

Tentamen Golven en Optica

23 augustus 2010; 9-12 uur

- Maak elke opgave op een apart vel en voorzie die van uw naam en studentnummer
- Gebruik van een grafische rekenmachine is toegestaan, internet is verboden
- Verdeel uw tijd optimaal over de opgaven

Opgave 1. Trillende snaar (3.0 punt)

Een ideale snaar met massa per lengte-eenheid μ is opgespannen tussen $x=0$ en $x=L$ onder spankracht F . Op $t=0$ is de snaar in rust en heeft de volgende uitwijking in de y -richting:

$$y(x,0) = 2y_m \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) - y_m \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

- a) De kinetische energie per lengte-eenheid u_k en de potentiële energie per lengte-eenheid u_p worden gegeven door:

$$u_k = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right)^2 \quad \text{en} \quad u_p = \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right)^2.$$

Geef de uitdrukking voor de totale energie in de snaar op $t=0$ in termen van y_m , F en/of L .

De snaar wordt losgelaten op $t=0$, en begint te oscilleren.

- b) Geef de uitdrukking voor $y(x,t)$. Het is niet nodig om $y(x,t)$ zo veel mogelijk te vereenvoudigen.
- c) Na welke tijd t_0 heeft de snaar dezelfde vorm als op $t=0$?

Een realistische pianosnaar heeft een zekere stijfheid. Dat betekent dat de dispersierelatie voor trillingen van een pianosnaar met massa per lengte-eenheid μ en spankracht F gegeven wordt door:

$$\omega = k \sqrt{\frac{F}{\mu} + \alpha k^2}.$$

Hierin is α een positieve constante die de stijfheid van de snaar weergeeft; ω en k zijn als gebruikelijk gedefinieerd.

- d) Geef de dimensie van α .
- e) Geef de uitdrukking voor de fasesnelheid v_f voor golven op deze snaar in termen van F , μ , α , en/of k .
- f) Geef de uitdrukking voor de groepsnelheid v_g voor golven op deze snaar in termen van F , μ , α en/of k en/of v_f . Laat zien dat v_g altijd groter is dan v_f .

De pianosnaar is ingeklemd op punten $x=0$ en $x=L$ en heeft op $t=0$ dezelfde vorm als de ideale snaar hierboven. Damping of andere vormen van energieverlies laten we buiten beschouwing.

- g) Geef analoog aan vraag 1b) de uitdrukking voor $y(x,t)$. Het is niet nodig om $y(x,t)$ zo veel mogelijk te vereenvoudigen.
- h) Keert de snaar na zekere tijd weer terug in de vorm $y(x,0)$? Zo ja, na welke tijd? Zo nee, verklaar u nader (kort).

Opgave 2. Laserbundels en het EM-veld (2.0 punten)

Een gepolariseerde laserbundel heeft een gemiddelde intensiteit van 10 W/m^2 , is gericht in de richting van de positieve x -as, en is gepolariseerd in de y -richting.

- Geef de amplitude (in SI-eenheden) van het elektrische veld in de laserbundel? De numerieke waarde van de lichtsnelheid c (in SI-eenheden) is $3 \cdot 10^8$ en de permeabiliteit van vacuüm μ_0 is $4\pi \cdot 10^{-7}$.
- Geef de amplitude (in SI-eenheden) van het magnetische veld in de laserbundel?
- Schets in één figuur zowel het elektrische veld als het magnetische veld in de bundel. Geef duidelijk aan in welke richting het licht reist.
- Het EM-veld in een laserbuis is een staande golf. Als de buis 30 cm lang is, en de golflengte van het licht 600 nm, hoeveel buiken telt deze staande golf dan?
- Schets in één figuur zowel het elektrische veld als het magnetische veld langs de x -as van de laserbuis.

Opgave 3. Breking en Brewster (2.5 punten)

We beschouwen een vlakke glas-lucht overgang, met $n_{\text{glas}}=1.5$. Een lichtbundel met diameter D valt vanuit het glas in op dit grensvlak onder een hoek θ_i met de normaal op het grensvlak. De hoek van de doorgaande bundel met de normaal noemen we θ_t .

- Teken het verband tussen θ_i en θ_t , en bespreek de vorm van de curve.
- Bereken de afmetingen van de doorgaande bundel. Teken dit resultaat als functie van θ_i en bespreek het.

Vervolgens laten we een lichtbundel met een golflengte van 650 nm vanuit de lucht op het grensvlak vallen.

