

Hertentamen Differentiaalvergelijkingen (DIFFa en DIFFb) 31 augustus 2005

Opgave 1 (20 punten)

Bereken e^{tA} voor $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Opgave 2 (30 punten)

Beschouw het volgende stelsel van differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x - y + 2x(x^2 + y^2) - x(x^2 + y^2)^2, \\ \dot{y} &= x - y + 2y(x^2 + y^2) - y(x^2 + y^2)^2. \end{cases} \quad (1)$$

- Laat zien dat $(0, 0)$ het enige rustpunt van (1) is.
- Maak de transformatie naar poolcoördinaten

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \\ y &= \rho \sin \phi \end{aligned}$$

Laat zien dat het stelsel (1) onder deze transformatie overgaat in het volgende stelsel:

$$\begin{cases} \dot{\rho} &= \rho(-1 + 2\rho^2 - \rho^4), \\ \dot{\phi} &= 1. \end{cases}$$

- Teken het faseplaatje van (1) in het (x, y) -vlak. Zet ook pijltjes.
- Zij $(x(t), y(t))$ de oplossing van (1) met $x(0) = 3, y(0) = 0$. Hoe gedraagt $x(t)$ zich voor grote t waarden? Schets de grafiek van $x(t)$ voor $t \geq 0$.

Opgave 3 (25 punten)

Beschouw de Besselvergelijking

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad x > 0. \quad (2)$$

- Toon aan dat de substitutie $y(x) = x^{-\frac{1}{2}}u(x)$ in (2) geeft

$$u'' + u = \frac{\mu}{x^2}u, \quad (3)$$

waarin $\mu = \nu^2 - \frac{1}{4}$.

- Schrijf de algemene oplossing van (3) voor $\nu = \frac{1}{2}$. Gebruik deze oplossing om de algemene oplossing van (2) met $\nu = \frac{1}{2}$ te geven.

Opgave 4 (25 punten)

Los het volgende randvoorwaardenprobleem op:

$$y''' - y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y(\ln 2) = 2.$$