Klein Kampioenschap Wiskunde

Uitwerkingen

Opgave 1 Zij $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{pmatrix}$ een 3×2 reële matrix, $N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \end{pmatrix}$ een 2×3 reële matrix en $n \in \mathbb{N}$ een positief geheel getal zodanig dat $(MN)^2 = n \cdot (MN)$ en $\mathrm{Rang}(MN) = 2$.

[6 pt] (a). Toon aan dat $\mathrm{Rang}(NM) = 2$.

Bewijs. Merk allereerst op dat aangezien NM een 2×2 matrix is er geldt dat $\mathrm{Rang}(NM) \leqslant 2$. Maak nu gebruik van de ongelijkheid

$$\mathrm{Rang}(AB) \leqslant \min\{\mathrm{Rang}(A), \mathrm{Rang}(B)\},$$

geldend voor alle matrices A en B waarvoor AB gedefinieerd is. Toegepast vertelt deze ongelijkheid ons dat

$$\mathrm{Rang}(NM) \geqslant \mathrm{Rang}(MNMN) = \mathrm{Rang}((MN)^2) = \mathrm{Rang}(n(MN)) = \mathrm{Rang}(MN) = 2.$$

We concluderen dat $\mathrm{Rang}(NM) = 2$. ■

[4 pt] (b). Bereken de matrix NM.

Bewijs. Merk op dat NM een 2×2 matrix is met $\mathrm{Rang}(NM) = 2$, dus NM is inverteerbaar. Beschouw dan

$$(NM)^3 = (NM)(NM)(NM) = N(MN)^2 M = N(n(MN))M = n(NM)^2.$$

Door beide kanten in deze gelijkheid te vermenigvuldigen met $((NM)^{-1})^2$ volgt nu dat $NM = n \cdot I$, waarin I de 2×2 identiteitsmatrix is. ■

Opgave 2 Zij X_1, X_2, X_3, X_4 onafhankelijk, identiek verdeelde stochastische variabelen volgens de uniforme verdeling op $[-1, 1]$.

[2 pt] (a). Laat $0 \leqslant u \leqslant v \leqslant 1$. Toon aan dat $\mathbb{P}(u \leqslant X_1^2 + X_2^2 \leqslant v) = \pi(v-u)/4$.

Bewijs. Merk op dat de gevraagde kans de kans representeert dat een uniform gekozen punt in $[-1,1]^2$ tussen de twee cirkels met radii $\sqrt{u}$ en $\sqrt{v}$ in ligt. Deze kans is gelijk aan de verhouding van het oppervlak ingesloten door de twee cirkels en het oppervlak van $[-1,1]^2$, oftewel $\pi(v-u)/4$. ∎

[8 pt] (b). Laat zien dat $\mathbb{P}(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 \leqslant 1) = \pi^2/32$ en leid hiermee een formule af voor het volume van een bol in $\mathbb{R}^4$ met straal $R > 0$.

Oplossing 1. Noteer $Z_1 = X_1^2 + X_2^2$, $Z_2 = X_3^2 + X_4^2$, en laat voor $i \in \{1,2\}$, f_{Z_i} de kansdichtheidsfunctie zijn van Z_i. Met deelopgave (a) leiden we af dat voor $z \in (0,1)$, $f_{Z_i}(z) = \pi/4$. Bovendien is $f_{Z_i}(z) = 0$ voor $z < 0$. In het bijzonder is de kansdichtheidsfunctie voor $Z := Z_1 + Z_2$ en $0 \leqslant z \leqslant 1$ gegeven door

$$f_Z(z) = \int_0^1 f_{Z_1}(z-t) f_{Z_2}(t)\,\mathrm{d}t = \int_z^1 \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{16} \cdot (1-z).$$

