gedetecteerd (gebeurtenis 2). De twee gebeurtenissen vallen niet op dezelfde plaats in het stelsel van O'. Voor een waarnemer O die met het muon meebeweegt vallen de twee gebeurtenissen wel samen, namelijk in de oorsprong van het stelsel van O. Het muon beweegt immers niet ten opzichte van O. We noemen dit het *ruststelsel*. De tijdsduur tussen twee gebeurtenissen is het kleinst in het ruststelsel, en de tijdsdilatatie die O' dan meet is

$$\Delta t' = \gamma \Delta \tau \; . \tag{4.9}$$

De gemiddelde levensduur van het muon is bepaald in het ruststelsel O, en dus is volgens de waarnemer op aarde de levensduur gemiddeld

$$t'_{\mu^-} = \gamma \, t_{\mu^-} \; . \tag{4.10}$$

In die tijd kan volgens O' een muon een afstand afleggen van

$$\Delta x' = \gamma \; \times 0,6 \, km \; . \tag{4.11}$$

Bij een snelheid van het muon waarvoor vb. $\gamma = 100$, kan het muon 60 kilometer afleggen, en dus makkelijk het aardoppervlak bereiken!

Vanuit het perspectief van het ruststelsel is de verklaring anders. Immers, in het stelsel van O is de levensduur wel degelijk gegeven door (4.7). Het muon ziet echter de aarde naar zich toebewegen, en vraagt zich af of hij de afstand van 50 kilometer kan afleggen. Echter, zoals we zullen zien in Hoofdstuk 6, ziet het muon de afstand atmosfeer-aarde anders. Die lengte ziet hij niet in rust, maar in beweging. Dan vindt er een lengte-contractie plaats, gegeven door

$$L = \frac{L'}{\gamma} \,, \tag{4.12}$$

waarbij L' de rustlengte is, dus $L' = 50\,km$. Met opnieuw de waarde $\gamma = 100$, is $L = 0,5\,km$, dus kleiner dan (4.8). Er is dus geen paradox, en het muon kan ook volgens waarnemer O de aarde bereiken!

4.3 De tweelingparadox

De tweelingparadox ontstaat als volgt. Laten we een tweeling beschouwen, Bob en Alice. Alice besluit een ruimtereis te maken naar een dichtbijzijnde ster en terug. Bob blijft thuis. Vanwege de tijdsdilatatie zullen Bob en Alice verschillende reistijden meten. Voor de heenreis geldt dat Alice de kortste tijd zal ervaren, die we noteren met Δt_{Alice}. Volgens Bob duurt de reistijd heen dan

$$\Delta t_{Bob} = \gamma \, \Delta t_{Alice} \,. \tag{4.13}$$

De reden dat Alice de kortste reistijd meet is omdat in het stelsel van Alice de twee gebeurtenissen (vertrek op aarde, en aankomst bij de ster) op dezelfde plaats zijn, namelijk in de oorsprong van Alice's stelsel. Zo bekeken zit Alice dus in het ruststelsel. Bijvoorbeeld, als volgens Alice de heenreis 2 jaar duurt, is er voor Bob ondertussen 3 jaar voorbijgegaan.

Omdat de terugreis identiek is aan de heenreis, maar dan in omgekeerde richting, zal deze voor Alice opnieuw twee jaar duren, en voor Bob 3 jaar. Alice en Bob komen daarna op aarde opnieuw samen, en het blijkt dat er voor Alice 4 jaren zijn verstreken, en voor Bob, die thuisbleef, 6 jaar. Met andere woorden, Bob is door thuis te blijven ouder geworden dan Alice.

Hoe kan dit? Immers, kan Alice niet redeneren dat het volgens het relativiteitsprincipe onmogelijk vast te stellen is wie ten opzichte van wie beweegt? Alice zou kunnen zeggen dat het Bob is die van haar heen en weer reist. Kan men daarom niet beargumenteren dat Bob daarom jonger moet zijn dan Alice bij het wederzien? Maar ze kunnen niet beiden gelijk hebben: ofwel is de ene jonger, ofwel de andere!

Het antwoord op deze paradox ligt in het bepalen van inertiaalstelsels. Tijdens de heenreis zijn Bob en Alice inertiaalwaarnemers, tijdens de terugreis ook, maar tussen die twee in moet er gekeerd worden. Alice, die reist, moet omkeren, dat wil zeggen, vertragen, tot stilstand komen, en weer versnellen in omgekeerde richting. Tijdens die omkering is Alice geen inertiaalwaarnemer meer, want zij ondervindt de krachten van de motoren die het ruimteschip omkeren. Er is dus geen symmetrie-argument meer om de rollen om te keren, en te zeggen dat de andere op reis is gegaan. Het postulaat van de relativiteit gaat dus niet op voor deze situatie. De breking van de symmetrie bepaalt dat de totale tijdsdilatatie de ene kant op werkt, en niet de andere. Het is wel degelijk zo dat er voor Alice 4 jaar zijn voorbijgegaan, en voor Bob 6 jaar. Bob is wel degelijk ouder geworden dan Alice.

Om de verwarring eventueel nog wat groter te maken (of misschien wordt de situatie juist duidelijker ...?), kunnen we twee andere gebeurtenissen beschouwen, namelijk vertrek op aarde, en aankomst op aarde. Nu vallen die twee gebeurtenissen op dezelfde plaats in beide stelsels, van zowel Bob als Alice. Men zou dan kunnen redeneren dat beide dezelfde tijdsduur meten tussen die twee gebeurtenissen. Er is dan geen sprake van verjonging. Dit is echter niet correct, omdat gedurende die periode Alice geen inertiaalwaarnemer is.

Het voorbeeld van de tweelingparadox wordt in meer detail uitgewerkt tijdens het werkcollege (zie Problem Sheet 4).

5 Relativistische effecten

In dit hoofdstuk bespreken we twee belangrijke relativistische effecten. Het eerste gaat over lengte-contracties van bewegende lichamen, zoals reeds vermeld in (4.12). Het tweede effect gaat over de wet van de optelling van relativistische snelheden, en hoe hieruit volgt dat het vergroten van snelheden groter dan de lichtsnelheid niet kan.

5.1 De lengte-contractie van Lorentz-FitzGerald

Hoe meten we de lengte van voorwerpen? Neem bijvoorbeeld een één-dimensionale stok in rust ten opzichte van een inertiaalwaarnemer O. We leggen de stok langs de x-as van het coördinatenstelsel van O, met een uiteinde van de stok in de oorsprong. We kunnen dan de lengte aflezen, noteren die met l, en noemen dit de rustlengte.

Beschouw nu een bewegende waarnemer O' ten opzichte van O, die met constante snelheid v in de positieve x-richting beweegt. Waarnemer O' ziet de stok voorbij komen, eerst het linkeruiteinde (gebeurtenis 1), daarna het rechteruiteinde (gebeurtenis 2). Die twee gebeurtenissen vinden plaats in de oorpsrong in het (ct', x') ruimtetijd-diagram van O'. De lengte die O' meet noteren we met l' en de tijd tussen de twee gebeurtenissen met $\Delta t'$. Gezien de snelheid van de stok t.o.v. O' gelijk is aan v, volgt dat

$$l' = v\,\Delta t' \ . \tag{5.1}$$

We kunnen nu $\Delta t'$ uitdrukken in het O-stelsel. Aangezien $\Delta x' = 0$, is $\Delta t'$ de eigentijd. Die is het kleinst en de tijdsdilatatie is dan $\Delta t = \gamma \Delta t'$, en dus

$$l' = \frac{v}{\gamma} \Delta t \ . \tag{5.2}$$

Vanuit het O-stelsel is $v\Delta t$ de afstand die O' aflegt tussen de twee gebeurtenissen, en die is $v\Delta t = l$, namelijk precies de lengte van de stok. Invullen in (5.2) geeft dan de beroemde formule voor de lengte-contractie

$$l' = \frac{l}{\gamma} \ . \tag{5.3}$$

Aangezien $\gamma \geq 1$, volgt hieruit dat $l' \leq l$, met andere woorden, de rustlengte ondervindt een contractie ten opzichte van een bewegende waarnemer. De formule van de lengte-contractie (5.3) werd reeds gepostuleerd door George Francis FitzGerald in 1889 en door Hendrik Antoon Lorentz in 1892 om een verklaring te zoeken voor de vreemde uitkomst van het Michelson-Morley experiment. Later vond Einstein dat de formule volgt uit de veranderingen van de begrippen ruimte en tijd, en uiteindelijk een gevolg is van de postulaten van de relativiteitstheorie beschreven in Hoofdstuk 2.

