

Differentiaalvergelijkingen A (WISB231) 3 mei 2002

Opgave 1

Beschouw voor constante $b \in \mathbb{R}$ het beginwaardeprobleem

$$\frac{dy}{dx} = -y + \sin(x) + b, \quad y_0 = y(0). \quad (1)$$

- Los het beginwaardeprobleem (1) op voor $y_0 \in \mathbb{R}$. Geef ook een zo groot mogelijk interval waarop de oplossing bestaat.
- Voor welke waarde $y_0 \in \mathbb{R}$ is de oplossing $y(x)$ periodiek en wat is de bijbehorende periode T ?
- Bereken de stroming na tijd nT , d.w.z. de afbeelding $\Phi^{nT,0}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Wat gebeurt er voor $n \rightarrow \infty$?
- Schets $y(x)$ voor een $y_0 \neq b$. Beschrijf in woorden hoe de oplossing $y(x)$ zich gedraagt voor grote waarden van x .

Opgave 2

Beschouw het volgende stelsel van differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (2)$$

- Bereken de stationaire punten van (2).

Beschouw de grootheid $E := x^2 + y^2$.

- Laat zien dat $\frac{dE}{dt} := \frac{\partial E}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial E}{\partial y} \dot{y} = 2E - 2E^2$.

Een verzameling $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ heet *invariant* wanneer het volgende geldt: een oplossing die start in Ω , blijft in Ω zolang hij gedefinieerd is.

- Laat nu zien dat de cirkel $\{x^2 + y^2 = 1\}$ een invariante verzameling is voor het stelsel (2).
- Maak de transformatie naar poolcoördinaten

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \end{aligned}$$

Laat zien dat het stelsel (2) onder deze transformatie overgaat in het volgende stelsel:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(1 - \rho^2) \\ \dot{\phi} = 1 \end{cases}$$

- Teken nu het faseplaatje in het (x, y) -vlak. Zet ook pijltjes. Beschrijf in woorden de kwalitatieve verschillen tussen de verschillende oplossingen.

Opgave 3

Beschouw het stelsel

$$\frac{dy}{dx} = Ay$$

- a) Bereken de stromingsmatrix e^{xA} en maak een schets van het faseplaatje als

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Zet ook pijltjes.

- b) Bereken de stromingsmatrix e^{xA} en maak een schets van het faseplaatje als

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Zet ook pijltjes.

- c) Bereken de stromingsmatrix e^{xA} als

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- d) Beschouw nu het beginwaardeprobleem

$$\frac{dy}{dx} = Ay, \quad y(0) = y_0$$

voor de matrix A als in onderdeel 3c. Voor welke $y_0 \in \mathbb{R}$ geldt dat we voor de oplossing hebben dat $\lim_{x \rightarrow \infty} \|e^{-x}y(x)\| < \infty$?