Omdat Z_1 en Z_2 onafhankelijk zijn, kunnen we concluderen dat

$$\mathbb{P}(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 \leqslant 1) = \mathbb{P}(0 \leqslant Z \leqslant 1) = \int_0^1 f_Z(z)\,\mathrm{d}z = \frac{\pi^2}{16} \cdot \int_0^1 (1-z)\,\mathrm{d}z = \frac{\pi^2}{32}.$$

Om een formule af te leiden voor het volume van een bol in $\mathbb{R}^4$ met straal $R > 0$, beschouw de stochastische variabelen $Y_k = R \cdot X_k$ voor $k = 1, \ldots, 4$. Dan geldt er dat

$$\mathbb{P}(Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2 \leqslant R^2) = \mathbb{P}(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 \leqslant 1) = \pi^2/32.$$

Sinds $Y_1, \ldots, Y_4$ onafhankelijk en uniform verdeeld zijn over $[-R, R]$, volgt dat de kans $\mathbb{P}(Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2 \leqslant R^2)$ de verhouding representeert tussen het volume van een bol in $\mathbb{R}^4$ met straal R en het volume van $[-R,R]^4$. Omdat het volume van $[-R,R]^4$ gelijk is aan $(2R)^4 = 16R^4$, concluderen we dat het volume van een bol in $\mathbb{R}^4$ met straal R gelijk is aan $\pi^2 R^4/2$. ∎

Oplossing 2. Noteer de gevraagde kans door P. Laat n een natuurlijk getal zijn en kies strooipunten $\xi_k = \frac{k}{n}$ voor $k = 0, \ldots, n$. Met behulp van onafhankelijkheid van de stochastische variabelen kunnen we afleiden dat

$$P \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\xi_{k-1} \leqslant X_1^2 + X_2^2 \leqslant \xi_k) \cdot \mathbb{P}(X_3^2 + X_4^2 \leqslant 1 - \xi_{k-1}), \tag{1}$$

en

$$P \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\xi_{k-1} \leqslant X_1^2 + X_2^2 \leqslant \xi_k) \cdot \mathbb{P}(X_3^2 + X_4^2 \leqslant 1 - \xi_k). \tag{2}$$

Met behulp van deel (a) volgt dat

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\xi_{k-1} \leqslant X_1^2 + X_2^2 \leqslant \xi_k) \cdot \mathbb{P}(X_3^2 + X_4^2 \leqslant 1 - \xi_{k-1}) = \frac{\pi^2}{16n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = \frac{\pi^2}{16n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2},$$

waar we in de laatste stap gebruikmaken van de identiteit $\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$. Met behulp van vgl. (1) volgt nu dus dat

$$P \leqslant \frac{\pi^2}{32} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

en met een soortgelijk argument gebruikmakend van vergelijking (2) volgt dat

$$P \geqslant \frac{\pi^2}{32} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Door in de laatste twee vergelijkingen de limiet te nemen voor $n \to \infty$ is hiermee aangetoond dat $P = \pi^2/32$. Gebruik nu hetzelfde argument als in de eerste oplossing om de opgave te voltooien. ∎

Merk op dat de strategie gebruikt in deze opgave relatief gemakkelijk gegeneraliseerd kan worden naar een formule voor het volume van een bol in $\mathbb{R}^k$ in termen van het volume van een bol in $\mathbb{R}^{k-2}$ voor elk geheel getal $k \geqslant 4$.

Opgave 3 Zij $f : [0,1] \to [0,1]$ een continue functie. Laat $f^1 = f$ en definieer recursief $f^{n+1} = f \circ f^n$ voor elk positief geheel getal n. We nemen aan dat $\lim_{n\to\infty} f^n(x)$ bestaat voor elke $x \in [0,1]$ en dus in het bijzonder dat de functie $g : [0,1] \to [0,1], g(x) = \lim_{n\to\infty} f^n(x)$ welgedefinieerd is. Een punt $\xi \in [0,1]$ heet een *dekpunt* van f als $f(\xi) = \xi$.