5.2 Het relativistisch optellen van snelheden

Volgens de klassieke bewegingsleer geldt er de wet van de optelling van snelheden (1.8). Laten we een één-dimensionaal systeem beschouwen met drie inertiaalwaarnemers O_1, O_2, O_3. De snelheid van O_2 ten opzichte van O_1 noteren we met v_{21}, die van O_3 ten opzichte van O_1 met v_{31}, en die van O_3 ten opzichte van O_2 met v_{32}. Voor het gemak veronderstellen we dat $v_{31} > v_{21} > 0$. Volgens de klassieke mechanica hebben we dan $v_{31} = v_{32} + v_{21}$. We gaan nu afleiden hoe deze formule verandert in de relativiteitstheorie.

Laat waarnemer O_1 een lichtsignaal uitsturen richting O_2 en O_3. Het tijdstip van emissie door O_1 noteren we met T_1, het tijdstip van detectie op de klok van O_2 met T_2, en het moment van detectie bij O_3 volgens zijn eigen klok met T_3. T_2 is ook het moment van emissie van het lichtsignaal van O_2 naar O_3, aangezien dat het moment is dat het lichtdeeltje O_2 inhaalt en op weg is naar O_3. Gebruik makende van wat we geleerd hebben in Hoofdstuk 3, in het bijzonder (3.22), hebben we dan de verbanden

$$T_3 = k(\beta_{32})T_2 \ , \qquad T_2 = k(\beta_{21})T_1 \ , \qquad T_3 = k(\beta_{31})T_1 \ , \tag{5.4}$$

waarbij vb. $\beta_{32} = v_{32}/c$, en $k(\beta_{32}) = \sqrt{\frac{1+\beta_{32}}{1-\beta_{32}}}$. Hieruit volgt de relatie

$$k(\beta_{32})\, k(\beta_{21}) = k(\beta_{31}) \ . \tag{5.5}$$

Er volgt nu een kleine berekening om dit te herschrijven als een relatie tussen de verschillende beta-symbolen:

$$\beta_{32}\beta_{31}\beta_{21} - \beta_{21} + \beta_{31} - \beta_{32} = 0 \ . \tag{5.6}$$

In termen van de relatieve snelheden wordt dit (reken na!)

$$v_{31} = \frac{v_{32} + v_{21}}{1 + \frac{v_{32}\, v_{21}}{c^2}} \ . \tag{5.7}$$

Dit is de relativistische versie van de wet van de optelling van snelheden. Wanneer beide v_{32} en v_{21} veel kleiner zijn dan de lichtsnelheid, volgt opnieuw het klassieke resultaat in goede benadering. De correcties worden steeds belangrijker naarmate v_{32} of v_{21} in de buurt van de lichtsnelheid komen. Merk echter wel op dat steeds geldt dat

$$v_{32}, v_{21} \leq c \qquad \Rightarrow \qquad v_{31} \leq c \ , \tag{5.8}$$

en wanneer vb. $v_{21} = c$, dat dan ook $v_{31} = c$, in overeenstemming met het lichtpostulaat. Met andere woorden, door snelheiden op te tellen kan met geen snelheden krijgen die groter zijn dan de lichtsnelheid.

6 De Lorentz-transformaties

In dit hoofdstuk bespreken we een van de belangrijkste onderdelen van de speciale relativiteitstheorie, namelijk de Lorentz-transformaties. Die stellen ons in staat de coördinaten van een gebeurtenis in verschillende inertiaalstelsels met mekaar te vergelijken. Bijna alle relativistische effecten zijn hieruit af te leiden. We geven meteen het resultaat, de afleiding volgt beneden.

Laat (x, t) de coördinaten zijn van een gebeurtenis in stelsel O. Voor een andere inertiaalwaarnemer O' zijn de coördinaten dan (x', t'). Zoals altijd nemen we aan dat voor $t = t' = 0$ de waarnemers O en O' samenvallen, en O' beweegt in de positieve richting van de x-as met snelheid v. Dan gelden de volgende relaties tussen de coördinaten:

$$x' = \gamma\,(x - vt) \ , \qquad t' = \gamma\,(t - \frac{v}{c^2}\, x) \ . \tag{6.1}$$

Dit is de Lorentz-transformatie in een ruimtelijke dimensie. Ze vervangt de Galilei transformatie (1.3) in de klassieke mechanica. De afleiding geven we in de volgende subsectie. De veralgemening naar drie ruimtelijke dimensies volgt in Subsectie 6.3.

6.1 De speciale Lorentz-transformatie

Beschouw een waarnemer O die op tijdstip t_e een lichtsignaal uitstuurt in de positieve x-richting. Op een later tijdstip t raakt het lichtsignaal een spiegel die staat op positie x. Het moment van reflectie noemen we de gebeurtenis met coördinaten (x, t). Het lichtsignaal wordt gereflecteerd en komt op tijdstip t_d terug aan bij waarnemer O. Er geldt dan

$$t_e = t - \frac{x}{c} \; , \qquad t_d = t + \frac{x}{c} \; . \tag{6.2}$$

We bekijken nu deze gebeurtenissen vanuit het stelsel van een bewegende waarnemer. We veronderstellen dat het lichtsignaal O' passeert alvorens het de spiegel bereikt. De coordinaten van reflectie bij de spiegel noteren we met (x', t'). Het tijdstip dat het lichtsignaal bij O' aankomt noteren we met $t'_d < t'$. Na de reflectie passeert het lichtdeeltje opnieuw waarnemer O' op een tijdstip t'_e, en nog later komt het aan bij O. Het is handig om een ruimtetijd diagram te tekenen in het stelsel van O' om de situatie goed te kunnen visualiseren. Dan ziet men makkelijk dat

$$t'_d = t' - \frac{x'}{c} \; , \qquad t'_e = t' + \frac{x'}{c} \; . \tag{6.3}$$

In Hoofdstuk 3 hebben we gezien dat de relatie tussen de emissietijd t_e van O en detectietijd t'_d van O' gegeven is door

$$t'_d = k(\beta)\, t_e \qquad \Rightarrow \qquad t' - \frac{x'}{c} = k(\beta)\, (t - \frac{x}{c}) \; . \tag{6.4}$$

Analoog geldt de relatie

$$t_d = k(\beta)\, t'_e \qquad \Rightarrow \qquad t + \frac{x}{c} = k(\beta)\, (t' + \frac{x'}{c}) \; . \tag{6.5}$$

We hebben nu twee vergelijkingen die (x', t') uitdrukken in termen van (x, t). We kunnen die oplossen voor t' als functie van x en t, en voor x' als functie van x en t. Dit is een korte berekening waarbij de volgende identiteiten misschien handig zijn (bewijs ze eerst afzonderlijk!):

$$k + \frac{1}{k} = 2\gamma \; , \qquad k - \frac{1}{k} = 2\beta\gamma \; . \tag{6.6}$$

Het resultaat van de berekening is dan de Lorentz-transformatie

$$x' = \gamma\, (x - vt) \; , \qquad t' = \gamma\, (t - \frac{v}{c^2}\, x) \; , \tag{6.7}$$

zoals aangekondigd in (6.1).

Een gevolg van de Lorentz transformaties is dat, voor iedere gebeurtenis

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2 \; . \tag{6.8}$$

Men noemt deze uitdrukking ook wel de *ruimtetijd invariant*, aangezien deze invariant is onder Lorentztransformaties, en iedere waarnemer er dus hetzelfde getal voor vindt.

