Niveau 1

$$\int_{\frac{73}{14}}^{\frac{81}{14}} x \,\mathrm{d}x = \frac{22}{7}$$

Gebruik de identiteit $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

$$\int_4^8 \ln(12-x)\,\mathrm{d}x = 16\ln(2) - 4$$

Standaard integraal na substitutie $u = 12 - x$ (die je kan oplossen d.m.v. partiële integratie).

$$\int_{-\pi}^{\pi} (2-x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = -2\pi$$

Gebruik partiële integratie met $u = 2 - x$ en $v' = \sin(x)$.

$$\int_0^1 \arctan(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

Pas partiële integratie toe op $u = \arctan(x)$ en $v' = 1$. Gebruik vervolgens dat

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{en} \quad \frac{2x}{x^2+1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\bigl(x^2+1\bigr).$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \sin(x)\sin(2x)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}$$

Dubbele hoek formule geeft $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$. Substitueer vervolgens $u = \sin^2(x)$.

$$\int_0^{\infty} \sqrt{x}e^{-x^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$

Substitueer $u = -x^{3/2}$.

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln(x^2-x) - \ln(x)}{\ln(x-1)}\,\mathrm{d}x = e^2 - e$$

Gebruik dat $\ln(x^2 - x) = \ln(x) + \ln(x-1)$.

$$\int_0^{\pi/2} x\sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}$$

Los op door partiële integratie met $u = x$ en $v' = 2\sin(x)\cos(x) = (\sin^2(x))'$.

$$\int_0^{2\pi} \sin(x) e^{(1+(x-\pi)^2 \cos(x))^{-1}} \, \mathrm{d}x = 0$$

Integrand is antisymmetrisch over $x = \pi$.

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\pi} \sin(\arctan(x)) \, \mathrm{d}x = \sqrt{1+\pi^2} - 2$$

Het is bekend dat

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Substitueer vervolgens $u = 1 + x^2$.

Niveau 2

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+e^x} \, \mathrm{d}x = \ln 2$$

Substitueer $u = 1 + e^x$.

$$\int_0^{\infty} e^{-3/2x} \sqrt{e^x - e^{-x}} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

Uit de substitutie volgt $u = e^{-x}$ dat de integraal gelijk is aan

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, \mathrm{d}x \, ,$$

i.e. een kwart cirkel.

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\tan^3(2x)} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}$$

Substitueer $u = 2x$ en herschrijf de integrand als

$$\frac{1}{1+\tan^3(u)} = \frac{\cos^3(x)}{\cos^3(x) + \sin^3(x)}.$$

Gebruik tenslotte de identiteit

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x) \, \mathrm{d}x \, . \tag{$*$}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{-\cos^3(x) + (3\sin(x)+1)\cos(x)}{4(\sin(x)+1)(2-\cos^2(x))}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{16}$$

Omschrijven geeft

$$\int_0^{\pi/2} \frac{-\cos^3(x) + (3\sin(x)+1)\cos(x)}{4(\sin(x)+1)(2-\cos^2(x))}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{(3\sin(x)+\sin^2(x))\cos(x)}{4(\sin(x)+1)(1+\sin^2(x))}\,\mathrm{d}x\,.$$

Gebruik nu de substitutie $u = \sin(x)$ en doe vervolgens partiële integratie.

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\ln(2)}{4}$$

Met de substitutie $x = 2\tan(u)$ geldt dat:

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\ln(2)}{4} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} [\ln(\sin(u)) - \ln(\cos(u))]\,\mathrm{d}u\,.$$

De laatste integraal is 0 (door de substitutie $z = \pi/2 - u$).

Niveau $\iint$

$$\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{12}$$

Twee keer de grenzen in een primitieve invullen.

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \frac{e^x e^y}{e^{x+y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\pi$$

De integraal van 1 over een cirkel met straal 2.

$$\int_0^{2\sqrt{3}} \int_{y/2}^{\sqrt{3}} e^{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = e^3 - 1$$

Kijk naar het integratiegebied en draai de integratievolgorde om

$$\int_0^{2\sqrt{.}3} \int_{y/2}^{\sqrt{3}} e^{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2x} e^{x^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^\infty \int_0^{1/y} \frac{2\sin(x^2)}{\sqrt{xy}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \pi$$

Verwissel de volgorde van integreren (kijk naar het integratiegebied):

$$\int_0^\infty \int_0^{1/y} \frac{2\sin(x^2)}{\sqrt{xy}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_0^\infty \int_0^{1/x} \frac{2\sin(x^2)}{\sqrt{xy}}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{2\sin(x^2)}{x}\, \mathrm{d}x\,.$$

Los dit op met complexe analyse.