[7 pt] (a). Bewijs de volgende twee beweringen:

(i). De functie g is constant dan en slechts dan als f precies één dekpunt heeft;

(ii). Als f minstens twee dekpunten heeft waarvan minstens een geïsoleerd[1] is, dan is g niet continu.

Hint: wat betekent het voor de functie g om welgedefinieerd te zijn?

Bewijs. Merk voor beide beweringen op dat $g(x)$ een dekpunt is van f voor alle $x \in [0,1]$. Immers, g is welgedefinieerd, dus $f(g(x)) = g(x)$.

(i). Stel g is constant. Uit de tussenwaarde stelling toegepast op $h(x) = f(x) - x$ over het interal $[0,1]$ volgt dan dat f een dekpunt heeft. Noem dit punt ξ. Aangezien g constant is en $g(\xi) = \xi$, volgt het dat $g(x) = \xi$ voor alle $x \in [0,1]$. Als $f(x) = x$ zou zijn, dan geldt er dat $g(x) = x$, dus $x = \xi$ is het enige dekpunt van f. Merk voor het omgekeerde het volgende op: wanneer ξ het enige dekpunt is van f, geldt er, aangezien $g(x)$ een dekpunt is van f voor alle $x \in [0,1]$, dat $g(x) = \xi$ voor alle $x \in [0,1]$.

(ii). Laat ξ een geïsoleerd dekpunt zijn van f. Laat zonder verlies van algemeenheid $\xi' > \xi$ een ander dekpunt van f zijn. Stel g is continu. Zij dan $\delta > 0$ zo dat voor $\xi \neq x \in (\xi - \delta, \xi + \delta) \cap [0,1]$ er geldt dat $f(x) \neq x$. Fixeer $y \in (\xi, \min\{\xi + \delta, \xi'\})$. Aangezien er geldt dat $g(\xi) = \xi < \xi' = g(\xi')$, volgt er uit de tussenwaarde stelling dat er een $c \in (\xi, \xi')$ bestaat zo dat $g(c) = y$. Met onze eerdere observatie volgt nu dus dat y een dekpunt is van f. Dit is echter in tegenstrijd met de definitie van δ, want $\xi < y < \xi + \delta$. We concluderen dat g niet continu is. ∎

[3 pt] (b). Geef een voorbeeld van een continue functie $f : [0,1] \to [0,1]$ met $f(0) = f(1)$ zodat g continu is maar niet constant.

Bewijs. Er zijn hier veel voorbeelden mogelijk. Belangrijk is dat het voorbeeld geen geïsoleerde dekpunten heeft. Een mogelijk voorbeeld is de continue functie $f : [0,1] \to [0,1]$,

$$f(x) = \frac{1 - |2x - 1|}{2} = \begin{cases} x, & \text{als } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1 - x, & \text{als } x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Merk op dat aangezien $f\big((\frac{1}{2}, 1]\big) \subset [0, \frac{1}{2}]$, er geldt dat $f^2 = f$. Met behulp van inductie volgt dan dat $g = f$. Dus g is duidelijk continu en niet constant. ∎

[1] Een dekpunt ξ van f is *geïsoleerd* als er een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat voor $\xi \neq x \in (\xi - \delta, \xi + \delta) \cap [0,1]$ geldt dat $f(x) \neq x$.

Opgave 4 In deze opgave bewijzen we dat voor elk positief geheel getal N er een macht van 2 bestaat die start met N. Het getal 3 staat bijvoorbeeld aan het begin van $2^5 = 32$ en $2^8 = 256$ start met 25.

[2 pt] (a). Geef een expliciete macht van 2 die start met 7. Je hoeft een eventuele gok niet te beargumenteren.