6.2 De paradox van ladder en garage - Gelijktijdigheid is relatief

We bekijken de volgende situatie. Beschouw een ladder van lengte 5 meter, en een garage van 3 meter diepte. In rust past de ladder in de lengte niet in de garage. Neem nu twee waarnemers, O in de garage, en O' op de ladder. Stel nu dat de ladder volgens zijn lengte-as in beweging is richting garage, met snelheid v. Volgens O ondervindt de ladder lengtecontractie en bij voldoende hoge snelheid v past hij in de garage. Echter, volgens O' beweegt de garage naar hem toe, en ondervindt de garage lengtecontractie. De ladder past niet in de garage volgens O'. Wie heeft er gelijk ?

Laten we de paradox wat scherper stellen. Immers, wanneer zowel de voor- als achterkant van de garage open zijn, vliegt de ladder er simpelweg doorheen, concluderen beide O en O'. Daarom installeert O poorten aan voor- en achterkant van de garage, die op elk moment open en dicht kunnen gedaan worden. Op het moment dat O de ladder binnen de garage ziet, sluit hij de poorten voor en achter gelijktijdig, zeg op tijdstip $t = t_0$. De lengtegecontraheerde ladder zit nu volgens O op tijdstip t_0 geheel binnen de garage. Volgens O' kan dit nooit gebeuren. Klaarblijkelijk is er een paradox.

De oplossing van de paradox ligt in het relatief begrip van gelijktijdigheid. Beschouw de volgende twee gebeurtenissen: op het tijdstip t_0 dat de poorten dichtgaan is de voorkant van de ladder in de garage op positie x_V (gebeurtenis 1), en de achterkant op positie $x_A < x_V$ (gebeurtenis 2). We hebben dat $\Delta x = x_V - x_A = L$, waarbij L de gecontraheerde lengte van de ladder is,

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \; , \tag{6.9}$$

en L_0 de rustlengte, $L_0 = 5$ meter. Gezien voor O de gebeurtenissen gelijktijdig zijn, geldt $\Delta t = 0$. De tijdsduur volgens O' volgt uit de Lorentz-transformatie,

$$\Delta t' = t'_V - t'_A = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x) = -\frac{v}{c^2}\,\gamma L = -\frac{v}{c^2} L_0 \neq 0 \; . \tag{6.10}$$

Waarnemer O' ziet de twee gebeurtenissen niet op hetzelfde tijdstip, en voor O' gaan de poorten niet gelijktijdig dicht! Aangezien uit (6.10) blijkt dat $\Delta t' < 0$, volgt dat de poort aan de voorkant van de ladder eerst dichtgaat. De achterkant van de ladder is dan volgens O' nog buiten de garage, maar de poort aan die kant is ook nog open.

Als we nu verder aannemen dat de poorten na sluiting vrijwel onmiddelijk terug opengaan, zal voor O' de voorkant van de ladder de garage uitkunnen, de achterkant beweegt de garage in, en pas daarna (bij voldoende hoge snelheid v) gaat de poort aan de achterkant pas dicht. Op deze manier is er dus geen paradox[5].

6.3 De algemene Lorentz-transformatie in 3+1 dimensies

In deze sectie bespreken we de Lorentz-transformaties in drie ruimtelijke dimensies. Ze vervangen de Galilei transformaties in (1.4). Vooraleer we dit doen, beargumenteren we eerst dat er geen Lorentz-contractie optreed in de richtingen loodrecht op de bewegingsrichting. Dit is redelijk makkelijk en gaat als volgt:

Beschouw twee identieke ijzeren staven. De staven, A en B, zijn even lang, en zijn geplaatst op twee verschillende posities op de x-as. De staven staan vertikaal in de richting van de y-as, en hebben op dezelfde hoogte bovenaan een nageltje waarmee een krasje kan gemaakt worden. We laten nu de staven naar mekaar toe bewegen in de richting van de x-as, en plaatsen waarnemers O en O' die met de staven meebewegen, met A en B respectievelijk. De vraag die zich stelt is of er een lengtecontractie optreed in de y-as, dus volgens de lengte-as van de staven. Het antwoord is neen, en het bewijs is uit het ongerijmde. Beschouw waarnemer O die in het ruststelsel van staaf A zit. Staaf B beweegt dan naar A toe. Stel nu dat er Lorentz-contractie is in de y-richting. Het nageltje op staaf B komt dan volgens O onder het nageltje van staaf A door en maakt een krasje, net onder de nagel op staaf A. Omdat staaf B gecontraheerd is, gaat staaf B onder de nagel van staaf A, en staat er op staaf B geen krasje. Omgekeerd, beschouw nu waarnemer O', die staaf B op hem ziet afkomen. Volgens O' zou staaf A dan een lengtecontractie ondergaan, en een krasje net onder de nagel van staaf B plaatsen. Op staaf A is er dan geen krasje. Dit is een contradictie, omdat het in tegenstrijd is met het relativiteitspostulaat. Het besluit is dat er geen lengte-contractie kan zijn loodrecht op de bewegingsrichting.

Met deze informatie kunnen we nu de algemene Lorentz-transformaties bepalen. Beschouw inertiaalwaarnemers O en O', en O' heeft een snelheidsvector $\vec{v}$ ten opzichte van O. Een

[5] Wat er zou gebeuren indien O de poort aan de voorkant na sluiting dicht laat, is een iets ingewikkelder verhaal. De geinteresseerde lezer kan dit verder proberen uit te zoeken, of in de literatuur opzoeken. Er zijn tal van leuke varianten op deze paradox.

gebeurtenis in het ruimtetijd diagram van O geven we coördinaten $(\vec{r}, t)$ en in O' zijn die coordinaten $(\vec{r}', t')$. De Lorentz transformaties geven de relaties tussen de twee coördinaten. Elke vector kunnen we ontbinden in een stuk dat parallel staat aan $\vec{v}$, en het overige stuk dat loodrecht staat op $\vec{v}$. Toegepast op de coördinaatsvectoren $\vec{r}$ en $\vec{r}'$,

$$\vec{r} = \vec{r}_\perp + \vec{r}_{||} \; , \qquad \vec{r}' = \vec{r}'_\perp + \vec{r}'_{||} \; . \tag{6.11}$$

Verder geldt dat $\vec{v} = \vec{v}_{||}$ en $\vec{v}_\perp = 0$.

Op het stuk dat loodrecht staat op $\vec{v}$ is er geen Lorentz-contractie, dus volgt hieruit dat $\vec{r}'_\perp = \vec{r}_\perp$. Het deel dat parallel is aan $\vec{v}$ is één-dimensionaal, en hierop kunnen we de speciale Lorentz-transformatie toepassen. Er gelden dan de volgende regels:

$$\vec{r}'_{||} = \gamma_v \left(\vec{r}_{||} - \vec{v}\, t\right) \; , \qquad \vec{r}'_\perp = \vec{r}_\perp \; , \qquad t' = \gamma_v \left(t - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c^2}\right) \; . \tag{6.12}$$

Merk op dat $\vec{v} \cdot \vec{r} = \vec{v} \cdot \vec{r}_{||}$ omdat het loodrechte deel $\vec{r}_\perp$ inproduct nul heeft met $\vec{v}$, i.e. $\vec{v} \cdot \vec{r}_\perp = 0$. De vergelijkingen in (6.12) heten de algemene, of vier-dimensionale Lorentz-transformaties.