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 8\ln\Big(1+\sqrt{2}\Big)$$

Door symmetrie in de integrand en het integratiegebied (het eenheidsvierkant) kan je het splitsen in 8 sectoren:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 8\int_0^1 \int_0^y \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,.$$

Dan de substitutie $x = yu$ geeft:

$$8\int_0^1 \int_0^y \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 8\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{y\sqrt{u^2+1}} y\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\, \mathrm{d}u\,.$$

Nu substitutie $u = \sinh(z)$.

Niveau 3

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin(x))}{\ln(\sin(2x)) - \ln(2)}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

Vergroot $\sin(2x)$, substitueer $u = \pi/2 - x$ en tel dit bij de originele integraal op.

$$\int_0^\pi \frac{\ln(x)}{\sqrt{\pi x - x^2}}\, \mathrm{d}x = \pi\ln(\pi/4)$$

Er geldt dat $\pi x - x^2 = \frac{\pi^2}{4} - (x-\pi/2)^2$, dus onder $u = \pi/x$ geldt

$$\int_0^\pi \frac{\ln(x)}{\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - (x-\pi/2)^2}}\, \mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{\ln(\pi - x)}{\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - (x-\pi/2)^2}}\, \mathrm{d}x$$

en dus

$$\int_0^\pi \frac{\ln(x)}{\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - (x-\pi/2)^2}}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\ln((\pi - x)x)}{\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - (x-\pi/2)^2}}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\ln\Big(\frac{\pi^2}{4} - (x-\pi/2)^2\Big)}{\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - (x-\pi/2)^2}}\, \mathrm{d}x\,.$$

Dan de substitutie $x = \pi/2(1+\sin(u))$ krijg je:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\ln\left(\frac{\pi^2}{4} - (x-\pi/2)^2\right)}{\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - (x-\pi/2)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\ln\left(\frac{\pi^2}{4}(1-\sin^2(u))\right)}{\frac{\pi}{2}\sqrt{1-\sin^2(u)}}\pi/2\cos(u)\,\mathrm{d}u =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\ln(\cos(u))\,\mathrm{d}u = \pi\ln(\pi/2) + 2\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(u))\,\mathrm{d}u\,.$$

Deze laatste integraal is op te lossen door $u = \pi/2 - x$ te substitueren en dan bij de originele integraal op te tellen, en dan $z = 2u$ te substitueren en de originele integraal te herkennen.

$$\int_{-1}^{1} 2e^{-\arccos(x)}\,\mathrm{d}x = e^{-\pi} + 1$$

Substitueer $x = \cos(u)$

$$\int_{-1}^{1} 2e^{-\arccos(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{0} -2e^{-u}\sin(u)\,\mathrm{d}u\,.$$

Deze integraal kun je oplossen door sin als e-machten uit te schrijven, of door tweemaal partieel te integreren.

$$\int_0^{\pi} \ln(1+\cos(x))\,\mathrm{d}x = -\pi\ln(2)$$

Er geldt dat

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \ln(1+\cos(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \ln(1-\cos(x))\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln((1+\cos(x))(1-\cos(x)))\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} 2\ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

en deze is twee opgaven geleden al voorgekomen.

$$\int_0^1 \left(\frac{x^4}{1+x^6}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi}{24} - \frac{1}{12}$$

Substitueer $u = x^3$:

$$\int_0^1 \frac{x^8}{(1+x^6)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{u^2}{(1+u^2)^2}\,\mathrm{d}u\,.$$

Door deze breuk te splitsen krijg je:

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{(1+u^2)^2}\right]\mathrm{d}u\,.$$

Dit eerste deel is triviaal, het tweede deel is oplosbaar met $u = \tan(z)$.