Bewijs. Een voorbeeld volstaat bij deze opgave. Aangezien het kleinste voorbeeld echter nogal groot is, presenteren we hier een systematische aanpak. Merk op dat $2^6 = 64$ en $2^{10} = 1024$, dus zullen we door 2^6 herhaaldelijk te vermenigvuldigen met 2^{10} uiteindelijk een getal vinden met als eerste cijfer 7 (waarom?). Controleer dat $2^6, 2^{16}, 2^{26}$ en 2^{36} niet met 7 beginnen, maar $2^{46} = 7.036\ldots \cdot 10^{13}$ wel. ■

[4 pt] (b). Toon aan dat het resultaat waar is wanneer N een macht is van 10. Je mag zonder bewijs refereren naar de volgende variant van de benaderingsstelling van Dirichlet: voor elke $\alpha, \varepsilon > 0$ bestaan er positieve gehele getallen p and q zodat $0 \leqslant q\alpha - p < \varepsilon$.

Bewijs. Zij $d \in \mathbb{N}$ en $N = 10^d$. We zoeken $k, l \in \mathbb{N}$ zo dat $10^{d+l} \leqslant 2^k < 10^{d+l} + 10^l$. Daartoe hebben we:

$$\begin{aligned} 10^{d+l} \leqslant 2^k < 10^{d+l} + 10^l &\iff d + l \leqslant k \log_{10}(2) < d + l + \log_{10}(1 + 1/N) \\ &\iff 0 \leqslant k \log_{10}(2) - (d + l) < \log_{10}(1 + 1/N). \end{aligned}$$

Gebruik nu de benaderingsstelling van Dirichlet met $\varepsilon = \log_{10}(1+1/N)$. We vinden dat er $p, q \in \mathbb{N}$ bestaan zo dat $0 \leqslant q \log_{10}(2) - p < \varepsilon$. Aangezien $\log_{10}(2)$ irrationaal is geldt er dat $q \log_{10}(2) - p \neq 0$. Omdat er slechts eindig veel mogelijkheden zijn voor $p \leqslant d$, kunnen we door ε kleiner te kiezen dus garanderen dat $p > d$. Kies nu $k = q$ en $l = p - d$. Door dit in te vullen vinden we de gezochte ongelijkheid en daarmee de gevraagde macht van 2. ■

[4 pt] (c). Leid af dat het resultaat geldt voor elk positief geheel getal N. *Hint: afhankelijk van je aanpak van deel (a) kan je werkwijze daar je op ideeën brengen.*

Bewijs. We zullen dit aantonen met behulp van inductie naar N. Merk voor de inductie basis op dat $2^0 = 1$. Neem nu aan dat er een macht van 2 is, we zullen deze 2^k noemen, die start met N. We zullen bewijzen dat er een macht van twee is die start met $N + 1$. Aangezien we bij onderdeel (b) al hebben bewezen dat het resultaat waar is voor machten van 10 kunnen we zonder verlies van algemeenheid aannemen dat zowel N als $N + 1$ bestaan uit d cijfers. Ook bestaat er vanwege onderdeel (b) een macht van 2 die begint met 10^d, we noemen deze 2^l. We gebruiken de notatie x_d voor de eerste d cijfers van een positief geheel getal x. Beschouw de verzameling

$$S := \left\{ (2^{k+ml})_d : m \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \right\}.$$

Het is duidelijk dat $N \in S$. We claimen dat $N + 1 \in S$. Merk daartoe eerst op dat 2^l niet een macht van 10 is (immers een macht van 2 kan nooit 5 als priemfactor hebben). Dus $S \neq \{N\}$. Bechouw nu het element $M \in S$ dat correspondeert met de eerste $m \in \mathbb{N}$ zo dat $(2^{k+ml})_d \neq N$. Vanwege $(2^{k+(m-1)l})_d = N$ en $(2^l)_{d+1} = 10^d$, moet er gelden dat $M = N + 1$ en in het bijzonder $N + 1 \in S$. Dus concluderen we dat de uitspraak waar is voor elk natuurlijk getal N. ■

Merk op dat dezelfde redenering opgaat voor machten van k groter dan 2 zolang k geen macht is van 10.