7 Transformaties van snelheden

In het vorige hoofdstuk hebben we de algemene Lorentz-transformaties besproken. Ze geven de relaties weer tussen de ruitmtetijd-coördinaten van inertiaalwaarnemers die bewegen in de vier-dimensionale ruimtetijd. Aan de hand hiervan kunnen we de transformaties van snelheden berekenen. Een snelheid van een bewegend deeltje is immers een aaneenschakeling van gebeurtenissen waarbij de positie van het deeltje in de tijd verandert. De snelheidsvector in het O-stelsel is zoals steeds

$$\vec{u}(t) \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}(t) \; . \tag{7.1}$$

Beschouw nu weer een andere inertiaalwaarnemer O' die ten opzichte van O beweegt met snelheidsvector $\vec{v}$. De postitiecoördinaat kan, net zoals in vorig hoofdstuk, weer ontbonden worden in een loodrecht en parallel stuk, $\vec{r}(t) = \vec{r}(t)_\perp + \vec{r}(t)_{\|}$, en dus ook de snelheidsvector:

$$\vec{u}(t) = \vec{u}_\perp(t) + \vec{u}_{\|}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_\perp}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\|}}{\mathrm{d}t}(t) \; . \tag{7.2}$$

Analoog voor waarnemer O' die de snelheid van het deeltje beschrijft als

$$\vec{u}'(t') = \vec{u}'_\perp(t') + \vec{u}'_{\|}(t') = \frac{\mathrm{d}\vec{r}'_\perp}{\mathrm{d}t'}(t') + \frac{\mathrm{d}\vec{r}'_{\|}}{\mathrm{d}t'}(t') \; . \tag{7.3}$$

Gebruik makende van de Lorentz-transformaties zoeken we nu het verband tussen $\vec{u}\,'$ en $\vec{u}$. Dit is het makkelijkst door de twee delen - parallel en loodrecht - afzonderlijk te behandelen. Het loodrechte stuk is het makkelijkst, en gebruik makende van de kettingregel en het feit dat $\vec{r}\,'_{\perp} = \vec{r}_{\perp}$, volgt dat

$$\vec{u}\,'_{\perp}(t') = \frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'_{\perp}}{\mathrm{d}t'}(t') = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\perp}}{\mathrm{d}t}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}\right)\vec{u}_{\perp}(t) \ . \tag{7.4}$$

Uit de Lorentz-transformatie voor de tijdscomponent berekenen we

$$\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t} = \gamma_v\left(1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{c^2}\right) \ , \tag{7.5}$$

zodat uiteindelijk

$$\vec{u}\,'_{\perp}(t') = \frac{\vec{u}_{\perp}(t)}{\gamma_v\left(1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{c^2}\right)} \ . \tag{7.6}$$

Merk op dat in het rechterlid ook $\vec{u}_{\parallel}$ voorkomt, aangezien $\vec{v}\cdot\vec{u} = \vec{v}\cdot\vec{u}_{\parallel}$. De loodrechte stukken van de snelheidsvectoren transformeren dus niet onder mekaar zonder ook het parallele stuk $\vec{u}_{\parallel}$ te kennen.

Voor $\vec{u}_{\parallel}$ geldt een soortgelijke berekening, en men vindt makkelijk

$$\vec{u}\,'_{\parallel}(t') = \frac{\vec{u}_{\parallel} - \vec{v}}{\left(1 - \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{c^2}\right)} \ . \tag{7.7}$$

In het speciale geval dat $\vec{u}$ en $\vec{v}$ parallel zijn, is $\vec{u}_{\perp} = 0$ en vinden we de wet van de optelling van de snelheden in één dimensie terug, zie (5.7).

Aan de hand van deze resultaten kunnen we berekenen hoe de grootte van de snelheid $u^2 \equiv \vec{u}\cdot\vec{u}$ transformeert. Het resultaat ziet er het simpelst uit, uitgedrukt in de gamma-factor,

$$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \ , \qquad u^2 = c^2(1 - \gamma_u^{-2}) \ . \tag{7.8}$$

Uit een ietwat lange berekening (zie werkcollege) volgt dan de transformatie van de gamma-factor

$$\gamma_{u'} = \gamma_u\gamma_v\left(1 - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{c^2}\right) \ . \tag{7.9}$$

Deze formule is een belangrijk resultaat dat gebruikt zal worden volgend hoofdstuk. Merk op dat wanneer $\vec{u} = \vec{v}$, er volgt dat $\gamma_{u'} = 1$. Dit klopt met de verwachting aangezien in dit geval het deeltje met waarnemer O' meebeweegt,

8 Energie en impuls

8.1 Relativistische energie en impuls

In de klassieke, Newtoniaanse, mechanica definiëren we de begrippen energie en impuls van een deeltje via de relaties

$$\vec{p} = m\vec{u} \ , \qquad E = \frac{1}{2}m\vec{u}^2 \ , \tag{8.1}$$

waarbij m de massa van het deeltje is en $\vec{u}$ de snelheidsvector. Indien het deeltje onderhevig is aan een uitwendige kracht, veranderen snelheid en impuls als

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a} \ , \tag{8.2}$$

met versnelling $\vec{a} = \mathrm{d}\vec{u}/\mathrm{dt}$. Wanneer er geen externe krachten zijn is het impuls behouden. Bijvoorbeeld, bij botsingsprocessen tussen twee deeltjes geldt de behoudswet

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4 \ , \tag{8.3}$$

waarbij $\vec{p}_3$ en $\vec{p}_4$ de impulsen zijn van de twee uitgaande deeltjes.

Ook is er bij elastische botsingen energiebehoud:

$$E_1 + E_2 = E_3 + E_4 \ . \tag{8.4}$$

Deze behoudswetten zijn invariant onder de Galilei-transformaties (zie Hoofdstuk 1 en het bijbehorende werkcollege).

Wanneer we op een deeltje met een constante kracht werken, zeg in de x-richting, is de versnelling ook constant, en verandert de snelheid lineair in de tijd,

$$u(t) = a\,t + u_0 \ , \tag{8.5}$$

waarbij u_0 de beginsnelheid is, en we alles in één dimensie laten bewegen, volgens de x-as. Het is nu duidelijk dat er geen bovengrens is aan de snelheid, en na lang genoeg wachten zal de snelheid groter zijn dan de lichtsnelheid, $u > c$. Dit is in strijd met de relativiteitstheorie, waarbij ten alle tijden $u \leq c$. Daarom zullen de begrippen van impuls en energie moeten veranderd worden. Die verandering gaan we bepalen op zo'n manier dat de behoudswetten van energie en impuls blijven gelden.

Gezien we vaak de gamma-factor tegenkomen in de relativiteitstheorie maken we de volgende ansatz voor een nieuwe definitie van het impuls:

$$\vec{p} = mf(\gamma_u)\vec{u} \ , \tag{8.6}$$

met f een functie die we gaan bepalen uit de eis van behoud van impuls. Analoog voor de energie. Deze is een scalaire functie die afhangt van de grootte van de snelheid, en niet de richting van de snelheidsvector $\vec{u}$. Omdat $u^2 = c^2(1-\gamma_u^{-2})$ kunnen we elke functie van u^2 schrijven als een functie van γ_u. We maken dan de ansatz voor de relativistische energie

$$E = mc^2 g(\gamma_u)\ . \tag{8.7}$$

We eisen nu dat behoud van energie en impuls blijft gelden voor alle inertiaalwaarnemers O en O'. Dit wordt uitgewerkt in het dictaat van de Wit (zie Hoofdstuk 11) door twee-deeltjesbotsingen te bestuderen in verschillende inertiaalstelsel. We geven hier het resultaat van de berekening:

$$f(\gamma_u) = c_1\gamma_u\ , \qquad g(\gamma_u) = c_2\gamma_u + c_3\ , \tag{8.8}$$

voor willekeurige constanten c_1, c_2, c_3. Deze constanten kunnen bepaald worden in de Newtoniaanse limiet voor lage snelheden, waarvoor de relaties (8.1) gelden. We vinden dan dat

$$c_1 = 1\ , \qquad c_2 = 1\ . \tag{8.9}$$

De factor c_3 is niet bepaald, en draagt bij tot het constante gedeelte van de energie, onafhankelijk van de snelheid. We kiezen $c_3 = 0$ omdat zo'n constante bijdrage niet fysisch meetbaar is. Het uiteindelijke resultaat voor de relativistische impuls en energie is dan

$$\vec{p} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\ , \qquad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\ . \tag{8.10}$$

Merk op dat voor $\vec{u} = 0$, er nog steeds een eindige energie overblijft (dit is omdat we $c_3 = 0$ gekozen hebben); we noemen dit de rustenergie,

$$E_0 = mc^2\ . \tag{8.11}$$

Tot slot bekijken we opnieuw wat er gebeurt met een deeltje waarop een constante kracht werkt, en berekenen we of het deeltje blijft versnellen tot snelheden groter dan de lichtsnelheid. We moeten nu echter de nieuwe definities voor impuls gebruiken. Voor een constante kracht F krijgen we nu, wederom in één dimensie,

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = F \qquad \Longrightarrow \qquad p(t) = Ft + p_0\ . \tag{8.12}$$

Zonder verlies aan algemeenheid kunnen we aannemen dat op $t = 0$ het deeltje impuls nul heeft (in rust is), zodat $p_0 = 0$. Het is makkelijk de berekening over te doen voor $p_0 \neq 0$. Voor $p_0 = 0$ en $p = m\gamma_u u$ berekenen we nu

$$m\gamma_u u = Ft \qquad \Longrightarrow \qquad u = c\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{m^2c^2}{F^2t^2}}} < c\ . \tag{8.13}$$

We zien nu dat $u < c$ voor alle t, en dat in de limiet $t \to \infty$, de snelheid de lichtsnelheid benadert, $u \to c$. Dus door een constante kracht te blijven uitoefenen op een deeltje kan zijn snelheid nog steeds niet hoger dan de lichtsnelheid!