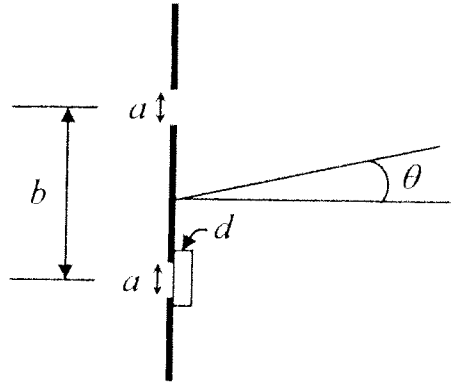
- Welke waarde heeft de frequentie van dit licht in het glas?
- Welke waarde heeft de golflengte van dit licht in het glas? Met welke *kleur* correspondeert deze golflengte in vacuüm?

We laten het expliciete lucht-glas voorbeeld van hierboven los en beschouwen nu een (algemene) overgang tussen twee media met verschillende brekingsindices.

- Laat zien dat de Brewsterhoeken voor interne en externe reflectie complementair zijn, d.w.z. $\theta_p + \theta'_p = 90^\circ$. Je mag gebruik maken van de wet van Brewster.

Opgave 4. Diffractie aan twee spleten (2.5 punten)

Een vlakke elektromagnetische golf met golflengte λ_0 in lucht valt loodrecht op twee lange, dunne spleten, met breedte a en onderlinge afstand b . Eén van de spleten (de onderste; zie bijgaande tekening) is bedekt met een dun, doorzichtig plaatje met een dikte d en brekingsindex n . De dikte d is zo gekozen dat $(n-1)d/\lambda_0 = 7/2$. Het interferentiepatroon wordt waargenomen op een scherm dat op een afstand L staat, waarbij L groot is t.o.v. de spleetafstand. We beschouwen het patroon als functie van de hoek θ .



We bekijken eerst alleen het effect van *interferentie* van beide spleten, m.a.w. we veronderstellen $a \ll b$. Beschouw een imaginair “plaatje lucht” ($n_{\text{lucht}} = 1$) achter de bovenste spleet met dezelfde dikte d als het diëlektrische plaatje.

U mag in deze opgave aannemen dat alle hoeken θ zo klein zijn, dat $\cos(\theta) \approx 1$ en $\sin(\theta) \approx \theta$. Dus golven die het “plaatje lucht” onder een kleine hoek θ verlaten, hebben een fase doorlopen van $2\pi d/\lambda_0$.

- Laat zien dat het faseverschil tussen twee golven die door de verschillende plaatjes zijn gegaan en die op het scherm samenkomen in een punt met $\theta = 0$ gelijk is aan 7π .
- Geef de conditie voor de hoeken θ_m waarbij constructieve interferentie optreedt, in termen van b , L en/of λ_0 .
- Schets het interferentiepatroon op het scherm als functie van θ .

We nemen nu de effecten van zowel interferentie als diffractie aan de spleten mee. Er geldt $b/a = 3$.

- Schets het resulterende intensiteitpatroon op het scherm. Geef hierin duidelijk de effecten van de interferentie van de beide spleten en van diffractie van de spleten aan. Probeer het eventuele verschil in intensiteit van de diverse maxima zo goed mogelijk weer te geven. Een berekening wordt niet verlangd.
Tip: Vergelijk het geschetste intensiteitpatroon met het diffractiepatroon van 1 enkele spleet met breedte a .



Formuleblad bij tentamen Golven en Optica

Hoofdstuk 15

15.1) $v = \lambda f$

15.5) $k = 2\pi/\lambda$ en $\omega = 2\pi f$

15.6) $\omega = vk$

15.7) $y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$, sinusvormige golf in de $+x$ -richting.

15.12) $\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}$, de golfvergelijking.

15.13) $v = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$, voor golven op een koord met spankracht F en massa per lengte eenheid μ .

15.xx) $y(x, t) = A \cos(kx \pm \omega t - \phi)$, algemene vorm voor lopende harmonische golven met amplitude A (in één dimensie); de willekeurige fase ϕ wordt vaak weggelaten.

15.21) $P(x, t) = F_y(x, t)v_y(x, t) = F \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t}$, vermogen van een golf.

15.25) $P_{av} = \frac{1}{2} \sqrt{\mu F} \omega^2 A^2$, gemiddeld vermogen van sinusvormige golf

15.26) $\frac{I}{r^2} = \frac{I_0}{r_0^2}$, intensiteit is evenredig met kwadraat van de inverse afstand.

15.27) $y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$, superpositieprincipe.

