

Hertentamen Differentiaalvergelijkingen (WISB231), 6 juli 2017, 13:30-16:30

Dit hertentamen bestaat uit vier opgaven. Het is bij dit tentamen niet toegestaan om een boek, aantekeningen, mobiele telefoon, laptop of een grafische rekenmachine te gebruiken. Vergeet niet op elk ingeleverd vel uw naam en studentnummer te schrijven. Motiveer uw antwoorden. Succes!

Opgave 1 [15 pt] Geef de algemene oplossing van de volgende differentiaalvergelijkingen

$$(a) [5 \text{ pt}] y'''' - y = 0; \quad (b) [10 \text{ pt}] \begin{cases} y_1'' = y_2, \\ y_2'' = y_1. \end{cases}$$

Opgave 2 [20 pt] Bereken de matrix A waarvoor

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) & 0 & \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \\ 0 & e^t & 0 \\ \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) & 0 & \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \end{pmatrix}.$$

Opgave 3 [45 pt] Beschouw het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \dot{q} = -p + q^2 - p^2, \\ \dot{p} = q - 2qp. \end{cases} \quad (1)$$

- (a) [5 pt] Bepaal alle rustpunten van (1) in het (q, p) -vlak.
- (b) [10 pt] Laat zien dat de drie lijnen $l_0 := \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : p = 1/2\}$ en $l_{1,2} := \{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : p = -1 \pm \sqrt{3} q\}$ invariant zijn voor (1), d.w.z. bestaan uit de banen van (1).
- (c) [10 pt] Bewijs dat (1) herschreven kan worden als een *Hamilton-stelsel*

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p}, \\ \dot{p} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q}, \end{cases}$$

en vind de Hamiltonfunctie $H = H(q, p)$.

- (d) [10 pt] Bepaal de types van alle rustpunten van (1), in het bijzonder hun stabiliteit. *Let op:* De Stelling van Grobman-Hartman is niet toepasbaar voor het rustpunt $q = p = 0$.
- (e) [10 pt] Schets het faseplaatje behorend bij (1) in het (q, p) -vlak. Let op de rustpunten en andere speciale banen. Zet ook pijltjes!

Opgave 4 [20 pt] Zij $y(x)$ een oplossing van het beginwaardeprobleem voor de Bernoulli-vergelijking

$$y' = y^2 - x, \quad y(0) = 1.$$

Vind a_n voor $n \leq 5$ in de reeksontwikkeling $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.