

Uitwerking Eindtentamen M & I, 28-6-12

E.J. Balder

Opgave 1 [15 pt.] Zij (X, \mathcal{A}, μ) een σ -eindige maatruimte en zij λ de Lebesgue maat op $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Zij $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ een meetbare functie.

- [5 pt.] Bewijs dat de verzameling $G := \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : y = u(x)\}$ (dat wil zeggen: de *grafiek* van u) een $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -meetbare deelverzameling is van $X \times \mathbb{R}$.
- [10 pt.] Bewijs $(\mu \times \lambda)(G) = 0$.

Opgave 2 [15 pt.] a. [7,5 pt.] Zij $f_n(x) := (1+x^2)^{-1}n^2xe^{-n^2x^2}$. Bepaal $L_a := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, \infty)} f_n(x) \lambda(dx)$ voor $a = 0$. Hier staat λ voor de Lebesgue maat op $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. *Aanwijzing:* Maak "maattheoretisch-netjes" gebruik van de substitutie $y := nx$.

- [7,5 pt.] Bepaal bovenstaande limietwaarde L_a ook voor $a > 0$.

Opgave 3 [30 pt.] Een *atoom* van een meetbare ruimte (X, \mathcal{A}) is een verzameling $A \in \mathcal{A}$ met de volgende eigenschap: als $B \subset A$ en $B \in \mathcal{A}$ dan of $B = \emptyset$ of $B = A$.

- [5 pt.] Bewijs: als A een niet-leeg atoom is van (X, \mathcal{A}) en als $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ een \mathcal{A} -meetbare functie is, dan bestaat er een $\alpha \in \mathbb{R}$ zo dat $f(x) = \alpha$ voor alle $x \in A$.

Een *maat-atoom* van een maatruimte (X, \mathcal{A}, μ) is een verzameling $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) > 0$, met de volgende eigenschap: als $B \subset A$ en $B \in \mathcal{A}$ dan of $\mu(B) = 0$ of $\mu(B) = \mu(A)$.

- [15 pt.] Bewijs: als A een maat-atoom is van (X, \mathcal{A}, μ) en als $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ een \mathcal{A} -meetbare functie is, dan bestaat er een $\alpha \in \mathbb{R}$ zo dat $f(x) = \alpha$ voor μ -bijna alle $x \in A$. *Aanwijzing:* Uiteraard geldt voor elke $\gamma \in \mathbb{R}$ en voor $A_\gamma := A \cap \{f \leq \gamma\}$ dat of $\mu(A_\gamma) = 0$ of $\mu(A_\gamma) = \mu(A)$. Zij C de verzameling van alle $\gamma \in \mathbb{R}$ met $\mu(A_\gamma) = 0$. Kies voor α dan het supremum van C ; laat achtereenvolgens zien dat: (i) α welgedefinieerd is, (ii) α ook het maximum is van C (d.w.z. tot C behoort) door de definitie van supremum te gebruiken en (iii) α de gewenste eigenschap heeft.

- [10 pt.] Beschouw $[0, 1]$ de collectie \mathcal{C} , bestaande uit alle $C \subset [0, 1]$ waarvoor hetzij C hetzij $[0, 1] \setminus C$ (hoogstens) aftelbaar is. Definieer $\nu(C) := 0$ als C aftelbaar is en $\nu(C) := 1$ als $[0, 1] \setminus C$ aftelbaar is. Laat zien dat $([0, 1], \mathcal{C}, \nu)$ een maatruimte is en bepaal daarvan alle atomen en alle maat-atomen.

Opgave 4 [20 pt.] Laat f een Lebesgue integreerbare functie zijn op $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ met $\int_{(0, c)} f d\lambda = 0$ voor alle $c > 0$. Hier is λ de Lebesgue maat.

- Bewijs dat $\int_{(a, b)} f d\lambda = 0$ voor alle $a, b \in \mathbb{R}_+$, $a < b$.
- Bewijs dat $\int_I f^+ d\lambda = \int_I f^- d\lambda$ voor elke eindige disjuncte vereniging I van rechts halfgesloten en links halfopen intervallen in \mathbb{R}_+ .
- Bewijs dat $\int_A f^+ d\lambda = \int_A f^- d\lambda$ voor elke $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.
- Bewijs dat $f = 0$ b.o.

Opgave 5 [20 pt.] Je moet op twee manieren bewijzen dat $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(0,n)} \frac{\sin x}{x} \lambda(dx) = \frac{\pi}{2}$; die twee manieren worden hieronder beschreven. Uiteraard is λ hier de Lebesgue maat.

a. [10 pt.] Maak gebruik van de stelling van Fubini en het feit dat $\int_{(0,\infty)} e^{-tx} \lambda(dt) = \frac{1}{x}$ voor elke $x > 0$.

b. [10 pt.] Maak gebruik van het differentieerbaarheidslemma voor $F(t) := \int_{(0,\infty)} \frac{\sin x}{x} e^{-tx} \lambda(dx)$ en het feit dat $\int_0^\infty e^{-tx} \sin x dx = (t^2 + 1)^{-1}$ (als je dit laatstgenoemde feit kunt afleiden krijg je 5 **extra punten**).