

Tentamen Numerieke Wiskunde (WISB251)¹



Maak één opgave per vel en schrijf op ieder vel duidelijk je naam en studentnummer. Laat duidelijk zien hoe je aan de antwoorden komt. Onderstaande formules en stellingen mag je zonder bewijs gebruiken. Succes!

Handige formules en notatie

- **Representatiefout** zwevendekommagetallen: $\text{fl}(x) = x(1 + \epsilon) = x(1 + \epsilon')^{-1}$ met $|\epsilon|, |\epsilon'| \leq \eta$.
- **Exacte afronding**: $\text{fl}(\text{fl}(x) \circ \text{fl}(y)) = (\text{fl}(x) \circ \text{fl}(y))(1 + \epsilon)$ met $|\epsilon| \leq \eta$ en waarbij \circ staat voor een van de elementaire rekenkundige operaties $+$, $-$, $*$, $/$.
- **Meerdere afrondfouten**: Gegeven $|\epsilon_i| \leq \eta$ en $n\eta < 1$, dan $\prod_{i=1}^n (1 + \epsilon_i) = (1 + \theta_n)$ met $|\theta_n| \leq \frac{n\eta}{1 - n\eta}$.
- **Gedeelde differenties** (met $x_0 < x_1 < \dots < x_n$)

$$f[x_i] = f(x_i), \quad f[x_i, x_j] = \frac{f[x_j] - f[x_i]}{x_j - x_i}, \quad f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_j, x_k] - f[x_i, x_j]}{(x_k - x_i)}.$$

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi \in [x_0, x_n].$$

- **Kwadratuurregels**:

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{24}(b - a)^3 \quad (\text{midpuntregel}),$$

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)(f(a) + f(b))/2 - \frac{f''(\xi)}{12}(b - a)^3 \quad (\text{trapeziumregel}).$$

- **Middelwaardstelling**: Gegeven continue functies f en w waarbij w niet van teken wisselt op het interval $[a, b]$, dan is er een $\xi \in [a, b]$ waarvoor:

$$\int_a^b f(x)w(x) dx = f(\xi) \int_a^b w(x) dx.$$

- **Vastepuntiteratie voor lineaire stelsels**: De iteratie

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + M(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_k),$$

convergeert als de spectrale radius van $I - MA$ kleiner dan 1 is, oftewel $\rho(I - MA) < 1$.

2 pt. **vraag 1 - afrondfouten** In deze opgave bekijken we de afrondfout in de berekening $y = 4x^2 - 1$. Je mag aannemen dat x een zwevendekommagetal is.

a) Laat zien dat de *relatieve fout* kan worden begrensd door

$$\frac{|\text{fl}(y) - y|}{|y|} \leq \left(\frac{3\eta}{1 - 3\eta} \right) \left(\frac{4x^2 + 1}{|4x^2 - 1|} \right),$$

waarbij η de afrondeenheid is.

b) Voor welke x is deze berekening problematisch?

3 pt. **vraag 2 - niet-lineaire vergelijkingen** We beschouwen de volgende vastepuntiteratie

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2}{3a^2} (x_k^3 - a),$$

met $a > 1$.

a) Wat is het vaste punt van deze iteratie?

b) Laat zien dat deze vastepuntiteratie convergeert naar het vaste punt voor beginwaarden $x_0 \in (0, a)$.

c) Hoe snel convergeert de methode in het algemeen?

2 pt. **vraag 3 - Interpolatie** We willen de functie $f(x) = \cos(\pi x/2)$ benaderen op het interval $[-1, 1]$.

a) Stel een tweedegraads interpolerend polynoom, p , op met als steunpunten $\{-1, 0, 1\}$.

b) Geef een bovengrens voor de fout $|f(x) - p(x)|$ op het interval $[-1, 1]$

3 pt. **vraag 4 - differentiaalvergelijkingen** We bekijken de volgende methode om een differentiaalvergelijking $u'(t) = f(u(t))$ op te lossen

$$\tilde{u}_{n+1} = \tilde{u}_n + \frac{h}{2} \left(f(\tilde{u}_n) + f\left(\tilde{u}_n + \frac{2h}{3} f(\tilde{u}_n)\right) \right).$$

waarbij \tilde{u}_n een benadering is van $u(n \cdot h)$.

a) Laat zien dat de truncatiefout is gegeven door

$$Ah^2 + \mathcal{O}(h^3),$$

en geef een uitdrukking voor A .

b) Bepaal het stabiliteitsgebied van de methode.