Klein Kampioenschap Wiskunde

2 juni 2022

- Je hebt 2 uur de tijd.
- Elk vraagstuk is 10 punten waard.
- Begin elke opgave op een nieuw blaadje.
- Het gebruik van een eenvoudige rekenmachine is toegestaan.

Opgave 1 Zij $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{pmatrix}$ een 3×2 reële matrix, $N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \end{pmatrix}$ een 2×3 reële matrix en $n \in \mathbb{N}$ een positief geheel getal zodanig dat $(MN)^2 = n \cdot (MN)$ en $\mathrm{Rang}(MN) = 2$.

[6 pt] (a). Toon aan dat $\mathrm{Rang}(NM) = 2$.

[4 pt] (b). Bereken de matrix NM.

Opgave 2 Zij X_1, X_2, X_3, X_4 onafhankelijk, identiek verdeelde stochastische variabelen volgens de uniforme verdeling op $[-1, 1]$.

[2 pt] (a). Laat $0 \leqslant u \leqslant v \leqslant 1$. Toon aan dat $\mathbb{P}(u \leqslant X_1^2 + X_2^2 \leqslant v) = \pi(v-u)/4$.

[8 pt] (b). Laat zien dat $\mathbb{P}(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 \leqslant 1) = \pi^2/32$ en leid hiermee een formule af voor het volume van een bol in $\mathbb{R}^4$ met straal $R > 0$.

Opgave 3 Zij $f : [0,1] \to [0,1]$ een continue functie. Laat $f^1 = f$ en definieer recursief $f^{n+1} = f \circ f^n$ voor elk positief geheel getal n. We nemen aan dat $\lim_{n\to\infty} f^n(x)$ bestaat voor elke $x \in [0,1]$ en dus in het bijzonder dat de functie $g : [0,1] \to [0,1], g(x) = \lim_{n\to\infty} f^n(x)$ welgedefinieerd is. Een punt $\xi \in [0,1]$ heet een *dekpunt* van f als $f(\xi) = \xi$.

[7 pt] (a). Bewijs de volgende twee beweringen:

(i). De functie g is constant dan en slechts dan als f precies één dekpunt heeft;
(ii). Als f minstens twee dekpunten heeft waarvan minstens een geïsoleerd[1] is, dan is g niet continu.

Hint: wat betekent het voor de functie g om welgedefinieerd te zijn?

[3 pt] (b). Geef een voorbeeld van een continue functie $f : [0,1] \to [0,1]$ met $f(0) = f(1)$ zodat g continu is maar niet constant.

Opgave 4 In deze opgave bewijzen we dat voor elk positief geheel getal N er een macht van 2 bestaat die start met N. Het getal 3 staat bijvoorbeeld aan het begin van $2^5 = 32$ en $2^8 = 256$ start met 25.

[2 pt] (a). Geef een expliciete macht van 2 die start met 7. Je hoeft een eventuele gok niet te beargumenteren.

[4 pt] (b). Toon aan dat het resultaat waar is wanneer N een macht is van 10. Je mag zonder bewijs refereren naar de volgende variant van de benaderingsstelling van Dirichlet: voor elke $\alpha, \varepsilon > 0$ bestaan er positieve gehele getallen p en q zodat $0 \leqslant q\alpha - p < \varepsilon$.

[4 pt] (c). Leid af dat het resultaat geldt voor elk positief geheel getal N. *Hint: je werkwijze bij deel (a) kan je op ideeën brengen afhankelijk van je aanpak voor dat onderdeel.*

[1] Een dekpunt ξ van f is *geïsoleerd* als er een $\delta > 0$ bestaat zodanig dat voor $\xi \neq x \in (\xi - \delta, \xi + \delta) \cap [0,1]$ geldt dat $f(x) \neq x$.