Niveau 4

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2(8x)}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = 8\pi$$

Begin met het resultaat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi.$$

Pas nu drie keer Glasser's master theorem toe met

$$x \mapsto \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right).$$

De ontstane integraal is hierdoor 8 keer groter dan de oorspronkelijke integraal. De noemer van de integrand wordt:

$$1 + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)}\right) - \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)}\right)}\right]^2 \tag{†}$$

Substitueer nu $x = \cot\theta$. Dit geeft:

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\cot\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

en de grensen van de integraal worden $0 < \theta < \pi$. Merk verder op dat

$$\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}(\cot\theta - \tan\theta) = \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = \cot(2\theta).$$

Oftewel, de uitdrukking (†) is gelijk aan $1 + \cot^2(8\theta)$. Samengevat:

$$\int_0^\pi \frac{1}{1+\cot^2(8\theta)}\frac{1}{\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = 8\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 8\pi.$$

Merk tenslotte op dat

$$\frac{1}{1+\cot^2(8\theta)} = \frac{\sin^2(8\theta)}{\sin^2(8\theta)+\cos^2(8\theta)} = \sin^2(8\theta).$$

Dit is precies het resultaat

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2(8x)}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = 8\pi.$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x^2)}{x(1-x^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{\zeta(3)}{2}$$

Substitueer $x = \sin(x)$. Dit geeft:

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x^2)}{x(1-x^2)}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin(x))\ln(\cos(x))}{\sin(x)\cos(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Beschouw de volgende integraal en gebruik de identiteit $(*)$

$$I := \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin(x))\ln(\cos(x))}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin(x))\ln(\cos(x))}{\cot(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Merk nu op dat

$$\cot(x) + \tan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} + \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}.$$

Oftewel,

$$2I = \int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x^2)}{x(1-x^2)}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x^2)}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

De laatste gelijkheid volgt uit de substitutie $u = \sin(x)$ in de uitdrukking van I met $\tan(x)$ er in. We kunnen nu $\ln(1-x^2)$ Tayloren als volgt:

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x^2)}{x}\,\mathrm{d}x = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\int_0^1 \ln(x)x^{2k-1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Herhaalde partiële integratie geeft:

$$\int_0^1 \ln(x)x^{2k-1}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4k^2}.$$

Oftewel,

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x^2)}{x(1-x^2)}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x^2)}{x}\,\mathrm{d}x = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^3} = \frac{\zeta(3)}{2}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)^2}{x^4+2x^3+2}\,\mathrm{d}x = \pi$$

Begin met het resultaat

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi.$$

Gebruik nu Glasser's master theorem onder

$$x \mapsto x - \frac{1}{x+1}.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{5\pi^2}{48}$$

Substitueer

$$\ln(1+x) = \int_0^1 \frac{x}{1+xy}\,\mathrm{d}y$$

en verwissel de integratie volgorde. De substitutie $y = \sqrt{z}$ geeft vervolgens oplosbare integralen.

$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}}$$

We werken een algemener geval uit van de integraal:

$$I_n := \int_0^\infty \frac{\ln(x)}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x$$

Voor $n=1$ geeft de substitutie $x \mapsto \frac{1}{x}$ direct $I_1 = 0$. Definieer nu een functie als volgt (i.e. geef I_n een parameter a):

$$I_n(a) := \int_0^\infty \frac{\ln(x)}{(x^2+a)^n}\,\mathrm{d}x\,.$$

We gebruiken dit om de volgende integraal te berekenen:

$$\begin{aligned} I_1(a) &= \int_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^2+a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^\infty \frac{\ln(x)}{(\frac{x}{\sqrt{a}})^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^\infty \frac{\ln(\sqrt{a}u)}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}}I_1 + \frac{\ln(a)}{2\sqrt{a}}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \frac{\pi\ln(a)}{4\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

We bepalen nu $I_n(a)$ door de $n-1$ afgeleide van I_1 te berekenen:

$$I_1^{(n-1)}(a) = \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}a^{n-1}}\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^2+a}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \ln(x)\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left(\frac{1}{x^2+a}\right)\mathrm{d}x\,.$$

Gebruik nu dat

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left(\frac{1}{x^2+a}\right) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x^2+a)^n}.$$

Invullen geeft

$$I_n(a) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}I^{(n-1)}(a) = \frac{(-1)^{n-1}\pi}{4(n-1)!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}a^{n-1}}\left(\frac{\ln(a)}{\sqrt{a}}\right).$$

Dus i.h.b. als $a=1$ dan

$$I_n = \int_0^\infty \frac{\ln(x)}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n-1}\pi}{4(n-1)!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}a^{n-1}}\left(\frac{\ln(a)}{\sqrt{a}}\right)\Bigg|_{a=1}$$

Het geval $n=3$ is dus:

$$I_3 = \int_0^\infty \frac{\ln(x)}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}a^2}\left(\frac{\ln(a)}{\sqrt{a}}\right)\Bigg|_{a=1} = \frac{\pi}{8}(-2) = -\frac{\pi}{4}.$$