8.2 Lorentz-transformaties van energie en impuls

De begrippen energie en impuls spelen een belangrijke rol in de relativiteitstheorie, net zoals tijd en ruimte. Om de analogie te zien, berekenen we hoe energie en impuls transformeren onder Lorentz-transformaties. Eerst herinneren we de definities, uit (8.10):

$$\vec{p} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \ , \qquad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \ . \tag{8.14}$$

We ontbinden nu de impulsvector in een stuk loodrecht en parallel aan de bewegingsrichting van een andere inertiaalwaarnemer $\mathcal{O}'$ die van $\mathcal{O}$ wegbeweegt met snelheidsvector $\vec{v}$,

$$\vec{p} = \vec{p}_\perp + \vec{p}_\parallel \ , \qquad \vec{p} \cdot \vec{v} = 0 \ . \tag{8.15}$$

Gebruik makende van de transformatie van snelheden (7.6), (7.7) en (7.9) berekenen we nu dat

$$\vec{p}_\parallel{}' = \gamma_v \left(\vec{p}_\parallel - \frac{\vec{v}}{c^2} E \right) \ , \qquad \vec{p}_\perp{}' = \vec{p}_\perp \ , \qquad E' = \gamma_v \left(E - \vec{v} \cdot \vec{p} \right) \ . \tag{8.16}$$

Merk op dat de grootheden $\vec{p}$ en E/c op precies dezelfde manier transformeren als $\vec{r}$ en ct. Dat betekent dat daarom $\vec{p}^2 - \frac{E^2}{c^2}$ een Lorentz-invariante grootheid is, net zoals $\vec{r}^2 - c^2t^2$. Expliciete berekening geeft dat

$$\vec{p}^2 - -\frac{E^2}{c^2} = -m^2c^2 \ , \tag{8.17}$$

inderdaad onafhankelijk van de inertiaalwaarnemer. We kunnen deze relatie omschrijven als

$$E = \sqrt{\vec{p}^2c^2 + E_0^2} \ , \tag{8.18}$$

waarbij $E_0 = mc^2$, zoals voorheen. De relatie tussen de energie en impuls voor een deeltje noemen we ook wel een dispersie-relatie. Merk op dat deze relatie in de relativiteitstheorie een vierkantswortel van het kwadraat van het impuls bevat, terwijl in de klassieke mechanica we een kwadratische relatie hebben:

$$\text{Newton} \ : \qquad E = \frac{1}{2} m\vec{u}^2 = \frac{\vec{p}^2}{2m} \ . \tag{8.19}$$

9 Massaloze deeltjes

Een deeltje met impuls $\vec{p}$ en energie E heeft een snelheid gelijk aan

$$\vec{u} = \frac{c^2\vec{p}}{E} \; , \tag{9.1}$$

zoals volgt uit (8.10). Wanneer het deeltje beweegt met de snelheid van het licht, $u \equiv |\vec{u}| = c$ krijgen we uit (9.1) de relatie

$$E = cp \; , \qquad p \equiv |\vec{p}| \; . \tag{9.2}$$

Dit is een lineaire dispersierelatie. In vergelijking met (8.18) leiden we hieruit af dat deeltjes die met de lichtsnelheid bewegen massaloos moeten zijn,

$$u = c \qquad \Longleftrightarrow \qquad m = 0 \; . \tag{9.3}$$

Echter, de formules voor de definitie van impuls en energie (8.10) zijn niet goed gedefinieerd wanneer $u = c$, en beide grootheden divergeren omdat $\gamma = \infty$. Toch weten we dat er in de natuur massaloze deeltjes bestaan, zoals het foton, of het (nog te ontdekken) graviton, en voor lange tijd dacht men dat ook neutrino's massaloos waren. Hoe kunnen we deze deeltjes dan een energie en impuls toekennen ?

Laten we nog even doorrekenen met onze formules, en aannemen dat een lineaire dispersierelatie (9.2) moet gelden. Uit de Lorentz-transformatie van de energie vinden we dan

$$E' = \gamma_v \left(E - \vec{v} \cdot \vec{p}\right) = \gamma_v(1-\beta)E = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}E \; , \tag{9.4}$$

waarbij we voor het gemak aangenomen hebben dat $\vec{v}$ en $\vec{p}$ parallel zijn, met andere woorden, de waarnemener O' beweegt parallel aan het massaloos lichtdeeltje.

Merk nu op dat de energie van zo'n massaloos deeltje op dezelfde wijze transformeert als een lichtgolf volgens het relativistische Doppler-effect (zie (3.24) in Hoofdstuk 3)! Dit zette Einstein er toe aan om een massaloos deeltje te relateren met een golf die met de lichtsnelheid beweegt, en er een energie aan toe te kennen evenredig aan de frequentie. De evenredigheidsconstante is de constante van Planck, die uitgelegd wordt in het vak Kwantummechanica. Er volgt dan de beroemde Einstein-Planck relatie

$$E = h\,f \; , \qquad h = 6,62606957 \times 10^{-34} J \cdot s \; . \tag{9.5}$$

Om een massaloos deeltje te relateren aan een golf moet ook het impuls van het deeltje gerelateerd zijn aan de golflengte van de golf. Dit vinden we ook omdat uit (9.2), (9.5), en de golflengte van licht $\lambda = c/f$ volgt

$$p = \frac{h}{\lambda} \; . \tag{9.6}$$

10 Massa en krachten

In voorbereiding. Dit is een kort hoofdstuk en de tekst volgt hier (wederom) letterlijk het Engelstalige dictaat van de Wit.

11 Speciale Relativiteitstheorie - Werkcolleges

Hierbij een set van opgaven. Ook deze opgaven worden jaarlijks bijgewerkt. Er komen vaak nieuwe opgaven bij, met name opgaven die in vorige jaargangen op het tentamen of als inleveropgaven werden gevraagd.

Deze tekst zal met enige regelmaat bijgewerkt worden. De opgaven zijn opgesteld in het Engels.

Problem Sheet 1

1. Vectors and scalars

In Newtonian mechanics, space is described by the three-dimensional vector space $\mathbb{R}^3$. Vectors define a direction and a length. They are usually specified in terms of the components defined by the projections onto a Cartesian coordinate system consisting of three mutually orthogonal axes. Hence vectors can be specified as three-dimensional arrays $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. The length of a vector in $\mathbb{R}^3$ is denoted by

$$||\vec{v}|| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \ . \tag{11.1}$$

a) Draw the vector $(1, 0, 0)$ in a Cartesian coordinate system. What is its length ?

b) Draw the vector $(1, 1, 0)$ in a Cartesian coordinate system. What is its length ?

c) Draw the vector $(1, 1, 1)$ in a Cartesian coordinate system. What is its length ?

One can take linear combinations of vectors and there is a so-called *inner product*; for two vectors, $\vec{v}$ and $\vec{w}$, the inner product is defined by $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$.

d) Prove that the square of the length of a vector is equal to the inner product of the vector with itself.

e) Compute the inner product between $(1, 2, 2)$ and $(1, -3, 1)$. Compute also the inner product between $(1, 1, 0)$ and $(-1, 1, 0)$. Draw these last two vectors and show that they are orthogonal.

f) Show that the inner product of two vectors is equal to the product of their lengths times the cosine of the angle between them. Therefore, two vectors are orthogonal to each other if and only if their inner product vanishes. Argue that the inner product is invariant under uniform rotations of the vectors (or, equivalently, under rotations of the coordinate frame). Quantities that are invariant under rotations are often called *scalars*.