15.28) $y(x, t) = A \sin(kx) \sin(\omega t)$, staande golven op een koord, gefixeerd in $x = 0$

15.33) $f_n = n \frac{v}{2L}$, frequenties staande golven op koord gefixeerd in $x = 0$ en $x = L$.

a) f_1 , grondtoon, fundamental frequency

b) f_2 , eerste boventoon, second harmonic

c) f_n , $(n - 1)^{de}$ boventoon, n^{de} harmonic

Hoofdstuk 16

16.3) $p(x, t) = -B \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}$, drukfluctuatie door gradiënt van de deeltjesverplaatsing in een geluidsgolf

16.5) $p_{max} = BkA$, drukamplitude voor sinusvormige geluidsgolven; met B the bulk modulus en A de verplaatsingsamplitude

16.7) $v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$, geluidssnelheid, fasesnelheid van longitudinale golven

16.8) $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$, geluidssnelheid in een ideaal gas; met γ de verhouding van warmtecapaciteit bij constante druk en die bij constant volume, R de gasconstante, T de temperatuur in K en M de molare massa

16.9) $v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$, geluidssnelheid / fasesnelheid van longitudinale golven in een vaste staaf, met Y de Young modulus

16.11) $I = \frac{1}{2} \sqrt{\rho B} \omega^2 A^2 = \frac{p_{max}^2}{2\rho v} = \frac{p_{max}^2}{2\lambda v B}$, intensiteit (in W/m^2) van een sinusvormige geluidsgolf

16.15) $\beta = (10 \text{ dB})^{-1} \log \frac{I}{I_0}$, definitie van het geluidsniveau in decibel, met $I_0 = 10^{-12} W/m^2$

- 16.16) $f_n = \frac{nv}{2L}$, ($n = 1, 2, 3, \dots$), frequenties van staande golven in een pijp met lengte L die aan beide kanten open is.
- 16.22) $f_n = \frac{nv}{4L}$, ($n = 1, 3, 5, \dots$), frequenties van staande golven in een pijp met lengte L die aan één kant open en aan de andere kant afgesloten is.
- 16.21) $f_{\text{beat}} = |f_a - f_b|$, beat frequentie van twee signalen met een klein onderling frequentieverschil.
- 16.29) $f_L = \frac{v \pm v_L}{v \pm v_S} f_S$, Doppler effect: v_L en v_S zijn relatief t.o.v. een medium dat geluidssnelheid v heeft. Let op de tekens van v_L en v_S !!
- 16.30) $\sin(\alpha) = \frac{v}{v_S}$, hoek van schokgolf (deze heeft de vorm van een kegel) als de geluidsbron met snelheid $v_S > v$ door een medium met geluidssnelheid v reist.

Hoofdstuk 32

- 32.4) $E = cB$ in vacuüm.
- 32.5) $B = \epsilon_0 \mu_0 c E$
- 32.6) $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$, lichtsnelheid in vacuüm.
- 32.17) $\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{e}_y E_{\text{max}} \cos(kx - \omega t)$, $\vec{B}(x, y, z, t) = \vec{e}_z B_{\text{max}} \cos(kx - \omega t)$, sinusvormige vlakke elektromagnetische golf in de $+x$ -richting, $\vec{e}_y(z)$ is de eenheidsvector in de $y(z)$ -richting en $E_{\text{max}} = c B_{\text{max}}$.
- 32.20) $E = vB$ en $B = \epsilon \mu v E$ in diëlectricum
- 32.21) $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$, snelheid elektromagnetische golf in een diëlectricum met permittiviteit $\epsilon = K \epsilon_0$ en permeabiliteit $\mu = K_m \mu_0$
- 32.22) $n = \frac{c}{v} = \sqrt{K K_m}$, brekingsindex. De relatieve permeabiliteit K_m is meestal ongeveer gelijk aan 1.
- 32.28) $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$, Poynting vector.
- 32.29) $I = S_{\text{av}} = \frac{E_{\text{max}} B_{\text{max}}}{2 \mu_0} = \frac{E_{\text{max}}^2}{2 \mu_0 c} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_{\text{max}}^2$, intensiteit van een sinusvormige golf in vacuüm, in W/m^2 , stroomsnelheid van energie.
- 32.31) $\frac{1}{V} \frac{dp}{dt} = \frac{S}{c} = \frac{EB}{\mu_0 c}$, stroomsnelheid van impuls (momentum).
- 32.32) $p_{\text{rad}} = \frac{S_{\text{av}}}{c}$, stralingsdruk, in Pa, als de e.m. golf volledig wordt geabsorbeerd
- 32.33) $p_{\text{rad}} = \frac{2S_{\text{av}}}{c}$, stralingsdruk, in Pa, als de e.m. golf volledig wordt gereflecteerd
- 32.36) Staande golven. Bij reflectie van een e.m. golf in $x = 0$ aan een perfecte geleider heeft het \vec{E} -veld een knoop in $x = 0$, en ook als $x = n\lambda/2$ met ($n = 1, 2, \dots$); de knopen in het \vec{B} -veld zijn $\lambda/4$ verschoven
- 32.xx) Dispersie relatie: ω als functie van k . Fasesnelheid $v_f(k) = \omega/k$. Groepsnelheid $v_g(k) = \frac{d\omega}{dk}$

