

## Differentiaalvergelijkingen A (WISB231) 13 april 2004

### Opgave 1

(20 punten)

Beschouw het stelsel  $y' = Ay$  met  $y \in \mathbb{R}^2$ ,  $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ .

Maak een schets van het faseplaatje. Zet ook pijltjes.

### Opgave 2

(25 punten)

Beschouw het beginwaardeprobleem

$$\frac{dy}{dx} = -y + \cos(x) - 1, \quad y(0) = y_0. \quad (1)$$

- Los het beginwaardeprobleem (1) voor  $y_0 \in \mathbb{R}$  op. Geef ook een zo groot mogelijk interval waarop de oplossing bestaat.
- Voor welke waarde  $y_0 \in \mathbb{R}$  is de oplossing  $y(x)$  periodiek en wat is de bijbehorende periode  $P$ ?
- Schets  $y(x)$  voor een  $y_0 \neq -\frac{1}{2}$ . Hoe gedraagt zich de oplossing  $y(x)$  voor grote  $x$  waarden?

### Opgave 3

(25 punten)

Bereken  $e^{xA}$  voor  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

### Opgave 4

(30 punten)

Beschouw het volgende stelsel van differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} \dot{x} &= \mu x - y + 2x(x^2 + y^2) - x(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) \\ \dot{y} &= x + \mu y + 2y(x^2 + y^2) - y(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) \end{cases} \quad (2)$$

waarin  $\mu$  een reële parameter is.

- Laat zien dat  $(0, 0)$  het enige rustpunt van (2) is.
- Maak de transformatie naar poolcoördinaten

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \end{aligned}$$

Laat zien dat het stelsel (2) onder deze transformatie overgaat in het volgende stelsel:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\mu + 2\rho^2 - \rho^4), \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases}$$

- Hoeveel gesloten banen kan (2) hebben? Wat is de periode van de bijbehorende periodieke oplossingen? Voor welke  $\mu$  heeft het stelsel twee, één of geen gesloten banen?
- Teken nu de faseplaatjes van (2) in het  $(x, y)$ -vlak voor  $\mu = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$ , en  $\frac{1}{2}$ . Zet ook pijltjes. Beschrijf in woorden de kwalitatieve verschillen tussen deze gevallen.