2. Quantities conserved under Galilei transformations

Consider first a particle with mass m and velocity vector $\vec{u}$. The kinetic energy of such a particle is given by

$$E = \frac{1}{2} m u^2 \ , \qquad u^2 \equiv \vec{u} \cdot \vec{u} \ . \tag{11.2}$$

a) Show that the kinetic energy of a particle of mass m transforms under a Galilei transformation - see equation (1.4) in the lecture notes - as

$$E \to E' = E - \vec{v} \cdot \vec{p} + \frac{1}{2} m v^2 \ , \tag{11.3}$$

where $\vec{p} = m\vec{u}$ is the momentum of the particle.

Consider now two particles with masses m_1 and m_2 and momenta $\vec{p}_1$ and $\vec{p}_2$, respectively, which collide and produce two particles of mass m_3 and m_4 and momenta $\vec{p}_3$ and $\vec{p}_4$. We assume that energy and momenta are preserved in this process, i.e.

$$E_1 + E_2 = E_3 + E_4 \ , \qquad \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4 \ . \tag{11.4}$$

b) Show that these conservation laws also hold in another inertial frame by applying a Galilei transformation, provided that the total mass is conserved in the process. As we shall see later, momentum and energy conservation continue to hold in the theory of special relativity. However, the mass will no longer be conserved!

3. Doppler effect

In the lecture notes, we discussed the Doppler effect. Denote the propagation speed of waves through a medium by v_s, and the frequency by f. When the source is receding with velocity v from an observer who is at rest with respect to the medium, the observed frequency f' is given by Doppler's law (see lecture notes, but here we denote frequencies by f instead of the Greek letter ν)

$$f' = \left(\frac{1}{1 + v/v_s} \right) f \ . \tag{11.5}$$

a) What does Doppler's law look like if the source is approaching (instead of receding) the observer with velocity v ? How does Doppler's formula (11.5) change? What happens then if $v = v_s$?

On the other hand when the observer is receding with velocity v from a source which is at rest with respect to the medium, then the expressions for the observed frequency is rather different and, according to Doppler, given by

$$f' = f \left(1 - \frac{v}{v_s} \right) \ . \tag{11.6}$$

b) What happens at $v = v_s$?

c) Try to become a physicist and discover your own law! Find a formula that combines the effect of both a moving source (with velocity v_1 relative to the medium) and a moving observer (with velocity v_2 relative to the medium). Consider the four different situations of receding/approaching observer and source. Give arguments why your formula is correct.

Problem Sheet 2

1. The light-clock.

Consider two parallel mirrors. In the (x, y) plane, they are located at $y = 0$ and $y = l$. A light signal is traveling between the two mirrors, up and down along the y-axis. Consider an observer O at rest with respect to the mirrors.

a) What is the time, Δt, measured by O for the light signal to make a full period ?

Consider now an observer O' who moves along the x-axis with constant speed v. Assume (what may sound obvious) that O' measures the same length between the two mirrors, so $l' = l$.

b) Using the Galilei transformation from Newtonian mechanics, what is the time measured by O' for the light signal to make a full period? (Draw a schematic picture to illustrate your logic) Compare this with the time that observer O measures.

c) Now use the light-postulate, namely that $c' = c$. Compute again the period $\Delta t'$ and compare it to Δt, by writing it as $\Delta t' = \gamma \Delta t$, for some value of γ. Check that $\gamma > 1$. Interpret your results.

2. An exercise in algebra.

Consider, for any value of the parameter $0 \leq \beta < 1$ (in the lecture notes $\beta = v/c$, with $v < c$), the quantities

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \ , \qquad k = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \ . \tag{11.7}$$

a) Express β in terms of γ.

b) Express β in terms of k.

c) Express k in terms of γ.

d) Express γ in terms of k.

3. Other than light signals. (Exersice 3.1 in the lecture notes of dW)

Consider a projectile (for instance a tennis ball) of mass μ, moving with speed c in the direction of a car of mass m moving with speed v. Both move in the positive x-direction. Assume that everything is happening in one dimension, and that collision will take place, so $c > v > 0$. After the collision, the speeds of the tennis ball and car are denoted by c' and v', respectively.

a) Show that momentum conservation implies $\mu(c-c') = -m(v-v')$, and energy conservation (the collision is assumed to be elastic) requires that $\mu(c^2-c'^2) = -m(v^2-v'^2)$. Furthermore, derive from this the equation $c + c' = v + v'$.

b) Prove that this leads to the following result for the velocity of the projectile c' after the collision,

$$c' = 2v - c + \frac{2\mu}{m+\mu}(c-v) \ . \tag{11.8}$$

c) We are interested in the case that reflection takes place, so c' should be negative. This only happens for large enough velocities c. Show that reflection ($c' < 0$) implies that the velocity c obeys

$$c > \left(\frac{2m}{m-\mu}\right) v = \frac{2v}{1-\frac{\mu}{m}} \ . \tag{11.9}$$

Here, we assumed that $\mu < m$ (which is the case for a tennis ball and a car!).

d) Argue that, for $\mu \ll m$, the velocity c' after the collision is at most equal to $2v - c$ rather than equal to $-c$ as for light signals. Light, seen as particles or little wave packets, therefore seems to behave very different from Newtonian mechanics.

4. Taylor expansions - an introduction.

Consider the expansion, for an arbitrary number $0 \leq \beta < 1$,

$$(1-\beta)^{-1} = 1 + \beta + \beta^2 + \beta^3 + \cdots \ . \tag{11.10}$$

a) Show that this equation holds by multiplying the left and right hand side with $1-\beta$. What is wrong with values $\beta > 1$?

b) Consider now the special value $\beta = 1/2$. Compute the left hand side, and compare it with the right hand side when you terminate the infinite series at β^3. Do the same for $\beta = 1/4$ and $\beta = 3/4$. Does the expansion work better for small or for large β ?

Subsequently consider the expansion

$$\sqrt{1+\beta} = 1 + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{8}\beta^2 + \frac{1}{16}\beta^3 + \cdots \ . \tag{11.11}$$

c) Show that this equation holds by taking the square on both sides and comparing terms up to β^3.

d) Consider now the special values $\beta = 1/2$ and $\beta = 1$. Compute the left hand side (use a calculator), and compare it with the right hand side when you terminate the infinite series at β^2. Which value of β gives you the best approximation ?

Problem Sheet 3

1. The light-clock - part II.

Consider two parallel mirrors in the (x, y) plane, one located at $x = 0$ and the other at $x = l$, and a light signal traveling between the two mirrors, along the x-axis. Denote the length between the mirrors by l, for an observer O at rest with respect to the mirrors. Again, as in the previous problem sheet, this system can be used as a light-clock.

a) What is the time, Δt, measured by O for the light signal to make a full period ?

Consider now this entire system (clock plus observer) moving with respect to an observer O' along the x-axis with constant speed v. This exercise is similar to the one in Problem sheet 2, with one important difference: namely that the mirrors are moving in the same direction as the light signal itself, instead of perpendicular to it.

b) Using Newton's theory, show that the time measured by O' for the light signal to make a full period is equal to that of O; in other words, show that $\Delta t' = \Delta t$. Do this by computing and adding the time intervals before and after the reflection, and assume again that $l' = l$.

c) Now use the light-postulate, namely that $c' = c$. Draw a spacetime diagram for the light-clock in the (ct', x') plane. Indicate in the figure how $\Delta t' = \Delta t'_1 + \Delta t'_2$, where these are the time intervals for the light signal to travel one way, and back, respectively. Denote furthermore the length between the mirrors, as seen by O', by l'. We will no longer assume that $l' = l$.

d) Show that

$$\Delta t'_1 = \frac{l'}{c}\frac{1}{1 - v/c} \ . \tag{11.12}$$

e) Show that

$$\Delta t'_2 = \frac{l'}{c}\frac{1}{1 + v/c} \ . \tag{11.13}$$

Show furthermore that from this, it follows that

$$\Delta t' = \frac{2l'}{c}\gamma^2 \ , \qquad \gamma^2 \equiv \frac{1}{1 - v^2/c^2} \ . \tag{11.14}$$

f) Assume now that moving clocks are time-dilated in the same way, independent of whether the light signal moves along the direction of the moving observer, or perpendicular to it as in Problem Sheet 2. In other words, use again that $\Delta t' = \gamma \Delta t$. Derive then that O' measures a length between the mirrors which satisfies

$$l' = \gamma^{-1}\, l \; . \tag{11.15}$$

Interpret your results.