Hoofdstuk 33

- 33.2) $\theta_r = \theta_i$, hoek van reflectie is hoek van inval.
- 33.4) $n_a \sin(\theta_a) = n_b \sin(\theta_b)$, wet van Snellius.
- 33.5) $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$, golflengte in een medium met brekingsindex n .
- 33.6) $\sin(\theta_{\text{crit}}) = \frac{n_a}{n_b}$, de kritische hoek.
- 33.7) $I = I_{\text{max}} \cos^2(\phi)$. Wet van Malus, polarisatie van gepolariseerd licht: ϕ is de hoek tussen de polarisatie-richting van het invallende licht en de polarisatie-as van de polarizer.
- 33.8) Brewster's wet, $\tan(\theta_p) = \frac{n_2}{n_1}$; θ_p is de Brewster hoek. De reflectiecoëfficiënt voor invallend licht dat 100% gepolariseerd is evenwijdig aan het vlak van inval en reflectie is bij deze hoek gelijk aan 0.
- 33.x) $\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{e}_y E_{\text{max}} \cos(kx - \omega t) \pm \vec{e}_z E_{\text{max}} \sin(kx - \omega t)$, circulair gepolariseerde vlakke golf die loopt in de x -richting. Met het plus-teken is de golf rechtsdraaiend indien u de golf tegemoet kijkt. De lengte van \vec{E} is altijd E_{max} .
- 33.y) Reflectiecoëfficiënten voor intensiteit: $R_{\perp} = \sin^2(\theta_t - \theta_i) / \sin^2(\theta_t + \theta_i)$, en $R_{\parallel} = \tan^2(\theta_t - \theta_i) / \tan^2(\theta_t + \theta_i)$. Voor loodrechte inval ($\theta_i = 0$) reduceren deze uitdrukkingen tot $R = (n_2 - n_1)^2 / (n_2 + n_1)^2$.

Hoofdstuk 35

- 35.4) $d \sin(\theta) = m\lambda$ met $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, constructieve interferentie als verschil in weglengte een geheel aantal golflengtes is. De afstand tussen 2 spleten is d .
- 35.4) $d \sin(\theta) = (m + \frac{1}{2})\lambda$ met $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, destructieve interferentie als verschil in weglengte een halftrillig aantal golflengtes is.
- 35.6) $y_m = m \frac{R\lambda}{d}$, positie van maxima in Young's experiment; R is de afstand tussen spleten en scherm, d is de afstand tussen de twee spleten; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.
- 35.7) $E_p = 2E \cos(\frac{\phi}{2})$, amplitude. Superpositie van 2 sinusvormige golven met gelijke amplitude en onderling faseverschil ϕ .
- 35.11) $\phi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = k(r_2 - r_1)$, faseverschil ϕ is evenredig met verschil in weglengte.
- 35.14) $I = I_0 \cos^2(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta)$, intensiteitspatroon van 2 oneindig smalle spleten in de Fraunhofer benadering.

Hoofdstuk 36

- 36.2) $\sin \theta = m \frac{\lambda}{a}$ met $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ minima voor diffractie aan één spleet met breedte a .
- 36.7) $I = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)^2$ met $\alpha = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$, intensiteitspatroon van diffractie aan één spleet met breedte a .
- 36.xx) $I = I_0 \left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)^2$ met $\alpha = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}$, intensiteitspatroon van diffractie aan n spleten met onderlinge afstand d en verwaarloosbare breedte.
- 36.13) $\sin \theta = m \frac{\lambda}{d}$ met $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ hoeken waar hoofdmaxima optreden voor een tralie met spleetafstand d .
- 36.15) $R = \frac{\lambda}{\Delta \lambda} = Nm$, spectraal scheidend vermogen.

36.16) $\sin \theta = m \frac{\lambda}{2d}$ met $m = 1, 2, 3, \dots$. Bragg conditie. Constructieve interferentie treedt op bij diffractie aan series evenwijdige vlakken op onderlinge afstand d . De hoek θ is hier de hoek tussen verstrooide bundel en de evenwijdige kristalvlakken met atomen waaraan verstrooid wordt.

36.17) $\sin \theta_1 = 1,22 \frac{\lambda}{D}$, hoek waarbij in het Fraunhofer diffractiepatroon van een rond gat met diameter D het eerste minimum optreedt. De begrenzing van de Airy-schijf.

Goniometrie

- $\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$
- $\cos(2a) = 1 - 2 \sin^2(a)$
- $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$