2. Doppler effect.

In the lecture, we have seen the formulas for the relativistic longitudinal Doppler effect ($\beta \equiv v/c$):

$$\lambda = \lambda' \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\;, \qquad f' = f\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\;, \tag{11.16}$$

where (f, λ) are frequency and wavelength as measured by the source, and (f', λ') as measured by the moving observer, moving with speed v *towards* the source[6].

a) How fast should a car drive to see a red traffic light (wavelength 650 nanometer) as green (530 nanometer) ?

b) At the highway is placed a radar-system to check the speed of cars. A signal is sent out with a frequency of 2400 Megahertz, and the "echo" (the returning signal) of a car approaching is measured with a frequency shift of 600 Hertz. Determine the speed of the car in kilometers per hour.

c) A spaceship is traveling from Earth to Mars with a constant speed $v = c/11$. At some time, it sends out a radar signal with a frequency 2500 Megahertz. What is the frequency measured by the "Marsmen" ? What is the frequency of the (perfectly) reflected signal back on the spaceship ?

3. Taylor expansions - an introduction, part II.

Consider the expansions (see previous problem class), for small β,

$$f(\beta) \equiv (1-\beta)^{-1} = 1 + \beta + \beta^2 + \beta^3 + \cdots \;, \tag{11.17}$$

and

$$g(\beta) \equiv \sqrt{1+\beta} = 1 + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{8}\beta^2 + \frac{1}{16}\beta^3 - \cdots \; . \tag{11.18}$$

[6] In the lecture notes, the observer is moving *away* from the source, so we must substitute $v \to -v$.

a) Show that the coefficients in front of β^n corresponds to the $n-$th derivatives of the functions f and g at $\beta = 0$, divided by $n! = n(n-1)(n-2)...1$. Do this by checking explicitly the cases $n = 1, 2, 3$ first.

b) Derive a Taylor expansion of the function

$$k(\beta) = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \,, \tag{11.19}$$

using the expansions of the functions f and g. Do this up to order β^2. Check again that the coefficients in front of β and β^2 corresponds to the first and half of the second derivatives of k at $\beta = 0$.

c) Similarly, derive a Taylor expansion, for small $\beta = v/c$, of the function

$$\gamma(\beta) = \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} \,. \tag{11.20}$$

Problem Sheet 4

Note

As already seen in the previous problem sheet, and announced in the lecture, in special relativity there is the notion of length contraction. Consider an object/distance of length l in the restframe. Now consider an observer O' who is moving with constant speed v with respect to this object. The length that O' finds is smaller than l and given by

$$l' = \frac{l}{\gamma} , \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} , \tag{11.21}$$

This formula is needed for some of the problems below.

1. Twin travel.

This is exercise 5.1 from the lecture notes about the twin paradox.

- Draw a spacetime diagram of the trip of Adventurer, from earth to some hypothetical nearby star[7] and back, based on the restframe of Caretaker, who stays on earth.
- Argue that one can make a similar diagram based on Adventurers restframe, but that this does not correspond to a given inertial frame. Therefore, draw two other spacetime diagrams, one associated with the restframe of Adventurer immediately after his departure, and another one based on his restframe on the way back.

To be specific with the numbers, draw the diagrams for a speed of $v = 0,66c = \frac{2}{3}c$. Suppose that in the restframe of the Caretaker, the entire journey takes 8 years.

a) What is the distance between Earth and *Gamma Centauri*, measured in lightyears, as measured in the Caretakers restframe ?

b) What is the distance between Earth and *Gamma Centauri* according to Adventurer ?

[7] Let us call this hypothetical star *Gamma Centauri*. In reality, the closest start to us, apart from the Sun, is *Proxima Centauri*. It is at a distance of approximately 4,2 lightyears. A lightyear (lyr) is the *distance* that light travels in one year. You can easily find that 1 lyr=$9,46 \times 10^{15}$ meter. Proxima Centauri is located very close to a binary star, *Alpha Centauri A and B*, about $0,237 \pm 0,011$ lyr. This is about 15.000 times the distance between Sun and Earth, as the interested reader may verify.

c) How long does the journey take according to the Adventurer? What will be the age difference when the two of them come together ?

2. Pions and time dilatation.

Pions are elementary particles that are made of two quarks. The precise properties of these elementary particles are not important for this exercise, except that the half-life (de "halfwaardetijd" of "halveringstijd") for charged pions in the restframe is $t_{\frac{1}{2}} = 1,8 \times 10^{-8}$ second. This means that, after a time $t_{\frac{1}{2}}$, half of the pions have decayed [8].

After pions are produced, for example in some particle accelerator experiment, they travel through a long bundle pipe of length L to reach a detector at the end of the pipe. To make sure half of the pions reach the detector, one needs to produce the pions with a speed close to the speed of light. Let us denote the speed by $v = (1 - \delta)c$, with δ small.

a) Show that, in good approximation, one has

$$\delta = \frac{1}{2}\Big(\frac{ct_{\frac{1}{2}}}{L}\Big)^2 . \tag{11.22}$$

b) Give a numerical value for δ when $t_{\frac{1}{2}} = 1,8 \times 10^{-8}$ second and $L = 810$ meter. Try not to use a calculator.

c) What is the length L' according to the pions ?

3. Length contraction and time dilation.

a) Within the linear particle accelerator at Stanford ("SLAC"), 3,2 kilometers long, electrons are accelerated to a speed $v = 0,9999995c$, which you can assume to be constant over the 3,2 kilometers. What is the length of the accelerator as seen by the electrons ?

b) An airplane flies over the atlantic ocean, with a speed of 1000 km/h. The distance is 4800 km. How long does the flight take for an observer at rest? How long does it take according to the pilot ? What is the time difference ?

[8] A positively charged pion, denoted by π^+, most often decays into an anti-muon (the heavier version of the positron), and a muon-neutrino, $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$. Sometimes, however, it decays into a positron and an electron-neutrino.

4. Space and time.

Two events occur at the same place in the laboratory reference frame, and are separated in time by 3 seconds. An observer in a moving "rocket" frame measures that the time difference between the two events is 5 seconds.

a) What is the speed of the rocket ?

b) Draw the spacetime diagrams, both in the laboratory and rocket frame.

c) What is the spatial distance between the two events, as seen from the rocket ?

d) Verify that the "spacetime intervals" for both observers are the same, i.e.

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 \ . \tag{11.23}$$

This relation will turn out to be true in general in special relativity, as we discuss in the next lectures.

Problem Sheet 5

1. Time dilation from the Lorentz transformation

Solve exercise 8.1 from the dW-lecture notes.

2. Length contraction from the Lorentz transformation

Exercise 8.2 from the dW-lecture notes: verify the statements.

3. Electron signals

Solve exercise 8.3 from the dW-lecture notes.There is one typographical error in one of the formulas: find it!

4. Space and time

Show that the relation

$$c^2t^2 - x^2 = c^2t'^2 - x'^2 \ , \tag{11.24}$$

holds for any event observed by two inertial observers. Prove this by using the Lorentz transformations. Furthermore, use (11.24) to show that the time interval between any two events is the smallest in the frame in which the events have the smallest spatial distance.

Problem Sheet 6

1. Simultaneity is relative - Gelijktijdigheid is relatief.

A person O sits in the middle of a train. From there he sends two light signals, one to the front side, one to the back side. Since he sits in the middle, the two light signals arrive at the front and back side *simultaneously*. Consider now that the train is moving with respect to some observer O', in the same direction of the propagation of the light signals.

a) Draw the spacetime diagrams for O and O'. Mark the two events when the light signals hit the front and back side of the train.

b) Are the two events, simultaneous for O, also simultaneous for O' ? If not, compute the time difference from the Lorentz transformations, in terms of the speed and length of the train.

2. Causality

Consider two events I and II, and II is caused by I. (For example: I = press the light switch, II = the light bulb goes on). In the rest frame O, we therefore have that $t_{II} > t_I$ and thus $\Delta t > 0$. We can ask ourselves if O' also finds causality, which means that O' should have $\Delta t' > 0$. Any sensible physical theory should obey this principle. However, from the Lorentz transformation, this does not automatically follow! To answer the question,

a) Compute the time difference between the two events in the frame of O', and show that

$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x) \ . \qquad (11.25)$$

So in principle, even if $\Delta t > 0$, $\Delta t'$ could be negative if Δx is large enough. Causality would then be violated.

b) Show that causality is preserved in O' if the two events satisfy the Lorentz invariant condition

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 \geq 0 \ . \qquad (11.26)$$

Argue that this implies that no signal is allowed to move faster than the speed of light. In other words, a theory in which signals or objects can move faster than the speed of light, would violate causality.

3. Transformation of velocities

Prove equation (10.12) of the dW-lecture notes, namely

$$\gamma_{u'} = \gamma_u \gamma_v \Big(1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c^2}\Big) \ . \tag{11.27}$$

As a warm up, you may first do this in one spatial dimension. In three dimensions, follow the hints given in the dW-lectures notes.

4. Special Lorentz transformations

Consider the special Lorentz transformation

$$x' = \gamma(x - vt) \ ; \qquad t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \ . \tag{11.28}$$

This holds for two inertial observers O and O' moving with respect to each other with velocity v. In this exercise, we want to invert this relation and express the spacetime coordinates (t, x) used by O in terms of (t', x').

a) Based on the postulate of relativity, determine what the relation must be.

b) Compute now explicitly what this relation is, by inverting the equations (11.28).

Consider now three inertial observers O_1, O_2 and O_3, which obey the Lorentz transformations

$$\begin{aligned} x_2 &= \gamma_{v_{21}}(x_1 - v_{21}t_1) \ ; \qquad & t_2 &= \gamma_{v_{21}}(t_1 - \frac{v_{21}}{c^2}x_1) \ , \\ x_3 &= \gamma_{v_{32}}(x_2 - v_{32}t_2) \ ; \qquad & t_3 &= \gamma_{v_{32}}(t_2 - \frac{v_{32}}{c^2}x_2) \ , \end{aligned} \tag{11.29}$$

where v_{21} is the velocity of O_2 with respect to O_1 and v_{32} is the velocity of O_3 with respect to O_2.

c) Rederive the relativistic law for the addition of velocities by evaluating $\Delta x_3/\Delta t_3$.

d) Compute now from (11.29) the Lorentz transformation between O_3 and O_1. [Hint: you may want to use an identity like (11.27) on your way].

Problem Sheet 7

1. Collisions in Newtonian Mechanics.

Consider an elastic collision of two particles with equal mass in a two-dimensional plane. Denote the velocities of the incoming particles by $\vec{v_1}$ and $\vec{v_2}$, and the outgoing particles after collision by $\vec{w_1}$ and $\vec{w_2}$.

a) Write down the equations that express the conservation of energy and momentum. Proof that, in any given frame, it follows that

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 \ . \tag{11.30}$$

b) We can always choose a frame O in which particle 2 is at rest before the collision. At which angles can the particles scatter after collision ? We can furthermore choose the x-axes along the direction of incoming particle 1, so that $\vec{v_1} = (v, 0)$, with $v > 0$. Show then that the x-component of its velocity after scattering is non-negative. In other words, there is no backscattering possible.

c) Now go to the center of mass frame O'. The center of mass, for two particles of equal mass, is defined by the position vector

$$\vec{X} = \frac{1}{2}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \ . \tag{11.31}$$

Show that the velocity of the center of mass is conserved, so equal before and after the collision. Draw the picture of the collision process in both the frames of O and O'.

2. Rest mass

Compute the energy of a gram of matter, using $E_0 = mc^2$. Express your answer in Joule. Compare this to the energy extracted from a maximally fueled airplane. E.g. for the largest passenger airliner in the world, the A380, the energy which is produced from a full tank is about 10^{13} Joule.

3. Relativistic collisions in one dimension

Consider two identical particles of equal mass, moving on a line. We will again consider a frame in which particle 2 is at rest. Particle 1 moves towards particle 2 such that collision will take place. In this exercise, we want to compute the velocities of the two particles after the collision. First of all, can you guess the answer based on intuition or knowledge of Newtonian mechanics ? Deriving the answer is however not completely straightforward, so we split it up in several steps:

a) Write down the conditions for energy and momentum conservation. Write it in a form in which only γ-factors appear. To do this, first prove the relation

$$u\gamma_u = c\sqrt{\gamma_u^2 - 1}\ . \tag{11.32}$$

b) Eliminate the gamma-factor of one of the outgoing particles in terms of the others. This is easily done by looking at energy conservation.

c) Substitute your answer in the equation for momentum conservation, and solve for the gamma-factors of the other particles in terms of the incoming particle. This becomes a simple relation which you can subsequently solve for the velocities. What is your answer ?

d) To get the answer for the situation in which particle 2 is not at rest, perform a Lorentz transformation on the velocities. What are the velocities of the outgoing particles, when the incoming particles have velocities u_1 and u_2?

Problem Sheet 8 - Special Relativity

Proeftentamen

1. Clocks.

Consider two inertial observers, O and O', with corresponding gamma-factor $\gamma = 5/4$ (the speed is directed along the x-axes). Both observers have a clock, the one of O positioned at $x = 1$, the one of O' at $x' = 0$. O' passes O at $t = t' = 0$, and at some later time, O' passes the clock of O. What is then the time on the clock of O, and what is the time on the clock of O' ? Answer this question in four different, but equivalent ways:

a) By using the Lorentz transformations.

b) By using the Lorentz contraction.

c) By using time dilation (first think about where the γ-factor should be in the relation between t and t').

d) By using the Lorentz invariant $x^2 - c^2t^2$.

2. Rocket

A rocket of length l_0 has a speed v with respect to an observer O along the x-axes. The rocket approaches O and the head of the rocket passes O at $t = t' = 0$. At that moment, O switches on a light bulb, and so light signals are sent out along the x-direction. In the rocket, an observer O' is sitting at the back of the rocket.

a) At what time t' does the light reach the observer O' at the back of the rocket ?

b) What time is it then according to the clock at O ?

c) At what time t' does O' pass O, according to his own clock ?

d) What time is it then according to the clock at O ?

3. The first lord of the rings

At Cern in Geneva, the old accelerator ring made in the 70's, the SPS (Super Proton Synchrotron), accelerates protons until they have an energy of 400 GeV (Giga-electronVolt; 1 GeV=1000 MeV). Protons have a rest mass of 938 MeV (Mega-electronVolt, 1 MeV=10^6 eV), and the SPS ring is 7 kilometers long [9]. You can actually ignore the fact that the accelerator is a ring, and treat the problem as if the protons are moving on a straight trajectory.

a) Compute the gamma-factor γ, and also $1 - \beta$ in good approximation.

b) Compute the time for the protons to complete the 7 kilometers, according to the laboratory frame.

c) Compute the time for the protons to complete the 7 kilometers, according to the rest frame of the protons.

4. Pion decay

A neutral pion moves in the laboratory along the x-axis and decays into two photons (lightparticles). The energy E of the pion is twice its rest-energy E_0, with $E_0 = 135$ MeV (Mega-electronVolt).

a) What is the speed of the pion, relative to the speed of light ?

b) Compute the energy of the two photons, assuming that they are emitted along the x-axis in opposite directions.

12 Extra Opgaven

References

[9]The SPS is still used nowadays to accelerate protons, before injecting them into the larger ring, the LHC (Large Hadron Collider). The LHC-ring is 27 kilometers long and lies 100 meter under ground.